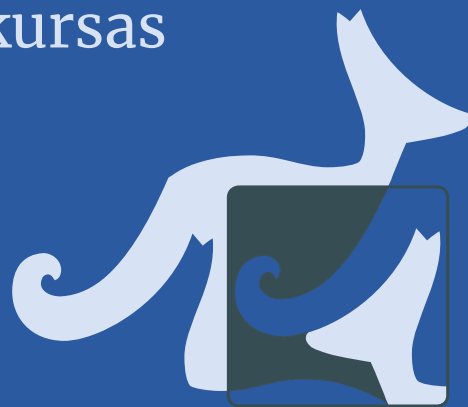
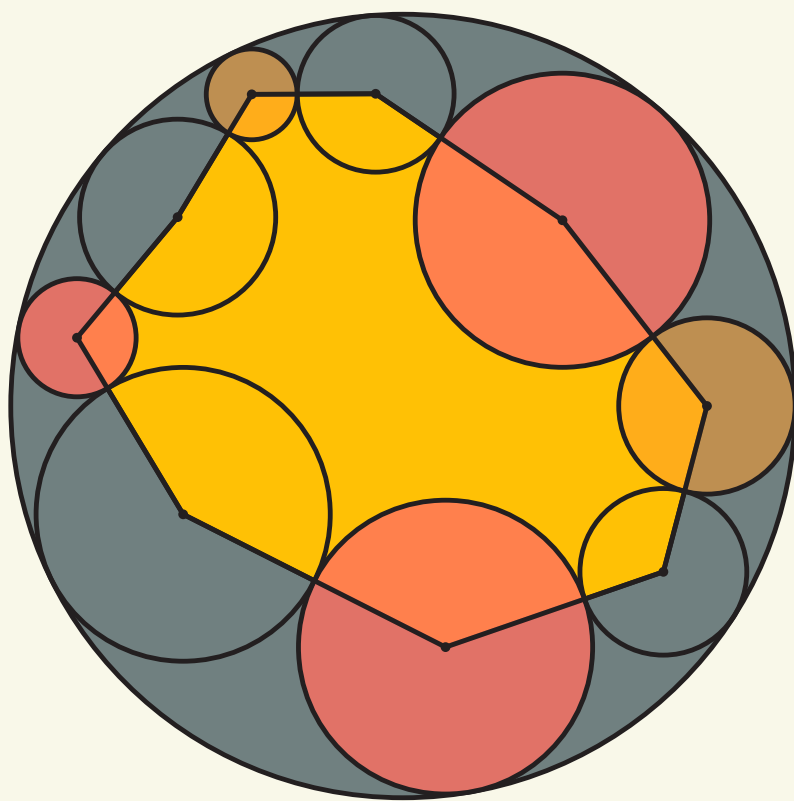


Tarptautinis matematikos konkursas
KENGŪRA



Senjoras

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI



2026

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA



KENGŪRA 2026. Senjoras
TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Turiny

Pratarmė	4
Sąlygos	6
Užduočių sprendimai	10
Atsakymai	21

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdienišku) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeįsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos sprendamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 32800 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2026 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamas, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis sprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrantančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto rinktis labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atsuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai atečiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2026 metų kovo 19 dieną keliavo ir kuriuos gausiai sprendė 11–12 klasių (*Senjoro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys patikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu !), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu ?). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų pateikiama daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais ??, !!, !!! ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

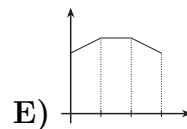
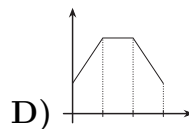
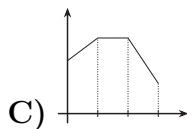
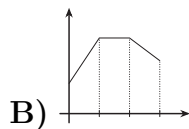
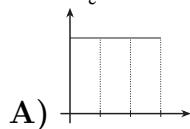
2026 m. *Senjoro* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Trikampio kraštinių ilgiai yra sveikieji skaičiai. Du iš jų lygūs 9 ir 1. Koks yra trečiosios kraštinės ilgis?

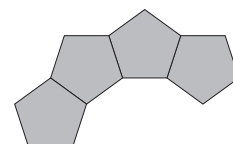
A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 13

2. Ugnius 30 minučių bėgo riste. Išmanusis laikrodis parodė, kad jo širdies ritmas, matuojamas dūžiais per minutę, trečdalį bėgimo laiko kiekvieną minutę didėjo 4, tada 10 minučių nekito, o likusį trečdalį laiko kiekvieną minutę mažėjo 2. Kuris grafikas vaizduoja Ugniaus širdies ritmo kitimą?



3. Taisyklintieji penkiakampiai glaudžiami vienas prie kito ratu, kaip parodyta paveikslėlyje, kad sudarytų „žiedą“. Kiek penkiakampių sudarys pilną tokį „žiedą“?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 14 E) 15

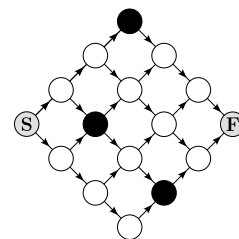


4. Reiškinyje $(\square + \square)^{\square - \square}$ keturi lapeliai tam tikra tvarka dengia skaičius 2, 0, 2 ir 6. Kokia yra didžiausia galima šio reiškinio reikšmė?

A) 2^4 B) 2^6 C) 2^8 D) 2^{10} E) 2^{12}

5. Lara turi nuo akmens S peršokti ant akmens F. Jos galimi šuoliai nuo vieno akmens ant kito parodyti rodyklėmis, ir Lara nė už ką neužšoktų ant juodų akmenų (žr. pav.). Kiek skirtingų kelių nuo S iki F turi Lara?

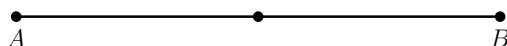
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9



6. Parduotuvė paskelbė akciją: perkant tris poras kojinių, pigiausia iš jų nemokama. Miglė perka šešias poras kojinių, kurių kainos skirtingos: 2,90, 3,10, 3,50, 4,30, 4,60 ir 4,90 Eur. Kiek daugiausiai gali kainuoti dvi poros kojinių, kurias Miglė gaus nemokamai?

A) 6,60 Eur B) 7,20 Eur C) 7,40 Eur D) 7,70 Eur E) 8,10 Eur

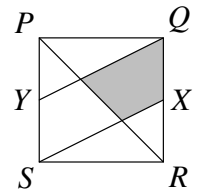
7. Atkarpoje AB atsitiktinai pasirenkami taškai P ir Q , nesutampantys nei su šios atkarpos galais, nei su jos vidurio tašku. Kokia tikimybė, kad šis vidurio taškas bus atkarpoje PQ ?



A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

8. Taškai X ir Y atitinkamai dalija kvadrato $PQRS$ kraštines QR ir PS pusiau (žr. pav.). Kuri kvadrato dalis (pagal plotą) nuspalvinta?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{3}$



9. Devyniuose viešbučio kambariuose apsigyveno iš viso 30 žmonių – kiekviename kambaryje po 3 arba 4 žmones. Kiek yra kambarių, kuriuose apsigyveno po 4 žmones?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10. Kiek yra tokių triženklių skaičių $\overline{ABC}$, kad $A = \left(\frac{B}{C}\right)^2$?

A) 4 B) 9 C) 12 D) 14 E) 16

Klausimai po 4 taškus

11. Skaičius $\underbrace{333\dots3}_{2026}$ padalytas iš 33. Kokia yra dalmens skaitmenų suma?

A) 1111 B) 2025 C) 2026 D) 3039 E) Kitas atsakymas

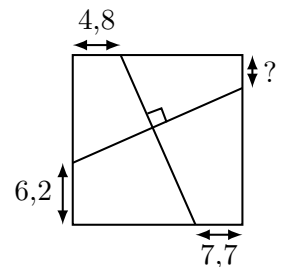
12. Septynlangės eilutės langeliuose Gabija po vieną įrašė skaičius 1, 2, 3, 4, 5, 6 ir 7. Du įrašytieji skaičiai parodyti paveikslėlyje. Eilutėje jokių dviejų gretimų skaičių suma nesidalija iš 2, o jokių trijų gretimų skaičių suma – iš 3. Kokia yra skaičių dviejuose pilkuose langeliuose suma?



A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 13

13. Kvadrato viduje nubrėžtos dvi statmenos atkarpos. Paveikslėlyje nurodyti trijų atkarpų ilgiai. Koks yra klausuku pažymėtas atkarpos ilgis?

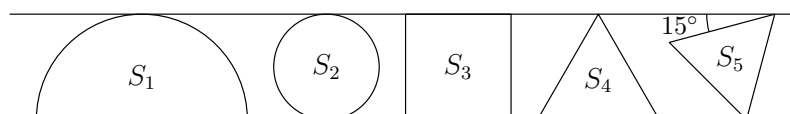
A) 5,6 B) 5,9 C) 6,1 D) 6,3 E) 6,6



14. Dedant vieną ant kito kubelius, kurių briaunos ilgis yra 4 cm arba 5 cm, statomas bokštas. Koks yra didžiausias natūralusis skaičius, kuris negali būti tokio bokšto aukštis centimetrais?

A) 101 B) 37 C) 17 D) 11 E) 7

15. Tarp lygiagrečių tiesių nubrėžti pusskritulis, skritulys, kvadratas ir du lygiakraščiai trikampiai, kaip parodyta paveikslėlyje. Kurios nelygybės šių figūrų plotams teisingos?



A) $S_1 > S_2 > S_3 > S_4 > S_5$ B) $S_1 > S_4 > S_3 > S_2 > S_5$ C) $S_1 > S_3 > S_2 > S_4 > S_5$
D) $S_1 > S_3 > S_4 > S_2 > S_5$ E) $S_1 > S_3 > S_2 > S_5 > S_4$

16. Dominykas ir Augustė po vieną kartą paridena standartinį žaidimo kauliuką. Du atvirtusių akučių skaičiai sudauginami. Dominykas nori, kad gautoji sandauga dalytųsi iš 4, o Augustė – kad ji dalytųsi iš 6. Kokia tikimybė, kad išsipildys abu šie norai?

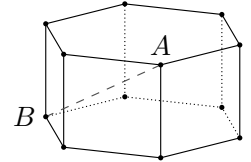
A) $\frac{1}{18}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{5}{36}$ D) $\frac{7}{36}$ E) $\frac{2}{9}$

17. Jei $9^a = 11^b = 99^2$, tai $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) 1 D) 2 E) Kitas atsakymas

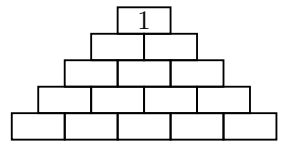
18. Taisyklingosios šešiakampės prizmės šoninės sienos yra kvadratai, o kiekvienos briaunos ilgis lygus 1 (žr. pav.). Koks yra atkarpos AB ilgis?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{4}$ D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$



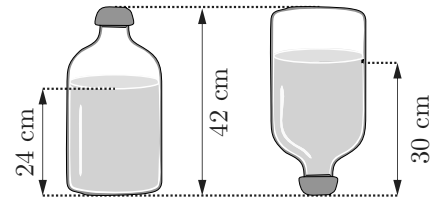
19. Kiekviename iš pavaizduotosios „piramidės“ 14 tuščių langelių reikia įrašyti skaičių 1 arba -1 . Kiekvienas „piramidės“ skaičius, nesantis apatinėje eilėje, turi būti lygus tiesiai po juo esančių dviejų skaičių sandaugai. Keliais būdais galima įrašyti skaičius?

A) 8 B) 16 C) 18 D) 20 E) 32



20. Į 4,5 litro talpos butelį įpilta vandens. Paveikslėlyje parodyta, kaip pakinta vandens aukštis, apvertus butelį. Vandens stulpelis paveikslėlio kairėje yra ritinio formos. Kiek litrų vandens yra butelyje?

A) 2,4 B) 2,5 C) 2,7 D) 3 E) 3,5



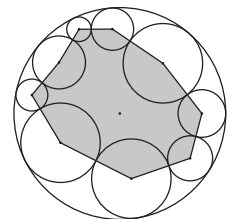
Klausimai po 5 taškus

21. Lentoje užrašyti skaičiai $1, 2, \dots, 40$. Goda atlieka 39 ėjimus, kaskart pasirinkdama du tuo metu lentoje užrašytus skaičius a ir b , juos nutrindama ir užrašydama lentoje skaičių c . Atlikdama k -tąjį ėjimą, kai k dalijasi iš 7, Goda užrašo skaičių $c = a + b + 5$, o visais kitais atvejais – skaičių $c = a + b - 1$. Koks skaičius liks lentoje po 39-ojo ėjimo?

A) 781 B) 801 C) 811 D) 819 E) Kitas atsakymas

22. Didysis apskritimas, kurio spindulio ilgis lygus 10, ir devyni mažesni apskritimai liečiasi, kaip parodyta paveikslėlyje. Mažesniųjų apskritimų centrai sujungti atkarpomis, o atstumų nuo šių centrų iki didžiojo apskritimo centro suma lygi d . Koks yra nuspalvinto daugiakampio perimetras?

A) $90 - 2d$ B) $90 - d$ C) $180 - d$ D) $180 - 2d$ E) $180 + 2d$



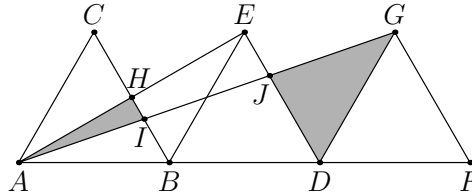
23. Nojus 100 kartų paridena standartinį žaidimo kauliuką. Visų akučių skaičių, kuriais kauliukas atvirto, sandauga lygi 6^{70} . Kiek mažiausiai kartų kauliukas galėjo atvirsti 6 akutėmis?

A) 10 B) 12 C) 24 D) 30 E) Kitas atsakymas

24. Arnas užrašė 24 iš eilės einančius natūraliuosius skaičius ir pastebėjo, kad 15 mažiausių iš jų suma lygi 9 didžiausiųjų sumai. Koks yra mažiausias iš šių 24 skaičių?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

25. Trijų lygių lygiakraščių trikampių kraštinės sudaro atkarpą AF , kaip parodyta paveikslėlyje. Koks yra trikampio AHI ploto S_1 ir trikampio DGJ ploto S_2 santykis?



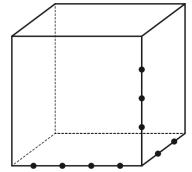
A) 1 : 3 B) 1 : 4 C) 1 : 5 D) 2 : 3 E) 3 : 5

26. Funkcija f apibrėžta realiųjų skaičių aibėje ir įgyja realiasias reikšmes. Kiekvienam realiajam skaičiui x teisingos lygybės $f(x+10) = f(x)$ ir $f(6-x) = -f(x)$. Yra žinoma, kad $f(27) = 9$. Tada $f(9) + f(13) =$

A) 9 B) 3 C) -3 D) -9 E) -27

27. Kubo briaunose pažymėti devyni taškai, kaip parodyta paveikslėlyje. Kiek yra trikampių piramidžių, kurių visos viršūnės yra pažymėtieji taškai?

A) 24 B) 36 C) 48 D) 60 E) 72

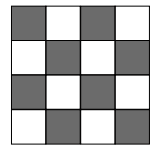


28. Sekoje $a_1, a_2, a_3, \dots$ kiekvienas a_n yra didžiausias natūralusis skaičius, ne didesnis už $\sqrt{n}$. Pavyzdžiui, $a_{2026} = a_{45^2+1} = 45$. Tada $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots + a_{2025} - a_{2026} =$

A) 0 B) 2026 C) -2026 D) 22 E) -22

29. Lentelę sudaro 4×4 langelių, nuspalvintų kaip parodyta paveikslėlyje. Vienu ėjimu leidžiama pasirinkti bet kurį 2×2 kvadratą ir kiekvieno iš keturių langelių spalvą pakeisti priešinga. Kiek mažiausiai ėjimų prireiks, kad visi 16 langelių taptų balti?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 16 E) To neįmanoma padaryti



30. Kiekvienam skaičiui $x > 0$ apibrėžkime jo *trikampę šaknį* $\sqrt[3]{x}$ kaip tokį skaičių $s > 0$, kad $\frac{s(s+1)}{2} = x$. Tada kiekvienam skaičiui $x > 0$ skaičius $\sqrt[3]{4x} - \sqrt[3]{x}$ lygus

A) $2\sqrt[3]{x}$ B) $4\sqrt[3]{x} - 1$ C) $3\sqrt[3]{x}$ D) $\sqrt[3]{x^2 + x}$ E) $3\sqrt[3]{x^2} - 1$

Senjoro užduočių sprendimai

1. **C** 9

? Egzistuoja lygiašonis trikampis, kurio pagrindo ilgis 1, o šoninių kraštinių ilgis 9. Iš tiesų, vienetinės atkarpos vidurio taškas nuo jos galų nutolęs per $\frac{1}{2}$. Šiam taškui judant atkarpos vidurio statmeniu, gaunami lygiašoniai trikampiai (pagrindas ir viršūnė – nagrinėjami atkarpa ir taškas), kurių šoninių kraštinių ilgis tolygiai didėja nuo $\frac{1}{2}$ iki begalybės, tad įgyja ir reikšmę 9.

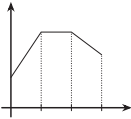
Nustatę tinkamą trikampį, renkamės atsakymą **C**.

! Duotojo trikampio kraštinių ilgiams 1, 9, x galioja trikampio nelygybės:

$$9 < 1 + x, \quad x < 1 + 9, \quad 1 < 9 + x.$$

Iš pirmųjų dviejų nelygybių gauname, kad $8 < x < 10$. Skaičius x sveikasis, tad $x = 9$.

2. **B**

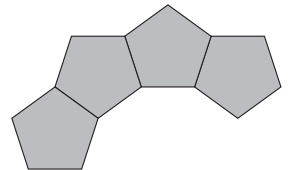


! Grafiko taškas (x, y) parodo, kad esant bėgimo laikui x Ugniaus širdies ritmas buvo y . Čia y yra grafiko taško aukštis virš horizontalios laiko ašies taško x . Širdies ritmui kiekviename iš trijų bėgimo laiko intervalų kintant tolygiai, grafiką sudaro trys tiesių atkarpos.

Teisingas grafikas pirmajame laiko intervale $[0 \text{ min}; 10 \text{ min}]$ pakyla per $4 \cdot 10 = 40$ (dūžių per minutę). Toliau, širdies ritmui nekintant, grafikas lieka tame pačiame aukštyje (horizontalus). O trečiajame intervale $[20 \text{ min}; 30 \text{ min}]$ grafikas nusileidžia, bet tik per $2 \cdot 10 = 20$, o ne 40. Taigi trečioji grafiko atkarpa gulstesnė nei pirmoji, o dešinysis grafiko galas yra aukščiau nei kairysis. Toks yra grafikas **B**.

3. **A** 10

? Galima nuspėti, kad reikiamu būdu pridėjus vieną penkiakampį paveikslėlio dešinėje, gaunama figūra, turinti vertikalią simetrijos ašį, o dviejų apatinių penkiakampių apatinės kraštinės bus vienoje horizontalioje tiesėje l . Tada simetriškai atvaizdavus šią penkių penkiakampių figūrą tiesės l atžvilgiu, gaunamas „žiedas“, kurį sudaro 10 penkiakampių.



Renkamės atsakymą **A**.

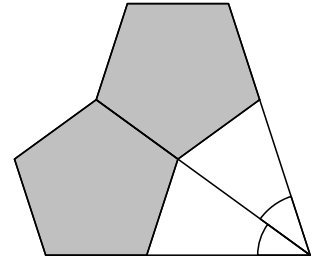
! Taisyklingojo penkiakampio kampų suma lygi $180^\circ \cdot (5 - 2) = 540^\circ$, o kiekvienas kampas α lygus $540^\circ : 5 = 108^\circ$.

Tarkime, kad n penkiakampių sudaro „žiedą“. Tada „skylė“ jo viduje yra n -kampis, kurio kiekvienas kampas lygus $360^\circ - 2\alpha = 144^\circ$. Šių kampų sumą galima užrašyti dviem būdais:

$$144^\circ \cdot n = 180^\circ \cdot (n - 2), \quad 144^\circ \cdot n = 180^\circ \cdot n - 360^\circ, \quad 360^\circ = (180^\circ - 144^\circ) \cdot n = 36^\circ \cdot n.$$

Vadinasi, $n = 360^\circ : 36^\circ = 10$.

!! Kiekvieną penkiakampį papildykime trikampiu, kaip parodyta paveikslėlyje (pratęsdami dvi jo kraštines į „žiedo“ vidų). Taisyklinių penkiakampių kampai lygūs 108° (žr. ! dalį). Todėl trikampiai turi po du kampus, lygius $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$, bei yra lygiašoniai. Be to, penkiakampiai lygūs (kitais jų nebūtų galima suglausti kraštinėmis), tad lygūs ir iš jų gaunami trikampiai. Suglaudžiant penkiakampius, tokie trikampiai susiglaus taip, kad jų kraštinės sutaptų ir jie visi turėtų bendrą viršūnę.



Pažymėtieji trikampių kampai (žr. pav.) lygūs $180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$. Dešimt tokių kampų (su bendra viršūne) sudarys pilnąją kampą, o dešimt atitinkamų baltųjų trikampių – taisyklų 10-kampį. Prie devintojo trikampio priglaustas dešimtas priglunda ir prie pirmojo, o tada ir dešimtas penkiakampis – prie pirmojo penkiakampio, taip susidarant „žiedui“. Vadinasi, „žiedą“ sudaro 10 penkiakampių.

4. **(E)** 2^{12}

? Pakanka pastebėti, kad $(2 + 2)^{6-0} = (2^2)^6 = 2^{2 \cdot 6} = 2^{12}$. Tarp duotųjų atsakymų didesnio nei **(E)** 2^{12} nėra, todėl renkamės atsakymą **E**.

! Užbaikime ? dalies sprendimą – įsitikinkime, kad duotojo reiškinio reikšmė ne didesnė nei 2^{12} .

Suma reiškinio skliaustuose gali būti lygi $2 + 2 = 4$, $2 + 6 = 8$, $2 + 0 = 2$ arba $6 + 0 = 6$. Pirmuoju atveju didesnis tas iš dviejų skaičių 4^{6-0} ir 4^{0-6} , kurio laipsnio rodiklis didesnis, t. y. skaičius $4^{6-0} = 2^{12}$. Likusiais trimis atvejais reiškinio reikšmė atitinkamai yra ne didesnė nei

$$8^{2-0} = (2^3)^2 = 2^6 < 2^{12}, \quad 2^{6-2} = 2^4 < 2^{12}, \quad 6^{2-2} = 1 < 2^{12}.$$

Vadinasi, 2^{12} iš tiesų yra didžiausia galima duotojo reiškinio reikšmė.

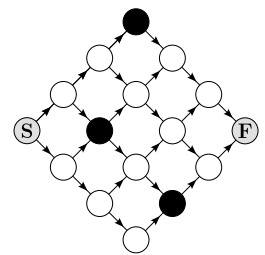
5. **(A)** 5

! Paveikslėlyje akmenys, esantys tarp S ir F, sudaro 5 vertikalias eiles. Akmenį, kuris paveikslėlyje yra b -tasis (nuo viršaus) a -tojoje (iš kairės) eilėje, žymėsime (a, b) . Pirmuoju šuoliu Lara nušoks ant $(1, 1)$ arba $(1, 2)$. Taigi turime du atvejus.

Iš $(1, 1)$ Lara būtinai nušoks ant $(2, 1)$ ir $(3, 2)$, o tada turės du galimus šuolius: ant $(4, 1)$ ir $(4, 2)$. Iš $(4, 1)$ į F tėra vienintelis kelias per $(5, 1)$, o iš $(4, 2)$ – du keliai: per $(5, 1)$ arba $(5, 2)$. Šiuo atveju gauname tris kelius.

Iš $(1, 2)$ Lara būtinai nušoks ant $(2, 3)$, $(3, 3)$ ir $(4, 2)$. Iš $(2, 3)$ ji nenušoks ant $(3, 4)$, nes atsidurtų aklavietėje. Iš $(4, 2)$ į F Larai yra du keliai: per $(5, 1)$ arba $(5, 2)$. Taigi šiuo atveju gauname du kelius.

Vadinasi, Lara iš viso turi $3 + 2 = 5$ kelius nuo S iki F.

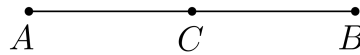


6. **(B)** 7,20 Eur

! Miglė du kartus perka tris poras kojinių. Viena iš dviejų trejetų bus pigiausia iš 6 porų už 2,90 Eur – ją Miglė neišvengiamai gaus nemokamai. Kito trejeto pigiausia kojinių pora negali kainuoti 4,90 arba 4,60 Eur: šios kojinių poros gali būti tik brangiausios arba antros pagal brangumą. Todėl, pirkdama kitą kojinių porų trejetą, Miglė gali sutaupyti ne daugiau nei 4,30 Eur, o iš viso – ne daugiau nei $2,90 + 4,30 = 7,20$ Eur. Kita vertus, nemokamai gautos kojinių gali kainuoti 7,20 Eur, jei Miglė atskirai pirs tris pigiausias ir tris brangiausias kojinių poras. Vadinasi, 7,20 Eur ir yra didžiausia galima Miglės nemokamai gausimų kojinių kaina.

7. **C** $\frac{1}{2}$

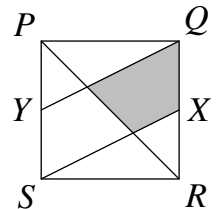
! Atkarpos AB vidurio tašką pažymėkime C . Jis bus atkarpoje PQ dviem atvejais: (i) jei P bus atkarpoje AC , o Q atkarpoje CB ; (ii) jei Q bus atkarpoje AC , o P atkarpoje CB . Nagrinėkime atvejį (i). Kadangi $AC = CB$, tai P bus atkarpoje AC su tikimybe $\frac{1}{2}$, ir analogiškai Q bus atkarpoje CB su tikimybe $\frac{1}{2}$. Taškai P ir Q pasirenkami nepriklausomai vienas nuo kito, tad atvejo (i) tikimybė lygi $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Analogiškai tokia yra ir atvejo (ii) tikimybė. Abu atvejus turėti vienu metu neįmanoma, todėl C bus atkarpoje PQ su tikimybe $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.



Pastebėkime, kad čia baigčių aibė begalinė (be galo daug būdų pasirinkti P ir Q). Taigi čia netinka klasikinis tikimybės apibrėžimas (baigtinės vienodai galimų baigčių aibės atvejis). Tačiau galioja kitas natūralus dėsnis, kurį neučia pritaikėme sprendime: atsitiktinai pasirinktas atkarpos taškas atsidurs jos poaibyje U su tikimybe p , parodančia, kokią atkarpos dalį sudaro poaibis U (pagal ilgį). Kai atskiru atveju U yra pusė atkarpos, tai $p = \frac{1}{2}$.

8. **D** $\frac{1}{4}$

? Galima nuspėti, kad kvadratas $PQRS$ sudaromas iš keturių trikampių, lygių $\triangle PQY = \triangle RSX$. Taigi šie du trikampiai sudaro po ketvirtadalį kvadrato (pagal plotą), o kartu paimti – pusę kvadrato. Galima nuspėti, kad atkarpa PR likusią pusę kvadrato – keturkampį $QXSY$ – dalija pusiau. Vadinasi, nuspalvintoji sritis sudaro pusę pusės kvadrato, taigi $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ kvadrato.



! Pažymėkime $a = PS = QR$. Tada $QX = SY = \frac{a}{2}$. Keturkampis $QXSY$ yra lygiagretainis (kraštinės QX bei SY lygios ir lygiagrečios). Jo plotas $QX \cdot SR = \frac{a}{2} \cdot a$ lygus pusei kvadrato $PQRS$ ploto $S = a^2$. Duotoji figūra su visomis savo atkarpomis yra simetriška kvadrato centro atžvilgiu, nes tokie yra taškai P ir R , taškai Q ir S , taškai X ir Y . Dėl simetrijos atkarpa PR lygiagretainį $QXSY$ dalija į dvi lygias dalis, o nuspalvintos srities plotas lygus $\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{1}{4} \cdot S$.

9. **C** 3

! Jei yra x kambarių po 4 žmones, tai yra $9 - x$ kambarių po 3 žmones. Tada

$$30 = 4x + 3(9 - x) = 27 + x, \quad x = 3.$$

!! Visuose devyniuose kambariuose apsigyveno po 3 žmones, o kai kuriuose iš jų – dar po vieną. Tokių papildomų žmonių, taigi ir kambarių po 4 žmones, yra $30 - 9 \cdot 3 = 3$.

10. **E** 16

? Pirmasis skaičiaus $\overline{ABC}$ skaitmuo A nelygus 0. Taip pat $C \neq 0$ (dalyba iš 0 negalima).

Skaičius A galėtų būti (vienženklis) sveikasis skaičiaus kvadratas. Taigi tikrinkime galimybes $A = 1, 4$ ir 9 . Atitinkamai $B = C$, $B = 2C$ ir $B = 3C$. Tikrindami galimas C reikšmes, pirmuoju atveju gauname 9 tinkamus triženklus skaičius 111, 122, 133, ..., 199, antruoju – 4 tokius skaičius 421, 442, 463, 484, o trečiuoju – 3 tokius skaičius 931, 962, 993. Jau turime $9 + 4 + 3 = 16$ tinkamų skaičių. Tarp duotųjų atsakymų nėra didesnio už **E**) 16, tad renkamės šį atsakymą.

! Skaičių $\frac{B}{C}$ galima užrašyti nesuprastinama trupmena $\frac{m}{n}$. Tada trupmena $\frac{m^2}{n^2}$ taip pat nesuprastinama: jei $\text{DBD}(m, n) = 1$, tai ir $\text{DBD}(m^2, n^2) = 1$. Jei $n > 1$, tai skaičius $A = \frac{m^2}{n^2}$ nėra sveikasis. Taigi $n = 1$, o $A = m^2$ yra vienženklis sveikąjo skaičiaus kvadratas. Sprendimą galime užbaigti kaip ? dalyje.

11. (E) Kitas atsakymas

! Skaičių $\underbrace{333 \dots 3}_{2026} = \underbrace{33 + 3300 + 330000 + \dots}_{1013 \text{ dėmenų}}$ padaliję iš 33, gauname dalmenį

$$\underbrace{1 + 100 + 10000 + \dots}_{1013 \text{ dėmenų}} = \underbrace{10101 \dots 0101}_{1013 \text{ vienetų}},$$

kurio skaitmenų suma lygi $1 + 1 + \dots + 1 = 1013$.

12. (B) 7

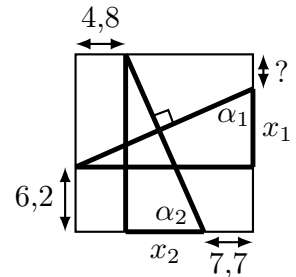
! Įrašytuosius skaičius pažymėkime taip:

x	2	y	z	t	u	5
-----	---	-----	-----	-----	-----	---

Dviejų gretimų skaičių sumos yra nelyginės. Todėl nelyginiai ir lyginiai skaičiai eina pakaitomis: skaičiai x, y, t (kartu su skaičiumi 5) yra nelyginiai – lygūs 1, 3 ir 7, o skaičiai z ir u lyginiai – lygūs 4 ir 6. Suma $x + 2 + y$ nesidalija iš 3, todėl galėtų tikt tik $(x, y) = (1, 7)$ ir $(x, y) = (7, 1)$. Abiem atvejais $t = 3$. Kadangi suma $t + u + 5 = 8 + u$ nesidalija iš 3, tai $u \neq 4$. Taigi $u = 6$ ir $z = 4$, o ieškoma suma $z + t$ lygi $4 + 3 = 7$. (Pastebėkime, kad gautosios reikšmės $(z, t, u) = (4, 3, 6)$ tenkina uždavinio sąlygą tiek su $(x, y) = (1, 7)$, tiek su $(x, y) = (7, 1)$.)

13. (D) 6,3

! Paveikslėlyje paryškinti du statieji trikampiai. Vieno iš jų kraštinės, sudarančias kampą α_1 , pasukus 90° kampu, jos tampa lygiagrečios su kito trikampio kraštinėmis, sudarančiomis kampą α_2 . Kampas tarp pasuktų atkarpų nepakinta: $\alpha_1 = \alpha_2$. Taigi šie statieji trikampiai yra panašieji. Jie turi po atitinkamą statinį, lygų kvadrato kraštinei, tad yra lygūs bei turi lygius trumpesnius statinius: $x_1 = x_2$. Kvadrato kraštinės ilgis lygus atstumui tarp kvadrato horizontalių kraštinių $6,2 + x_1 + ?$ ir atstumui tarp jo vertikalinių kraštinių $4,8 + x_2 + 7,7$. Vadinasi, $6,2 + ? = 4,8 + 7,7$ ir $? = 6,3$.



14. (D) 11

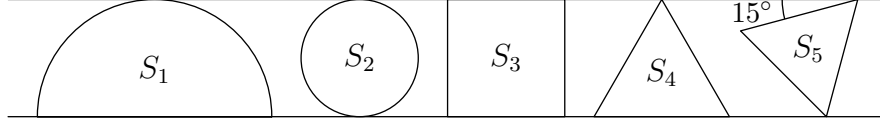
! Pastebėkime, kad bokšto aukštis (cm) gali būti $12 = 4 + 4 + 4$, $13 = 4 + 4 + 5$, $14 = 4 + 5 + 5$, $15 = 5 + 5 + 5$. Ant tokių bokštų dedant 4 cm aukščio kubelius, gaunami ir visi didesni sveikieji aukščiai: kiekviename iš ketvertų (16, 17, 18, 19), (20, 21, 22, 23), ... keturi aukščiai gaunami, papildant bokštą, kurio aukštis yra atitinkamai 12, 13, 14, 15 (cm).

Kita vertus, niekaip negausime 11 cm bokšto. Jo nesudėsime, naudodami vien 4 cm aukščio kubelius, nes 11 nesidalija iš 4. Tačiau panaudoję bent vieną 5 cm aukščio kubelį, o po to jį iš bokšto pašalinę, turėtume gauti 6 cm bokštą. Tokiam aukščiui pasiekti bet kokių dviejų kubelių jau per daug, o bet kokio vieno – per mažai.

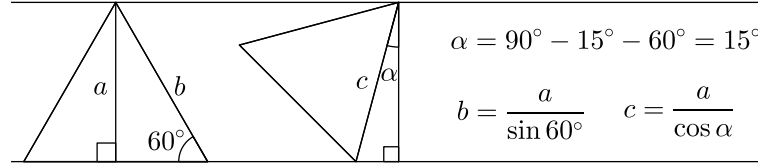
Vadinasi, didžiausias nepasiekiamas sveikasis bokšto aukštis (cm) yra 11.

15. (C) $S_1 > S_3 > S_2 > S_4 > S_5$

! Atstumą tarp lygiagrečių tiesių pažymėkime a . Tada pusskritulio spindulio ilgis lygus a , ir $S_1 = \frac{\pi a^2}{2}$. Skritulio skersmens ilgis lygus a , tad spindulio ilgis lygus $\frac{a}{2}$. Tada $S_2 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$. Kvadrato kraštinės ilgis lygus a , tad $S_3 = a^2$. Kadangi $\pi \approx 3,14$, tai $\frac{\pi}{2} > 1 > \frac{\pi}{4}$ ir $S_1 > S_3 > S_2$.



Kairiojo lygiakraščio trikampio aukštinės ilgis lygus a , tad kraštinės ilgis lygus $\frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ (žr. pav. apačioje). Tada $S_4 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{3}$. Kadangi $\frac{\pi}{4} > \frac{3}{4} > \frac{2}{3} > \frac{\sqrt{3}}{3}$, tai $S_2 > S_4$. Pagaliau $S_4 > S_5$: lygiakraščiai trikampiai yra panašieji, o dešiniojo iš jų kraštinė trumpesnė nei kairiojo, taigi ir plotas mažesnis. Tai galima nustatyti tiksliai (žr. pav. apačioje), bet pakanka nuspėti: lygiagrečias tieses jungianti dešiniojo trikampio kraštinė statesnė nei kairiojo, o kuo tokia atkarpa gultesnė, tuo ilgesnė.



Vadinasi, $S_1 > S_3 > S_2 > S_4 > S_5$.

16. (D) $\frac{7}{36}$

! Tarkime, kad pirmą kartą kauliukas atvirsta a akučių, o antrą kartą b akučių. Visas baigtis nusako poros (a, b) . Čia a ir b gali įgyti po 6 reikšmes, tad turime $6 \cdot 6 = 36$ (vienodai galimas) baigtis. Turime suskaičiuoti, kelios iš jų palankios įvykiui, kad ab dalijasi iš 4 ir iš 6.

Tarkime, kad ab dalijasi iš 4 ir iš 6. Tada ši sandauga, o tuo pačiu ir bent vienas dauginamasis dalijasi iš 3. Taigi bent vienas iš skaičių a arba b turi būti 3 arba 6. Jei tai 3, tai kitas skaičius tegali būti 4. Jei tai 6, tai kitas skaičius tegali būti 2, 4 arba 6. Gauname iš viso 7 palankias baigtis $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(6, 6)$, $(u, 6)$ ir $(6, u)$, kur $u = 2$ arba 4.

Ieškoma tikimybė lygi palankių ir visų baigčių skaičių santykiui $\frac{7}{36}$.

17. (A) $\frac{1}{2}$

! Pastebėkime, kad $a \neq 0$, $b \neq 0$. Kadangi $9^a = 99^2$, tai

$$9 = (99^2)^{\frac{1}{a}} = 99^{\frac{2}{a}}, \quad \text{analogiškai} \quad 11 = 99^{\frac{2}{b}}.$$

$$\text{Vadinasi, } 99 = 9 \cdot 11 = 99^{\frac{2}{a}} \cdot 99^{\frac{2}{b}} = 99^{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}}, \quad 1 = \frac{2}{a} + \frac{2}{b} = 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right), \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}.$$

!! Pastebėkime, kad $a \neq 0$, $b \neq 0$. Kadangi $9^a = 99^2$, tai

$$2 = \log_{99} 99^2 = \log_{99} 9^a = a \log_{99} 9, \quad \text{analogiškai} \quad 2 = b \log_{99} 11.$$

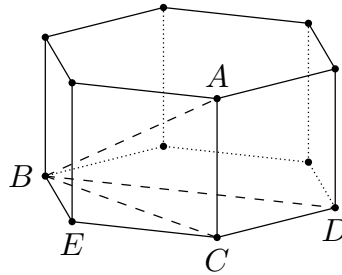
$$\text{Vadinasi, } 1 = \log_{99} (9 \cdot 11) = \log_{99} 9 + \log_{99} 11 = \frac{2}{a} + \frac{2}{b} = 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right), \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}.$$

18. © $\sqrt{4}$

? Pažymėkime taškus, kaip parodyta paveikslėlyje.

Galima nuspėti, kad trikampiai ABC ir DBC yra statieji: taisyklingosios prizmės šoninės briaunos statmenos pagrindui, o šis pagrindas yra taisyklingasis šešiakampis, ir jo priešingos kraštinės yra kartu stačiakampio kraštinės. Be to, trikampiai ABC ir DBC turi lygius statinius: BC bendras, $AC = DC = 1$. Taigi šie trikampiai lygūs, ir $AB = DB$.

Prizmės apatinis pagrindas yra taisyklingasis šešiakampis, taigi įbrėžtinis. Atitinkamo apskritimo centrą sujungus su šešiakampio viršūnėmis, šis padalijamas į lygiakraščius trikampius, kurių kraštinės ilgis 1. Galima nuspėti, kad atkarpa DB yra apskritimo skersmuo, kurį sudaro dvi lygiakraščių trikampių kraštinės. Vadinasi, $AB = DB = 1 + 1 = 2 = \sqrt{4}$.



! Pažymėkime taškus, kaip parodyta paveikslėlyje.

Prizmės apatinis pagrindas yra taisyklingasis šešiakampis. Taigi jo kampų suma lygi $180^\circ \cdot (6 - 2) = 180^\circ \cdot 4$, o kiekvienas kampas lygus $180^\circ \cdot 4 : 6 = 30^\circ \cdot 4 = 120^\circ$. Todėl $\angle BEC = 120^\circ$, o likę du lygiašonio $\triangle BCE$ ($BE = CE$) kampai lygūs $(180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$. Pagal sinusų teoremą,

$$\frac{BC}{\sin 120^\circ} = \frac{BE}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, \quad BC = 2 \sin 120^\circ = 2 \sin 60^\circ = \sqrt{3}.$$

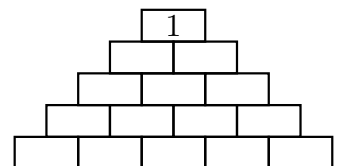
Trikampis ABC yra statusis (taisyklingosios prizmės šoninės briaunos statmenos pagrindui). Pagal Pitagoro teoremą,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4, \quad AB = \sqrt{4}.$$

19. (B) 16

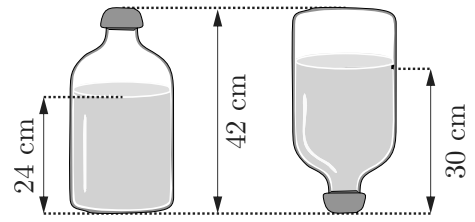
! „Piramidės“ apatinės eilės skaičius iš eilės pažymėję a, b, c, d, e , antrojoje (nuo apačios) eilėje gauname ab, bc, cd, de , trečiojoje $ab^2c = ac, bc^2d = bd, cd^2e = ce$, ketvirtojoje $abcd, bcde$, o viršuje – skaičių $ab^2c^2d^2e = ae$. Turime nustatyti, keliais būdais galima pasirinkti a, b, c, d, e , kad gautume $ae = 1$. Skaičiams a, b, c, d reikšmės 1 ir -1 galima priskirti bet kaip (turime po 2 galimybes), tada $e = a$ (vienintelė galimybė). Gauname iš viso $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ galimybių.

!! „Piramidėje“ skaičius galima įrašinėti ne nuo apačios, bet užpildant 4 tuščias eiles nuo viršaus, kaskart rašant skaičius iš kairės į dešinę. Kiekvienos eilės kairiausiam skaičiui galima laisvai priskirti reikšmę 1 arba -1 (yra po 2 galimybes). Kaskart likę tos eilės skaičiai vienas po kito nustatomi vienareikšmiškai, remiantis dviem jau įrašytais (viršuje ir kairėje) skaičiais. Gauname iš viso $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ galimybių.



20. (D) 3

! Jei butelio pagrindo plotas yra $S \text{ cm}^2$, tai paveikslėlio kairėje vandens ritinio tūris lygus $24S \text{ cm}^3$. Skaičiaus S nustatyti nebūtina. Pastebėkime, kad paveikslėlio dešinėje bevandenė butelio dalis, kurios aukštis yra $42 - 30 = 12 \text{ cm}$, taip pat yra ritinio formos, o jos tūris lygus $12S \text{ cm}^3$. Taigi butelio tūrį sudaro $24S \text{ cm}^3$ (vanduo) ir $12S \text{ cm}^3$ (likusi tūrio dalis). Šių dviejų tūrio dalių santykis yra $2 : 1$, t. y. vanduo butelyje užima 2 iš $2 + 1 = 3$ tūrio 4,5 l dalių. Gauname $\frac{2}{3} \cdot 4,5 = 3$ litrus vandens.



21. (C) 811

! Nagrinėkime užrašytųjų skaičių sumą. Lentoje po kiekvieno Godos ėjimo vienu skaičiumi sumažėja, o visų skaičių suma kaskart sumažėja 1, tik kas septintą ėjimą ji padidėja 5. Kiekvienus 7 ėjimus skaičių lentoje suma padidėja per $-1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 5 = -1$, t. y. sumažėja 1. Per $35 = 7 \cdot 5$ ėjimus suma sumažėja per 5. Po 35-ojo ypatingo (kai suma padidėja 5) ėjimo, vėl kiekvienu ėjimu suma kaskart mažėja 1, taigi per likusius 4 ėjimus sumažėja 4, o per visus 39 ėjimus sumažėja $5 + 4 = 9$. Po 39 ėjimų lentoje lieka vienas skaičius. Sumoje jis – vienintelis dėmuo, tad ir yra lygus pradinių skaičių 1, 2, ..., 40 sumai, sumažėjusiai 9. Šį paskutinį likusį skaičių gausime, pritaikę aritmetinės progresijos sumos formulę:

$$1 + 2 + \dots + 40 - 9 = \frac{1 + 40}{2} \cdot 40 - 9 = 41 \cdot 20 - 9 = 820 - 9 = 811.$$

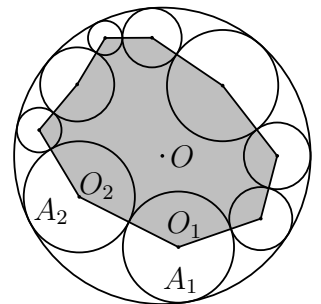
22. (D) $180 - 2d$

! Mažųjų apskritimų centrus iš eilės ratu pažymėkime $O_1, O_2, \dots, O_9$, spindulio ilgius – atitinkamai $r_1, r_2, \dots, r_9$, o lietimosi su didžiuoju apskritimu taškus – atitinkamai $A_1, A_2, \dots, A_9$. Didžiojo apskritimo centrą ir spindulio ilgį atitinkamai pažymėkime O ir R . Čia $R = 10$.

Jei du apskritimai liečiasi, tai lietimosi taške turi bendrą liestinę (nesvarbu ar šie apskritimai yra vienas kito išorėje, ar vienas yra kito viduje). Į lietimosi tašką išvesti apskritimų spinduliai yra statmeni šiai liestinei, todėl abu yra tiesėje, jungiančioje apskritimų centrus.

Pavyzdžiui, taškai O, O_1 ir A_1 yra vienoje tiesėje, ir $R = OA_1 = OO_1 + O_1A_1 = OO_1 + r_1$. Taigi $r_1 = R - OO_1$ ir analogiškai $r_i = R - OO_i$, kai $i = 2, 3, \dots, 9$. (Norint pasirinkti atsakymą, šiuos atkarpų ilgių sąryšius pakanka nuspėti.) Apskritimų centrai O_1 ir O_2 taip pat yra vienoje tiesėje su šių apskritimų lietimosi tašku, ir $O_1O_2 = r_1 + r_2$. Analogiškai $O_2O_3 = r_2 + r_3$, ir t. t. Kadangi $d = OO_1 + OO_2 + \dots + OO_9$, tai nuspalvinto daugiakampio perimetras lygus

$$\begin{aligned} O_1O_2 + O_2O_3 + \dots + O_8O_9 + O_9O_1 &= (r_1 + r_2) + (r_2 + r_3) + \dots + (r_8 + r_9) + (r_9 + r_1) = \\ &= 2r_1 + 2r_2 + \dots + 2r_9 = 2(R - OO_1) + 2(R - OO_2) + \dots + 2(R - OO_9) = \\ &= 18R - 2(OO_1 + OO_2 + \dots + OO_9) = 180 - 2d. \end{aligned}$$



23. (A) 10

! Skaičius $6^{70} = 2^{70} \cdot 3^{70}$ dalijasi iš 3^{70} , bet ne iš 3^{71} . Kita vertus, tai 100 skaičių sandauga, kurioje kai kurie dauginamieji lygūs 3 arba $6 = 2 \cdot 3$, o likę dauginamieji nesidalija iš 3. Todėl šioje sandaugoje yra lygiai 70 dauginamųjų, lygių 3 arba 6. Likę 30 dauginamųjų lygūs 1, 2 arba 4 (bet ne 5, nes 6^{70} iš 5 nesidalija). Šių 30 skaičių sandauga galėtų dalytis iš $4^{30} = 2^{60}$, bet ne iš 2^{61} . Visų 100 skaičių sandauga dalijasi iš $2^{70} = 2^{60} \cdot 2^{10}$. Todėl akučių skaičių, lygių 3 arba $6 = 2 \cdot 3$, sandauga dalijasi bent iš 2^{10} . Vadinasi, tarp jų yra bent 10 skaičių, lygių 6.

Kita vertus, kauliukas galėjo atvirsti 6 akutėmis tik 10 kartų. Tada 3 akutėmis jis atvirto $70 - 10 = 60$ kartų. Jei likusius 30 kartų atvirto 4 akutėmis, tai gauname 30 sandaugų $3 \cdot 3 \cdot 4 = 6^2$ ir dar 10 šešetų, taigi bendrą sandaugą $(6^2)^{30} \cdot 6^{10} = 6^{70}$.

Vadinasi, ieškomas mažiausias atvirimų 6 akutėmis skaičius lygus 10.

24. (B) 11

! Tarkime, kad Arnas užrašė 24 skaičius $n, n+1, \dots, n+23$. Turime nustatyti n , kai

$$n + (n+1) + \dots + (n+14) = (n+15) + (n+16) + \dots + (n+23).$$

Abiejose lygybės pusėse galėtume pritaikyti aritmetinės progresijos sumos formulę, tada išspręsti gautąją kvadratinę lygtį. Tačiau lygybę galime kiek supaprastinti, 9 skaičius iš jos kairiosios pusės perkeldami į dešiniąją. Tada kairiojoje pusėje lieka $15 - 9 = 6$ nariai:

$$\begin{aligned} n + (n+1) + \dots + (n+5) &= \\ &= ((n+15) - (n+6)) + ((n+16) - (n+7)) + \dots + ((n+23) - (n+14)) = \\ &= 9 + 9 + \dots + 9 = 9 \cdot 9 = 81. \end{aligned}$$

Gauname sumą $81 = n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) + (n+5) = 6n + 15$. Vadinasi, $6n = 66$ ir $n = 11$.

25. (B) 1 : 4

! Kiekvieno $\triangle XYZ$ plotą žymėsime S_{XYZ} . Pažymėkime $S = S_{ABC} = S_{BDE} = S_{DFG}$.

Trikampis ADE turi bendrą aukštinę su $\triangle BDE$, nuleistą į kraštinę, kurios ilgis $AD = 2BD$. Todėl $S_{ADE} = 2S_{BDE} = 2S$. Analogiškai $S_{AFG} = 3S$.

Galima pastebėti keletą panašiųjų trikampių. Pavyzdžiui, $\triangle ABH \sim \triangle ADE$ (vienas kampas bendras, $\angle ABH = 60^\circ = \angle ADE$). Remiantis panašumo koeficientu $AB : AD = 1 : 2$,

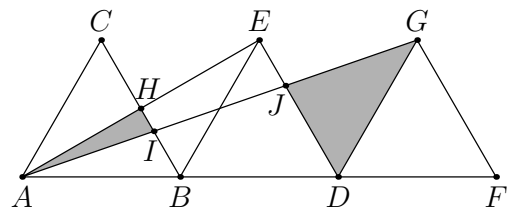
$$S_{ABH} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 S_{ADE} = \frac{1}{4} \cdot 2S = \frac{1}{2}S.$$

Analogiškai pastebėkime, kad $\triangle ABI \sim \triangle ADJ \sim \triangle AFG$ ir $AB : AD : AF = 1 : 2 : 3$. Taigi

$$S_{ABI} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 S_{AFG} = \frac{1}{9} \cdot 3S = \frac{1}{3}S, \quad S_1 = S_{AHI} = S_{ABH} - S_{ABI} = \frac{1}{2}S - \frac{1}{3}S = \frac{1}{6}S;$$

$$S_{ADJ} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 S_{AFG} = \frac{4}{9} \cdot 3S = \frac{4}{3}S, \quad S_2 = S_{DGJ} = S_{AFG} - S_{ADJ} - S_{DFG} = 3S - \frac{4}{3}S - S = \frac{2}{3}S;$$

$$S_1 : S_2 = \frac{1}{6} : \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} = 1 : 4.$$



26. **D** −9

! Lygybėje $f(6 - x) = -f(x)$ imkime tokį x , kad $6 - x = x$, taigi $x = 3$. Tai leidžia iš karto gauti vieną funkcijos f reikšmę:

$$f(6 - 3) = -f(3), \quad f(3) = -f(3), \quad 2f(3) = 0, \quad f(3) = 0.$$

Tada $f(13) = f(3 + 10) = f(3) = 0$.

Liko nustatyti $f(9)$. Šią funkcijos reikšmę galima susieti su $f(-3)$:

$$f(9) = f(6 - (-3)) = -f(-3).$$

Lygybė $f(x + 10) = f(x)$ reiškia, kad funkcija f yra periodinė: bet kiek kartų pridėjus arba atėmus 10 iš realiojo skaičiaus x_0 , funkcijos reikšmė $f(x_0)$ nepakinta. Taigi

$$f(-3) = f(-3 + 3 \cdot 10) = f(27) = 9,$$

$$f(9) + f(13) = -f(-3) + 0 = -9 + 0 = -9.$$

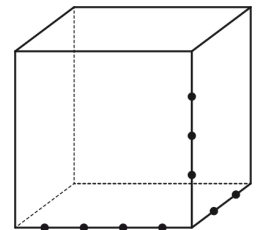
27. **E** 72

! Trikampę piramidę nusako keturi taškai – jos viršūnės. Jei jie būtų vienoje plokštumoje, tai piramidės, žinoma, negautume. Kita vertus, keturi taškai, nesantys vienoje plokštumoje, visada yra trikampės piramidės viršūnės. Iš tiesų, tada trys iš keturių taškų nėra vienoje tiesėje (kitai būtu vienoje plokštumoje su ketvirtuoju tašku), todėl nusako trikampį (piramidės pagrindą), o ketvirtasis taškas nėra šio trikampio plokštumoje, ir jį sujungus su likusiais trimis, gaunama piramidė.

Taigi turime nustatyti, keliais būdais galima pasirinkti 4 iš 9 taškų trijose kubo briaunose, kad jie nebūtų vienoje plokštumoje. Šie 4 taškai negali būti tik vienoje ar dviejose kubo briaunose, nes būtų vienos kubo sienos plokštumoje. Todėl tėra vienintelė galimybė: vienoje briaunoje pasirenkami du taškai, o kitose dviejose briaunose po vieną. Kita vertus, taip pasirinkus keturis taškus, jie nebus vienoje plokštumoje. Iš tiesų, priešingu atveju ta plokštuma eitų per kubo briauną su dviem pasirinktais taškais ir dar vieną pasirinktąjį tašką – taigi per atitinkamą kubo sieną ir neitų per ketvirtąjį pasirinktąjį tašką likusioje trečiojoje briaunoje su pažymėtais taškais.

Liko nustatyti, keliais būdais galima pasirinkti du duotuosius taškus vienoje kubo briaunoje ir po vieną – kitose dviejose. Yra trys galimybės:

- (i) briaunose atitinkamai pasirenkame du taškus iš 4 pažymėtųjų (6 būdai), vieną iš 3 ir vieną iš 2; gauname $6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ piramides;
- (ii) briaunose atitinkamai pasirenkame du taškus iš 3 pažymėtųjų (3 būdai), vieną iš 4 ir vieną iš 2; gauname $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ piramides;
- (iii) briaunose atitinkamai pasirenkame du taškus iš 2 pažymėtųjų (1 būdas), vieną iš 4 ir vieną iš 3; gauname $1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$ piramidžių.



Vadinasi, iš viso yra $36 + 24 + 12 = 72$ tinkamos trikampės piramidės.

28. (E) -22

! Nagrinėkime bet kokį natūralųjį skaičių n bei visus natūraliuosius skaičius tarp n^2 ir $(n+1)^2$. Turime $2n$ skaičių

$$n^2 + 1, \quad n^2 + 2, \quad \dots, \quad n^2 + 2n.$$

Jei i yra vienas iš jų, tai $n \leq \sqrt{i} < n+1$. Tada didžiausias natūralusis skaičius, ne didesnis už $\sqrt{i}$, yra $a_i = n$ (tai ne kas kita kaip $\sqrt{i}$ sveikoji dalis). Taip pat $a_{n^2} = n$. Vadinasi, jei duotajame reiškinyje $a_1 - a_2 + \dots - a_{2026}$ yra nariai a_{n^2} ir $a_{(n+1)^2}$, tai tarp jų esančius $2n$ narių galima visus poromis suprastinti pagal $\pm a_i \mp a_{i+1} = 0$. Be to, galime suprastinti $a_{2025} - a_{2026} = a_{45^2} - a_{45^2+1} = 45 - 45 = 0$. Lieka reiškinys

$$a_1 - a_4 + a_9 - a_{16} + \dots + a_{43^2} - a_{44^2} = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 43 - 44.$$

(Kaip buvo prieš prastinant, taip ir liko, kad su minusais yra tie a_i , kurių indeksas i lyginis.) Turime 44 narius, taigi 22 jų poras. Gauname tokią duotojo reiškinio reikšmę:

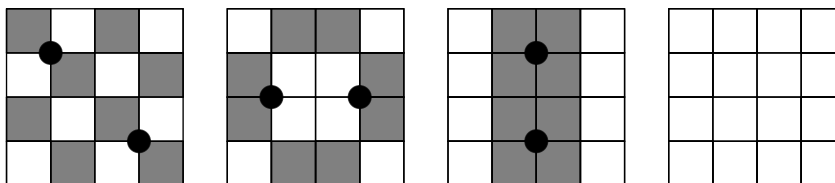
$$(1 - 2) + (3 - 4) + \dots + (43 - 44) = (-1) + (-1) + \dots + (-1) = -22.$$

29. (B) 6

! Yra devyni 2×2 kvadratai, kuriuos galime pasirinkti. Atkreipkime dėmesį, kad jų pasirinkimo tvarka nesvarbi: langelių galutinę spalvą lems tai, po kiek kartų jie buvo paveikti, o ne kuriuo metu tai įvyko. Be to, du kartus pasirinkti tą patį 2×2 kvadratą yra tas pats, kaip nepasirinkti jo nė karto. Mums rūpi mažiausias galimas ėjimų skaičius, todėl galime tarti, kad kiekvienas iš 9 kvadratų pasirinktas vieną arba nė vieno karto.

Pilkųjų langelių spalva turi pasikeisti nelyginį skaičių kartų, o baltųjų – lyginį. Kairysis viršutinis langelis pilkas ir turi būti bent kartą paveiktas. O tai galima padaryti, tik pasirinkus kairįjį viršutinį 2×2 kvadratą. Taigi šį kvadratą privalome pasirinkti. Tada viršutinėje eilutėje bus paveiktas ne tik pirmasis (iš kairės), bet ir antrasis langelis. Šis langelis baltas, todėl turi būti paveiktas ir antrą kartą. Tačiau be kairiojo viršutinio tėra tik dar vienas 2×2 kvadratas (esantis viršuje per vidurį), kurį galime tam panaudoti. Taigi ir šis kvadratas turi būti pasirinktas. Nagrinėdami antrąjį (nuo viršaus) langelį kairiajame stulpelyje, analogiškai gauname, kad būtina vieną kartą pasirinkti ir 2×2 kvadratą, esantį kairėje per vidurį. Pagaliau dėl kairiojo viršutinio ir dešiniojo apatinio lentelės kampų simetrijos galime būti tikri, kad turi būti pasirinkti dar trys 2×2 kvadratai (dešinysis apatinis, apačioje per vidurį, dešinėje per vidurį). Vadinasi, prireiks bent $3 + 3 = 6$ ėjimų, kad tinkamai pakeistume lentelę.

Patikrinkime, kaip pasikeis lentelė, atlikus jau nustatytus būtinus 6 ėjimus. Pasirenkamus kvadratus žymėkime juodais skrituliais:



Matome, kad 6 ėjimų pakanka. Taigi tai ir yra mažiausias galimas jų skaičius, norint lentelę padaryti visą baltą.

30. **(A)** $2 \sqrt[4]{x}$

? Pamėginkime nustatyti duotųjų reiškinių reikšmes konkrečiam $x > 0$. Pavyzdžiui, $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ ir $\frac{2 \cdot 3}{2} = 3$, todėl $\sqrt[4]{1} = 1$ ir $\sqrt[4]{3} = 2$. Taigi kai $x = 1$, tai $\sqrt[4]{4x - \sqrt[4]{x}} = \sqrt[4]{4 - 1} = 2$ ir

A) $2 \sqrt[4]{x} = 2$, **B)** $4 \sqrt[4]{x} - 1 = 3$, **C)** $3 \sqrt[4]{x} = 3$, **D)** $\sqrt[4]{x^2 + x} = \sqrt[4]{2}$, **E)** $3 \sqrt[4]{x^2} - 1 = 2$.

Galime atmesti atsakymus **B** ir **C**. Taip pat galime atmesti atsakymą **D**: jei $\sqrt[4]{2} = 2$, tai gauname klaidingą lygybę $\frac{2 \cdot 3}{2} = 2$.

Atsakymą **E** galima atmesti, pasirinkus kitą x reikšmę. Taip pat galima nujauti, kad kai skaičius $x > 0$ pakankamai mažas, tai skaičius $\sqrt[4]{x^2}$ yra per mažas: skaičius $3 \sqrt[4]{x^2} - 1$ gali būti neteigiamas, taigi nelygus trikampei šakniai $\sqrt[4]{4x - \sqrt[4]{x}}$, kuri teigiama pagal apibrėžimą.

Pavyzdžiui, imkime tokį $x > 0$, kad $x^2 = \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)}{2} = \frac{2}{9}$. Tada $3 \sqrt[4]{x^2} - 1 = 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 0$.

Renkamės atsakymą **A**.

?? Tegu $x > 0$. Mums rūpi skaičius $z = \sqrt[4]{4x - y}$, kur $y = \sqrt[4]{x}$, ir jo galimos išraiškos. Čia

$$\frac{y(y+1)}{2} = x, \quad 4x - y = 4 \cdot \frac{y(y+1)}{2} - y = 2y^2 + y = y(2y+1), \quad \frac{z(z+1)}{2} = y(2y+1).$$

Pastebėkime, kad $z(z+1) = 2y(2y+1)$. Galima nuspėti, kad $z = 2y = 2 \sqrt[4]{x}$.

! Nagrinėkime funkciją $f(s) = \frac{s(s+1)}{2}$, $s \in [0; +\infty)$. Čia $f(0) = 0$ ir $0 \leq f(s_1) < f(s_2)$, kai $0 \leq s_1 < s_2$. Ši funkcija tolydi: didėjant s nuo s_1 iki s_2 , ji įgyja ir visas reikšmes tarp $f(s_1)$ ir $f(s_2)$. Taigi, kai s didėja intervale $(0; +\infty)$, tai funkcija f taip pat didėja (iki $+\infty$) ir įgyja visas reikšmes intervale $(0; +\infty)$ po lygiai vieną kartą. Vadinasi, trikampė šaknis apibrėžta korektiškai: kiekvienam $x > 0$ egzistuoja lygiai vienas $s > 0$, kuriam $x = f(s)$. Tuo galima įsitikinti ir tiesiogiai nagrinėjant lygtį $\frac{s(s+1)}{2} = x$. Galima įrodyti, kad kiekvienam duotam $x > 0$ ji turi lygiai vieną teigiamą sprendinį s (lygų $\frac{\sqrt{8x+1}-1}{2}$).

Įsitikinę apibrėžimo korektiškumu, spręskime uždavinį kaip ?? dalyje. Atkreipkime dėmesį, kad kai $x > 0$, tai $y = \sqrt[4]{x} > 0$ ir $4x - y = y(2y+1) > 0$. Todėl skaičiaus $z = \sqrt[4]{4x - y}$ reikšmė apibrėžta kiekvienam $x > 0$. Jai galioja $z(z+1) = 2y(2y+1)$, taigi $f(z) = f(2y)$. Kadangi funkcija f intervale $(0; +\infty)$ įgyja reikšmę $f(z)$ vienintelį kartą, ir čia $z > 0$, $2y > 0$, tai $z = 2y$ kiekvienam $x > 0$, t. y. atsakymas **A** teisingas. Tai galima gauti, nesinaudojant f savybėmis:

$$z^2 + z = 4y^2 + 2y, \quad (z^2 - 4y^2) + (z - 2y) = 0, \quad (z - 2y)(z + 2y + 1) = 0.$$

Čia $z + 2y + 1 > 1 > 0$, todėl $z - 2y = 0$ ir $z = 2y$.

Atsakymų **B–E** klaidingumu įsitikinome ? dalyje.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	C
2	B
3	A
4	E
5	A
6	B
7	C
8	D
9	C
10	E
11	E
12	B
13	D
14	D
15	C
16	D
17	A
18	C
19	B
20	D
21	C
22	D
23	A
24	B
25	B
26	D
27	E
28	E
29	B
30	A