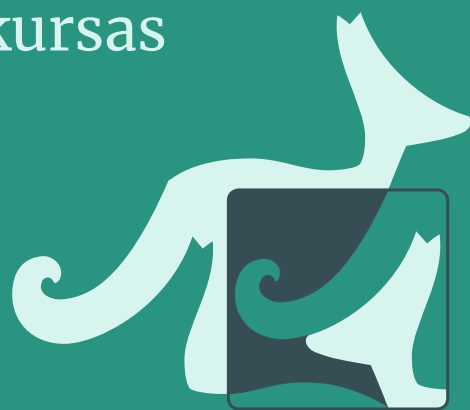


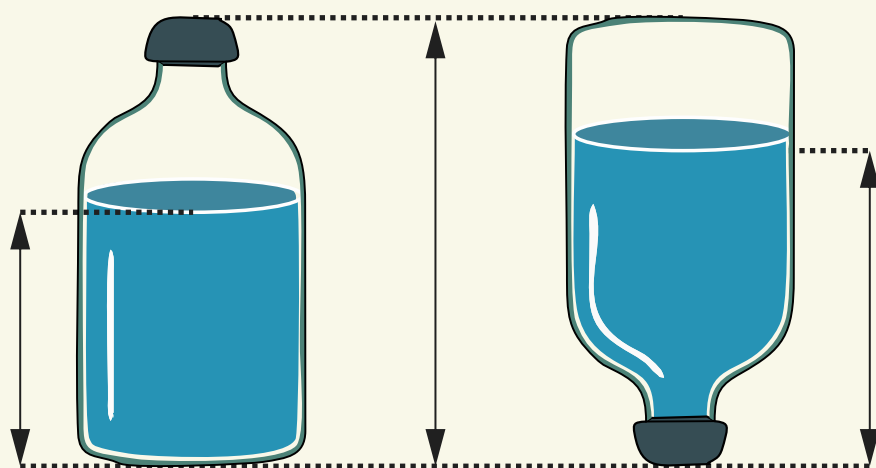
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA



Junioras

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI



KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA



KENGŪRA 2026. Junioras

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Turiny

Pratarmė	4
Sąlygos	6
Užduočių sprendimai	10
Atsakymai	21

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdienišku) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeįsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadyneje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos sprendamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 32800 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2026 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamas, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis sprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrantančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto rinktis labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atsuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai atečiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2026 metų kovo 19 dieną keliavo ir kuriuos gausiai sprendė 9–10 klasių (*Junioro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys patikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu !), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu ?). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų pateikiama daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais ??, !!, !!! ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

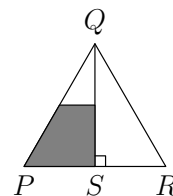
Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

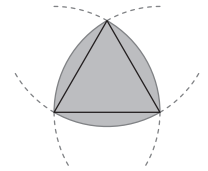
2026 m. *Junioro* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Kuris skaičius mažiausias?
A) $202 : 6$ B) $202,6$ C) $20 + 26$ D) $202 - 6$ E) $20 \cdot 26$
2. Džonis rašo datas formatu dd/mm/MMMM, pavyzdžiui, 19/03/2026. Šiandien Džonis pastebėjo, kad kartą datos, kai jis šventė gimtadienį, 8 skaitmenų seka buvo ta pati, datą skaitant tiek iš kairės į dešinę, tiek iš dešinės į kairę. Kurį mėnesį gimė Džonis?
A) Sausį B) Vasarį C) Rugsėjį D) Spalį E) Lapkritį
3. Urtė savo penkiems draugams išdaliavo 19 slyvų. Kiekvienas iš jų gavo 3 arba 4 slyvas. Kiek Urtės draugų gavo 4 slyvas?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
4. Kengūra Laima laiko metus laimingais, jei jų skaičiaus bent du skaitmenys vienodi, o visų skaitmenų suma lygi 10 (pavyzdžiui, 2026 metai laimingi). Kiek metų 21-ajame amžiuje Laimai yra laimingi?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
5. Lygiakraščiame trikampyje PQR išvestos aukštinė QS ir atkarpa, išeinanti iš kraštinės PQ vidurio taško lygiagrečiai su kraštine PR (žr. pav.). Kuri trikampio PQR dalis (pagal plotą) nuspalvinta?
A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{1}{3}$
6. Jei septynženklis skaičius $\overline{193391A}$ dalijasi iš 6, tai skaitmuo A lygus
A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8
7. Kokia yra reiškinių $(1 - 2) - (3 - 4) - (5 - 6) - \dots - (2025 - 2026)$ reikšmė?
A) 1011 B) -1011 C) 1013 D) -1013 E) 2024
8. Parduotuvė paskelbė akciją: perkant tris poras kojinių, pigiausia iš jų nemokama. Miglė perka šešias poras kojinių, kurių kainos skirtingos: 2,90, 3,10, 3,50, 4,30, 4,60 ir 4,90 Eur. Kiek daugiausiai gali kainuoti dvi poros kojinių, kurias Miglė gaus nemokamai?
A) 6,60 Eur B) 7,20 Eur C) 7,40 Eur D) 7,70 Eur E) 8,10 Eur



9. Lygiakraščio trikampio kraštinės ilgis lygus 2. Kiekvienai šio trikampio viršūnei nubrėžtas apskritimas su centru joje, einantis per kitas dvi viršūnes (žr. pav.). Koks yra nuspaltintos srities perimetras?



A) 6 B) 8 C) π D) $\frac{3}{2}\pi$ E) 2π

10. Ūkininkas savo ūkyje turi daugiau vištų nei kiaulių, daugiau kiaulių nei ožkų, daugiau ožkų nei avių ir daugiau avių nei šunų. Šunų jis turi perpus mažiau nei vištų. Kiek mažiausiai gyvūnų gali turėti ūkininkas?

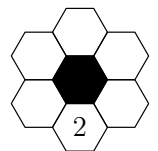
A) 28 B) 30 C) 32 D) 34 E) 36

Klausimai po 4 taškus

11. Penkis grybautojus apkandžiojo mašalai. Grybautojai turi po 7, 9, 10, 13 ir 14 įkandimų. Austėja ir Benas kartu turi tris kartus daugiau įkandimų nei Česius. Benas ir Danielė turi du kartus daugiau įkandimų nei Emilija. Kiek įkandimų turi Benas?

A) 7 B) 9 C) 10 D) 13 E) 14

12. Pirminiai skaičiai 2, 3, 5, 7, 11 ir 13 turi būti po vieną įrašyti šešiuose baltuose šešiakampiuose (žr. pav.; skaičius 2 jau įrašytas). Jokių dviejų gretimų skaičių suma negali būti pirminis skaičius. Keliais būdais galima įrašyti likusius penkis skaičius?



A) 2 B) 6 C) 12 D) 60 E) Kitas atsakymas

13. Pažymėta apskritimo 15 taškų, dalijančių jį į 15 lygių lankų. Kiek yra taisyklingųjų daugiakampių, kurių visos viršūnės yra pažymėtieji taškai?

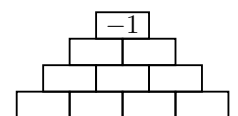
A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 13

14. Septynlangės eilutės langeliuose Gabija po vieną įrašė skaičius 1, 2, 3, 4, 5, 6 ir 7. Du įrašytieji skaičiai parodyti paveikslėlyje. Eilutėje jokių dviejų gretimų skaičių suma nesidalija iš 2, o jokių trijų gretimų skaičių suma – iš 3. Kokia yra skaičių dviejuose pilkuose langeliuose suma?



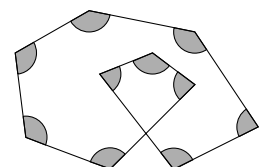
A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 13

15. Kiekviename iš pavaizduotosios „piramidės“ 9 tuščių langelių reikia įrašyti skaičių 1 arba -1 . Kiekvienas „piramidės“ skaičius, nesantis apatinėje eilėje, turi būti lygus tiesiai po juo esančių dviejų skaičių sandaugai. Keliais būdais galima įrašyti skaičius?



A) 15 B) 12 C) 10 D) 8 E) 4

16. Uždarąją laužtę sudaro 10 atkarpų (žr. pav.). Koks yra kiekvieno iš 10 pažymėtųjų kampų didumas, jei jie visi lygūs?



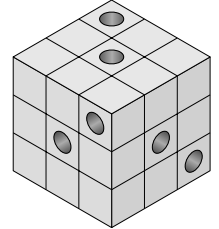
A) 96° B) 105° C) 108° D) 115° E) Kitas atsakymas

17. Penki bėgikai varžėsi tarpusavyje. Vienas iš jų nepasiekė finišo, o kiti keturi pasiekė jį skirtingu metu. Vėliau jie pasakė tokius teiginius. Arnas: „Finišą pasiekiau antras arba trečias.“ Benas: „Finišą pasiekiau, ir nebuvo ketvirtas.“ Česius: „Finišą pasiekiau pirmas.“ Donatas: „Finišą pasiekiau ketvirtas.“ Ervinas: „Finišo nepasiekiau.“ Yra žinoma, kad lygiai vienas bėgikas sumelavo. Kuris?

A) Arnas B) Benas C) Česius D) Donatas E) Ervinas

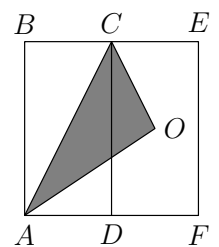
18. Medinį kubą sudaro $3 \times 3 \times 3$ kubelių. Kinivarpa pragraužė 6 tiesius tunelius nuo vienos kubo sienos iki kitos, statmenus atitinkamoms sienoms (žr. pav.). Kiek iš 27 kubelių liko nesugadinti kinivarpos?

A) 12 B) 10 C) 8 D) 15 E) 21



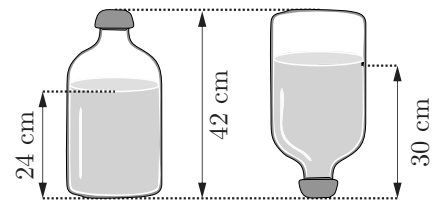
19. Stačiakampiai $ABCD$ ir $DCEF$ lygūs (žr. pav.). Stačiakampio $DCEF$ įstrižainės kertasi taške O . Kurią stačiakampio $ABEF$ dalį (pagal plotą) sudaro trikampis ACO ?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{2}{9}$ E) Kitas atsakymas



20. Į 4,5 litro talpos butelį įpilta vandens. Paveikslėlyje parodyta, kaip pakinta vandens aukštis, apvertus butelį. Vandens stulpelis paveikslėlio kairėje yra ritinio formos. Kiek litrų vandens yra butelyje?

A) 2,4 B) 2,5 C) 2,7 D) 3 E) 3,5



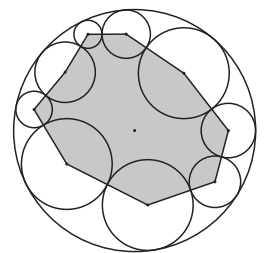
Klausimai po 5 taškus

21. Šachmatų turnyre sužaidus šachmatų partiją, už pergalę, lygiąsias ir pralaimėjimą atitinkamai skiriami 3, 1 ir -1 taškas. Kiekvienas turnyro žaidėjas su kiekvienu kitu sužaidė lygiai vieną kartą. Kiek yra turnyro dalyvių, jei jų surinktų taškų suma lygi 90?

A) 5 B) 8 C) 10 D) 12 E) 15

22. Didysis apskritimas, kurio spindulio ilgis lygus 10, ir devyni mažesni apskritimai liečiasi, kaip parodyta paveikslėlyje. Mažesniųjų apskritimų centrai sujungti atkarpomis, o atstumų nuo šių centrų iki didžiojo apskritimo centro suma lygi d . Koks yra nuspalvinto daugiakampio perimetras?

A) $90 - 2d$ B) $90 - d$ C) $180 - d$ D) $180 - 2d$ E) $180 + 2d$



23. Skaičiai a ir b natūralieji, ir $a^b - ab = 2026$. Tada $a + b =$

A) 10 B) 13 C) 15 D) 1013 E) 1015

24. Senovinis dviratis, kurio vienas ratas daugiau nei du kartus aukštesnis nei kitas, rieda tiesia linija. Jo kelyje pasitaikė bala (žr. pav. dešinėje). Koks galėtų būti dviračio paliktas šlapias pėdsakas, pravažėjęs balą?

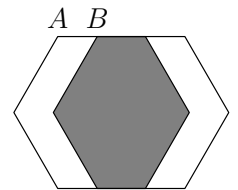


- A) B) C) D) E)

25. Nojus 100 kartų parideno standartinį žaidimo kauliuką. Visų akučių skaičių, kuriais kauliukas atvirto, sandauga lygi 6^{70} . Kiek mažiausiai kartų kauliukas galėjo atvirsti 6 akutėmis?
A) 10 B) 12 C) 24 D) 30 E) Kitas atsakymas

26. Goda turi 8 lazdeles, kurių ilgiai centimetrais yra 8 skirtingi natūralieji skaičiai. Jokios trys lazdelės nesudaro trikampio. Koks yra mažiausias galimas ilgiausios lazdelės ilgis?
A) 32 cm B) 33 cm C) 34 cm D) 35 cm E) 36 cm

27. Vienas taisyklingasis šešiakampis, kurio kraštinės ilgis 60, gaunamas pastūmus kitą dešininį per atkarpos AB ilgį, kaip parodyta paveikslėlyje (horizontalios kraštinės lieka tose pačiose tiesėse). Koks turi būti atkarpos AB ilgis, kad trys sritys, sudarančios gautąją figūrą, būtų lygiaplotės?
A) 30 B) 39 C) 40 D) 45 E) 52



28. Sekoje $a_1, a_2, a_3, \dots$ kiekvienas a_n yra didžiausias natūralusis skaičius, ne didesnis už $\sqrt{n}$. Pavyzdžiui, $a_{2026} = a_{45^2+1} = 45$. Tada $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots + a_{2025} - a_{2026} =$
A) 0 B) 2026 C) -2026 D) 22 E) -22

29. Ignas ir Saulė pakaitomis traukė saldainius iš maišo, kaskart vienu saldainiu daugiau: Ignas ištraukė 1 saldainį, tada Saulė 2, Ignas 3, Saulė 4, ir t. t. Kai kažkuris vaikas negalėjo laikytis šios taisyklės, maiše likus per mažai saldainių, tai ištraukė visus likusius saldainius. Ignas ištraukė iš viso 407 saldainius. Kiek saldainių buvo maiše pradžioje?
A) 814 B) 827 C) 834 D) 841 E) 851

30. Skaitmenys 1, 2, ..., 9 tam tikra tvarka surašyti ratu. Imant šio rato gretimų skaitmenų trejetus ir skaitant skaitmenis pagal laikrodžio rodyklę, gaunami 9 triženkliai skaičiai. Vienas iš šių 9 skaičių lygus a bei yra likusių 8 triženklių skaičių sumos daliklis. Kiek yra galimų skaičiaus a reikšmių?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Junioro užduočių sprendimai

1. (A) $202 : 6$

! Pastebėkime, kad trys duotieji skaičiai didesni už 100 ir tuo labiau už C) $20 + 26 = 46$:

$$\text{B)} \ 202,6 > 100, \quad \text{D)} \ 202 - 6 > 100, \quad \text{E)} \ 20 \cdot 26 > 10 \cdot 10 = 100.$$

Likęs skaičius A) $101 : 3 = (99 + 2) : 3 = 33 + \frac{2}{3}$ mažesnis už C) 46, taigi ir yra mažiausias.

2. (B) Vasarį

! Norint pasirinkti atsakymą, pakanka pastebėti, kad Džonio gimtadienio šventės data galėjo būti, pavyzdžiui, 01/02/2010 arba 12/02/2021. Taigi jis galėjo gimti vasario 1 arba 12 dieną (taip pat vasario 2, 10, 11, 20, 21, 22 d.).

Apskritai Džonio gimimo metai prasideda skaitmenimis 20 arba 19, o nagrinėjama gimtadienio šventės data atitinkamai yra dd/02/20MM arba dd/91/19MM. Antrasis atvejis netinka, nes nėra 91-ojo mėnesio. Pirmuoju atveju Džonis gimė antrąjį mėnesį, t. y. vasarį.

3. (D) 4

! Jei po 4 slyvas gavo Urtės x draugų, tai jos $5 - x$ draugų gavo po 3 slyvas. Tada

$$19 = 4x + 3(5 - x) = 15 + x, \quad x = 4.$$

!! Urtės visi penki draugai gavo po 3 slyvas, o kai kurie iš jų – dar po vieną. Tokių papildomų slyvų, taigi ir draugų, gavusių po 4 slyvas, buvo $19 - 5 \cdot 3 = 4$.

4. (E) 5

! 21-ojo amžiaus metai yra 2001, 2002, ..., 3000. Čia galima ir nežinoti, kad 2000 metai priklauso 20-ajam amžiui, o 3000 metai 21-ajam, nes skaičiai 2000 ir 3000 uždavinio sąlygos netenkina. Toliau tarkime, kad laimingi yra $\overline{20AB}$ metai.

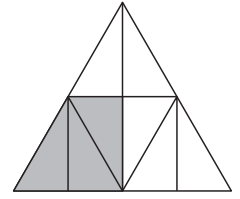
Du iš skaitmenų 2, 0, A , B lygūs. Tada arba skaitmenys A ir B lygūs, arba vienas iš jų lygus 2 arba 0. Turime 5 atvejus: $A = B$, $A = 2$, $B = 2$, $A = 0$, $B = 0$. Kiekvienu atveju pasinaudoję skaitmenų suma $2 + A + B = 10$, atitinkamai gauname

$$(A, B) = (4, 4), \quad (2, 6), \quad (6, 2), \quad (0, 8), \quad (8, 0).$$

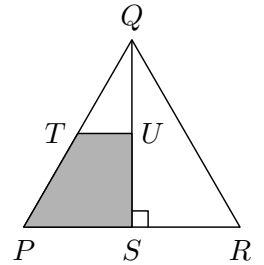
Taip gauname 5 metus 21-ajame amžiuje: 2044, 2026, 2062, 2008, 2080. Laimai jie visi iš tiesų atrodo laimingi.

5. (D) $\frac{3}{8}$

? Galima nuspėti, jog lygiakraštį trikampį PQS galima padalyti į keturis lygius lygiakraščius trikampius, o kiekvieną iš jų – į du lygius stačiuosius trikampius taip, kad trys iš 8 lygių mažųjų trikampių sudarytų nuspalvintąją sritį (žr. pav.). Todėl ši sritis sudaro $\frac{3}{8}$ trikampio PQR .



! Pažymėkime taškus, kaip parodyta paveikslėlyje. Lygiakraščio trikampio PQR aukštinė QS yra ir jo pusiaukampinė. Todėl $\triangle PQS = \triangle RQS$ (bendra kraštinė QS ir kampai prie jos). Taigi trikampis PQS pagal plotą sudaro $\frac{1}{2}$ trikampio PQR . Savo ruožtu $\triangle PQS \sim \triangle TQU$ (kraštinės PS ir TU lygiagrečios, tad atitinkami kampai prie jų lygūs). Panašumo koeficientas $k = TQ : PQ = \frac{1}{2}$ parodo, kad trikampis TQU sudaro $k^2 = \frac{1}{4}$ trikampio PQS , o nuspalvintoji sritis sudaro $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ trikampio PQS . Vadinasi, nuspalvintoji sritis sudaro $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ trikampio PQR .



6. (C) 4

! Natūralusis skaičius dalijasi iš $6 = 2 \cdot 3$ tada ir tik tada, kai dalijasi iš 2 ir iš 3. Pritaikykime dalumo iš 2 ir iš 3 požymius: skaičiaus $\overline{193391A}$ paskutinis skaitmuo A turi būti lyginis, o skaitmenų suma $26 + A$ turi dalytis iš 3. Iš lyginių skaitmens A reikšmių 0, 2, 4, 6, 8 tinka tik $A = 4$.

7. (A) 1011

! Reiškinyje skaičiai 1, 2, ..., 2026 suskirstyti į $2026 : 2 = 1013$ porų. Kiekvieno iš 1013 apskliaustų skirtumų $1 - 2, 3 - 4, \dots$ reikšmė lygi -1 . Prieš kiekvieną iš šių skirtumų, išskyrus pirmąjį, turime minusą. Taigi duotojo reiškinio reikšmė lygi

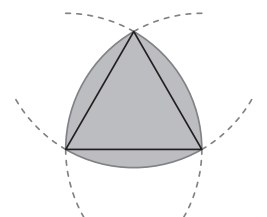
$$(-1) - (-1) - (-1) - \dots - (-1) = -1 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{1012} = -1 + 1012 = 1011.$$

8. (B) 7,20 Eur

! Miglė du kartus perka tris poras kojinių. Viename iš dviejų trejetų bus pigiausia iš 6 porų už 2,90 Eur – ją Miglė neišvengiamai gaus nemokamai. Kito trejeto pigiausia kojinių pora negali kainuoti 4,90 arba 4,60 Eur: šios kojinių poros gali būti tik brangiausios arba antros pagal brangumą. Todėl, pirkdama kitą kojinių porų trejetą, Miglė gali sutaupyti ne daugiau nei 4,30 Eur, o iš viso – ne daugiau nei $2,90 + 4,30 = 7,20$ Eur. Kita vertus, nemokamai gautos kojinės gali kainuoti 7,20 Eur, jei Miglė atskirai pirs tris pigiausias ir tris brangiausias kojinių poras. Vadinasi, 7,20 Eur ir yra didžiausia galima Miglės nemokamai gausimų kojinių kaina.

9. (E) 2π

! Nuspalvintąją sritį riboja trys apskritimų lankai, kurių centriniai kampai yra lygiakraščio trikampio kampai, lygūs $60^\circ = \frac{\pi}{3}$. Kiekvienas kampas lygus šeštadaliui pilnojo kampo $360^\circ = 2\pi$. Taigi kiekvieno iš trijų lankų ilgis lygus šeštadaliui atitinkamo apskritimo ilgio $2\pi \cdot 2 = 4\pi$. Vadinasi, vieno lanko ilgis lygus $\frac{1}{6} \cdot 4\pi = \frac{2\pi}{3}$, o ieškomas perimetras lygus $3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2\pi$.



10. **(B)** 30

! Ūkininko šunų skaičių pažymėkime a . Tada vištų yra $2a$. Tarp skaičių a ir $2a$ turi tilpti dar bent trys natūralieji skaičiai – kiek ūkininkas turi avių, ožkų ir kiaulių. Gauname, kad $2a > a + 3$ ir $a \geq 4$. Taigi ūkininkas turi bent 4 šunis, bent 5 avis, bent 6 ožkas, bent 7 kiaules ir bent 8 vištas – ne mažiau nei

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$$

gyvūnų. Kita vertus, šie gyvūnų skaičiai 4, 5, 6, 7, 8 ir jų bendras skaičius 30 tenkina uždavinio sąlygą. Vadinasi, mažiausias galimas ūkininko gyvūnų skaičius lygus 30.

11. **(D)** 13

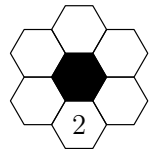
? Austėja ir Benas kartu turi ne daugiau nei $13 + 14 = 27$ įkandimus, o Česius – ne daugiau nei $27 : 3 = 9$. Tada Česius turi 7 arba 9 įkandimus, o Austėja ir Benas kartu – atitinkamai $3 \cdot 7 = 21$ arba $3 \cdot 9 = 27$. Pirmuoju atveju dviejų iš skaičių 9, 10, 13, 14 suma būtų lygi 21, bet taip nėra. Taigi Česius turi 9 įkandimus, o Austėja ir Benas – 27 (vienas 13, kitas 14).

Sprendimą galima užbaigti, atlikus greitą visų likusių atvejų perranką. Tačiau pakanka atspėti, kad tinka galimybė, kai Emilija turi 10 įkandimų, Danielė – 7, o Benas – 13: tada Benas su Daniele kartu turi $20 = 2 \cdot 10$ įkandimų. (Austėja turi 14, o Česius – 9 įkandimus.)

! Beno ir Danielės įkandimų skaičių suma lyginė, todėl šie du skaičiai yra to paties lyginumo ir tegali būti 7 ir 9, 7 ir 13, 9 ir 13 arba 10 ir 14. Emilijos įkandimų skaičius yra šių dviejų skaičių vidurkis – atitinkamai 8, 10, 11 arba 12. Vadinasi, Emilija turi 10 įkandimų, o Benas ir Danielė kartu turi 20 – vienas 7, o kitas 13. Tada Austėja ir Česius turi vienas 9, o kitas 14 įkandimų. Benas negali turėti $3 \cdot 14 - 9 = 33$ įkandimų, todėl jų turi $3 \cdot 9 - 14 = 13$.

12. **(C)** 12

! Skaičiai $2 + 3 = 5$, $2 + 5 = 7$, $2 + 11 = 13$ yra pirminiai, todėl gretimi skaičiai 2 tegali būti skaičiai 7 ir 13. Kita vertus, šešiakampiuose, gretimuose skaičiui 2, bet kokia tvarka galima įrašyti skaičius 7 ir 13 (dvi galimybės), o likusiuose šešiakampiuose – bet kokia tvarka likusius skaičius 3, 5, 11 (turime $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ galimybes). Taip gausime dvi sudėtinės gretimų skaičių sumas $2 + 7 = 3 \cdot 3$ ir $2 + 13 = 3 \cdot 5$. O likusios keturios dviejų gretimų skaičių sumos taip pat bus sudėtinės, nes bus didesnės už 2 ir turės daliklį 2 (kaip dviejų nelyginių skaičių sumos). Vadinasi, skaičius į šešiakampius galima įrašyti $2 \cdot 6 = 12$ būdų.

13. **(C)** 9

! Iš 15 taškų daugiakampio viršūnės reikia pasirinkti taip, kad jos dalytų apskritimą į lygius lankus – kad pasirinktus taškus einant ratu skirtų po tiek pat pažymėtųjų taškų. Taigi daugiakampis bus taisyklingasis, pasirinkus kas n -tąjį pažymėtąjį tašką, kur 15 dalijasi iš n . Tada $n = 1, 3$ arba 5 (kai $n = 15$, gausime tik vieną tašką).

Kai $n = 1$, tai sujungę visus pažymėtuosius taškus, gauname vieną taisyklingąjį 15-kampį $A_1 A_2 \dots A_{15}$. Kai $n = 3$, tai pradėję bet kuriuo iš trijų taškų A_1, A_2, A_3 ir pasirinkdami kas trečią pažymėtąjį tašką, gauname 3 taisyklinguosius penkiakampius. Kai $n = 5$, tai pradėję bet kuriuo iš 5 taškų $A_1, A_2, \dots, A_5$ ir pasirinkdami kas penktą pažymėtąjį tašką, gauname 5 taisyklinguosius trikampius. Iš viso gauname $1 + 3 + 5 = 9$ taisyklinguosius daugiakampius.

14. **(B)** 7

! Įrašytuosius skaičius pažymėkime taip:

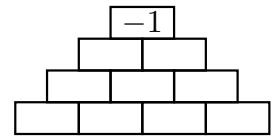
x	2	y	z	t	u	5
-----	---	-----	-----	-----	-----	---

Dviejų gretimų skaičių sumos yra nelyginės. Todėl nelyginiai ir lyginiai skaičiai eina pakaitomis: skaičiai x, y, t (kartu su skaičiumi 5) yra nelyginiai – lygūs 1, 3 ir 7, o skaičiai z ir u lyginiai – lygūs 4 ir 6. Suma $x + 2 + y$ nesidalija iš 3, todėl galėtų tikti tik $(x, y) = (1, 7)$ ir $(x, y) = (7, 1)$. Abiem atvejais $t = 3$. Kadangi suma $t + u + 5 = 8 + u$ nesidalija iš 3, tai $u \neq 4$. Taigi $u = 6$ ir $z = 4$, o ieškoma suma $z + t$ lygi $4 + 3 = 7$. (Pastebėkime, kad gautosios reikšmės $(z, t, u) = (4, 3, 6)$ tenkina uždavinio sąlygą tiek su $(x, y) = (1, 7)$, tiek su $(x, y) = (7, 1)$.)

15. **(D)** 8

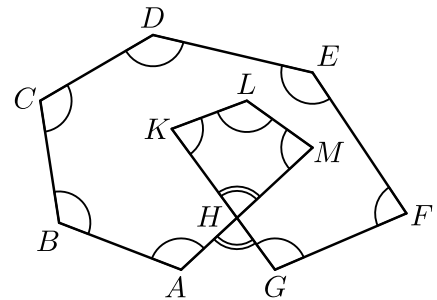
! „Piramidės“ apatinės eilės skaičius iš eilės pažymėję a, b, c, d , antrojoje (nuo apačios) eilėje gauname ab, bc, cd , trečiojoje $ab^2c = ac, bc^2d = bd$, o viršuje – skaičių $abcd$. Turime nustatyti, keliais būdais galima pasirinkti a, b, c, d , kad gautume $abcd = -1$. Skaičiams a, b, c reikšmės 1 ir -1 galima priskirti bet kaip (turime po 2 galimybes), tada lieka pasirinkti $d = -abc$ (vienintelė galimybė). Gauname iš viso $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ galimybes.

!! „Piramidėje“ skaičius galima įrašinėti ne nuo apačios, bet užpildant 3 tuščias eiles nuo viršaus, kaskart įrašant skaičius iš kairės į dešinę. Kiekvienos eilės kairiausiam skaičiui galima laisvai priskirti reikšmę 1 arba -1 (turime po 2 galimybes). Kaskart likę tos eilės skaičiai vienas po kito nustatomi vienareikšmiškai, remiantis dviem jau įrašytais (viršuje ir kairėje) skaičiais. Gauname iš viso $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ galimybes.

16. **(C)** 108°

! Tarkime, kad 10 pažymėtųjų kampų lygūs α . Prisiminkime: n -kampio visų kampų suma lygi $180^\circ \cdot (n - 2)$.

Pažymėkime taškus, kaip parodyta paveikslėlyje. Keturkampio $HKLM$ visų kampų suma lygi 360° , ir jo kampai K, L, M lygūs α . Taigi jo likęs kampas H lygus $360^\circ - 3\alpha$. Aštuonkampio $ABCDEFGH$ (vidaus) kampas H lygus $360^\circ - \angle AHG = 360^\circ - \angle KHM$ (kryžminiai kampai) $= 3\alpha$.



Likę 7 šio aštuonkampio kampai lygūs α , taigi jo visų kampų suma lygi 10α . Vadinasi,

$$10\alpha = 180^\circ \cdot (8 - 2) = 180^\circ \cdot 6, \quad \alpha = 18^\circ \cdot 6 = 108^\circ.$$

!! Tarkime, kad 10 pažymėtųjų kampų lygūs α . Pažymėkime taškus kaip ! dalies paveikslėlyje.

Pasirinkime bet kokią tašką P , per kurią neina nei laužtė, nei laužtės atkarpų tęsiniai. Iš šio taško išveskime spindulį spindulio AB kryptimi. Pasukę gautąjį spindulį apie tašką P pagal laikrodžio rodyklę kampu $180^\circ - \alpha$, gausime spindulio BC kryptį. Kartojant tokį posūkį, spindulys analogiškai taps vienkryptis su spinduliais $CD, DE, EF, FG, GK, KL, LM, MA$, o po 10-ojo posūkio – vėl su AB . Šiais 10 posūkių spindulys apsuksamas apie P dviem pilniaisiais kampais, taigi per $360^\circ \cdot 2 = 720^\circ$, o kita vertus, per $(180^\circ - \alpha) \cdot 10$. Vadinasi,

$$(180^\circ - \alpha) \cdot 10 = 720^\circ, \quad 180^\circ - \alpha = 72^\circ, \quad \alpha = 108^\circ.$$

17. © Česius

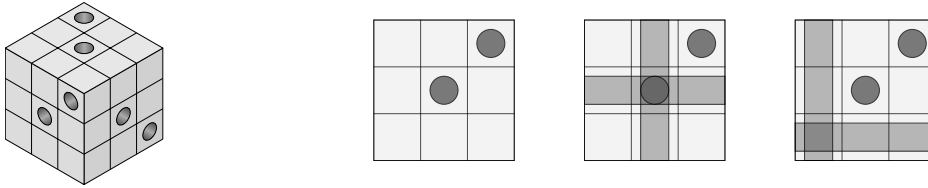
! Pirmiausia atkreipkime dėmesį į Ervino teiginį. Jei jis klaidingas, tai finišo nepasiekė Arnas, Benas, Česius arba Donatas. Taigi kažkas iš jų melavo pasiekęs finišą. Tačiau tada kartu su Ervinu turėtume net du melagius. Tad Ervino teiginys teisingas: finišo nepasiekė būtent jis.

Toliau panašiai galima samprotauti apie Donato teiginį. Jei jis klaidingas, tai ketvirtas lenktynėse buvo Arnas, Benas arba Česius, ir tas bėgikas melavo pasiekęs finišą ne ketvirtas. Kartu su Donatu vėl turėtume du melagius. Taigi Donatas nemelavo – lenktynėse liko ketvirtas. Tada Benas pasiekė finišą ir nebuvo ketvirtas, todėl taip pat nemelavo.

Jei melavo Arnas, tai finišą jis pasiekė pirmas. O tada melavo ir Česius. Vadinasi, Arnas pasakė tiesą, o melavo Česius. (Lenktynėse jiedu tam tikra tvarka buvo antras ir trečias, o pirmas buvo Benas.)

18. (A) 12

! Paveikslėlyje matomą kairiąją šoninę sieną sudaro devynių kubelių sienos. Kubą sudaro šių kubelių 3×3 sluoksnis ir dar du tokie 3×3 sluoksniai. Kinivarpos du tuneliai eina per visus tris sluoksnius, kaskart sugadinami vidurinį ir viršutinį dešinįjį kubelius, o dviejuose sluoksniuose yra dar po du tunelius, kurie kitų sluoksnių nekerta:

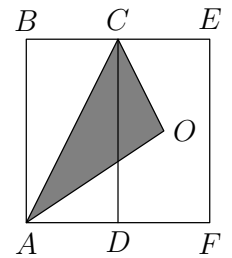


Matome, kad pirmajame sluoksnyje yra 7 nesugadinti kubeliai, antrajame 3, o trečiajame 2. Iš viso yra $7 + 3 + 2 = 12$ nesugadintų kubelių.

19. (E) Kitas atsakymas

! Pažymėkime $a = AB = EF$ ir $b = AD = BC = DF = CE$. Kiekvienos figūros U plotą žymėsime S_U .

Stačiakampio $CDFE$ įstrižainių sankirtos taškas O dėl simetrijos yra per vidurį tarp priešingų šio stačiakampio kraštinių. Taigi atstumai h_1, h_2, h_3 nuo O iki kraštinių DF, CE ir EF atitinkamai lygūs $\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a$ ir $\frac{1}{2}b$. Vadinasi,



$$S_{OAF} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}ab, \quad S_{OCE} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}ab,$$

$$S_{OEF} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot h_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2}b = \frac{1}{4}ab, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2}ab,$$

$$S_{ABEF} = S_{ABCD} + S_{CDFE} = ab + ab = 2ab,$$

$$S_{ACO} = S_{ABEF} - S_{OAF} - S_{OCE} - S_{OEF} - S_{ABC} = ab \cdot \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}ab.$$

Ieškomas plotų santykis $S_{ACO} : S_{ABEF}$ lygus $(\frac{1}{2}ab) : (2ab) = \frac{1}{4}$.

!! Kiekvienos figūros U plotą žymėsime S_U .

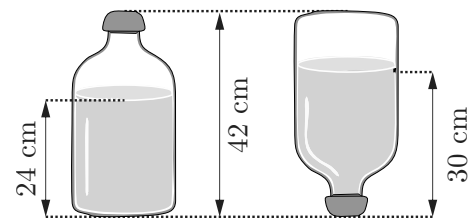
Stačiakampiai $ABCD$ ir $CDFE$ lygūs, tad lygios jų atitinkamos kraštinės bei įstrižainės: $AD = DF = CE$ ir $AC = DE$. Taigi keturkampis $ACED$ yra lygiagretainis (lygios priešingos kraštinės), o tiesės AC ir DE lygiagrečios (tai galima nesunkiai nuspėti ir be įrodymo). Atstumai nuo tiesės DE taškų O ir D iki tiesės AC yra lygūs. Šie atstumai savo ruožtu yra $\triangle ACD$ ir $\triangle ACO$ aukštinių, nuleistų į bendrą kraštinę AC , ilgiai. Taigi $S_{ACO} = S_{ACD}$. Dėl simetrijos turime $S_{ABC} = S_{ACD}$ ir $S_{ABCD} = 2S_{ACD}$. Vadinasi,

$$S_{ABEF} = S_{ABCD} + S_{CDFE} = 2S_{ABCD} = 4S_{ACD} = 4S_{ACO},$$

o ieškomas plotų santykis $S_{ACO} : S_{ABEF}$ lygus $\frac{1}{4}$.

20. (D) 3

! Jei butelio pagrindo plotas yra $S \text{ cm}^2$, tai paveikslėlio kairėje vandens ritinio tūris lygus $24S \text{ cm}^3$. Skaičiaus S nustatyti nebūtina. Pastebėkime, kad paveikslėlio dešinėje bevandenė butelio dalis, kurios aukštis yra $42 - 30 = 12 \text{ cm}$, taip pat yra ritinio formos, o jos tūris lygus $12S \text{ cm}^3$. Taigi butelio tūrį sudaro $24S \text{ cm}^3$ (vanduo) ir $12S \text{ cm}^3$ (likusi tūrio dalis). Šių dviejų tūrio dalių santykis yra $2 : 1$, t. y. vanduo butelyje užima 2 iš $2 + 1 = 3$ tūrio $4,5 \text{ l}$ dalių. Gauname $\frac{2}{3} \cdot 4,5 = 3$ litrus vandens.



21. (C) 10

! Turnyre sužaistų partijų skaičių ir žaidėjų skaičių atitinkamai pažymėkime m ir n . Kiekvienas žaidėjas sužaidė po vieną kartą su $n - 1$ žaidėju, tad gauname $n(n - 1)$ sužaistų partijų. Tačiau taip kiekviena partija įskaičiuojama du syk (pagal kiekvieną iš jos dviejų žaidėjų). Taigi $m = \frac{n(n-1)}{2}$. Partijų skaičių m galima užrašyti ir kitaip: pirmasis žaidėjas jų sužaidė $n - 1$, antrasis su likusiais žaidėjais jų sužaidė $n - 2$, trečiasis $n - 3$, ir t. t. Todėl $m = 1 + 2 + \dots + (n - 1)$.

Kiekviena sužaista partija baigiasi arba vieno iš žaidėjų pergale, arba lygiosiomis. Abiem atvejais gauname dviejų žaidėjų taškų sumą $3 + (-1) = 1 + 1 = 2$. Vadinasi, bendra taškų suma lygi

$$90 = 2 + 2 + \dots + 2 = 2m = n(n - 1).$$

Čia skaičius n natūralusis. Jam didėjant, skaičius $n(n - 1)$ taip pat didėja, tad įgyja reikšmę $90 = 10 \cdot 9$ vienintelį kartą. Lengva pastebėti, kad tinka $n = 10$.

Vietoj pastarųjų pastebėjimų galima būtų tiesiog išspręsti kvadratinę lygtį $n^2 - n - 90 = 0$. Taip pat galima pastebėti, kad

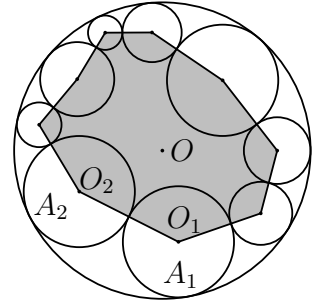
$$45 = 90 : 2 = m = 1 + 2 + \dots + (n - 1)$$

ir kad sumos $1 + 2 + \dots + (n - 1)$ reikšmė didėja, didėjant n , bei tampa lygi 45, kai sudedame 9 dėmenis.

22. (D) $180 - 2d$

! Mažųjų apskritimų centrus iš eilės ratu pažymėkime $O_1, O_2, \dots, O_9$, spindulio ilgius – atitinkamai $r_1, r_2, \dots, r_9$, o lietimosi su didžiuoju apskritimu taškus – atitinkamai $A_1, A_2, \dots, A_9$. Didžiojo apskritimo centrą ir spindulio ilgį atitinkamai pažymėkime O ir R . Čia $R = 10$.

Jei du apskritimai liečiasi, tai lietimosi taške turi bendrą liestinę (nesvarbu ar šie apskritimai yra vienas kito išorėje, ar vienas yra kito viduje). Į lietimosi tašką išvesti apskritimų spinduliai yra statmeni šiai liestinei, todėl abu yra tiesėje, jungiančioje apskritimų centrus.



Pavyzdžiui, taškai O, O_1 ir A_1 yra vienoje tiesėje, ir $R = OA_1 = OO_1 + O_1A_1 = OO_1 + r_1$. Taigi $r_1 = R - OO_1$ ir analogiškai $r_i = R - OO_i$, kai $i = 2, 3, \dots, 9$. (Norint pasirinkti atsakymą, šiuos atkarpų ilgių sąryšius pakanka nuspėti.) Apskritimų centrai O_1 ir O_2 taip pat yra vienoje tiesėje su šių apskritimų lietimosi tašku, ir $O_1O_2 = r_1 + r_2$. Analogiškai $O_2O_3 = r_2 + r_3$, ir t. t. Kadangi $d = OO_1 + OO_2 + \dots + OO_9$, tai nuspaldinto daugiakampio perimetras lygus

$$\begin{aligned} O_1O_2 + O_2O_3 + \dots + O_8O_9 + O_9O_1 &= (r_1 + r_2) + (r_2 + r_3) + \dots + (r_8 + r_9) + (r_9 + r_1) = \\ &= 2r_1 + 2r_2 + \dots + 2r_9 = 2(R - OO_1) + 2(R - OO_2) + \dots + 2(R - OO_9) = \\ &= 18R - 2(OO_1 + OO_2 + \dots + OO_9) = 180 - 2d. \end{aligned}$$

23. (B) 13

? Prisiminus, kad $2^{10} = 1024$, galima pastebėti, kad $2^{11} = 2 \cdot 2^{10} = 2048 = 2026 + 22$ ir $2^{11} - 2 \cdot 11 = 2026$. Taigi suma $a + b$ gali įgyti reikšmę $2 + 11 = 13$.

! Užbaikime ? dalies sprendimą įsitikindami, kad be $(a, b) = (2, 11)$ lygtis $a^b - ab = 2026$ kitų natūraliųjų sprendinių (a, b) neturi.

Jei $a = 1$, tai $2026 = a^b - ab = 1 - b < 1$ (netinka). Jei $b = 1$, tai $2026 = a - a = 0$ (netinka). Taigi $a \geq 2, b \geq 2$. Kadangi

$$a^{u+1} - a(u+1) \geq 2a^u - a(u+1) = (a^u - au) + (a^u - a) \geq (a^u - au) + (a^2 - a) > a^u - au,$$

kai $u = 2, 3, 4, \dots$, tai seka $a^u - au$, kai $u = 2, 3, 4, \dots$, yra didėjančioji. Vadinasi,

$$2026 = a^b - ab \geq a^2 - 2a, \quad 2027 \geq a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2.$$

Atskiru atveju, kai $a = 2$, seka $2^u - 2u$, kai $u = 2, 3, 4, \dots$, yra didėjančioji ir įgyja reikšmę 2026 vienintelį kartą – kai $u = 11$ (lygybė $2^{11} - 2 \cdot 11 = 2026$ iš ? dalies). Tada $(a, b) = (2, 11)$.

Toliau galime tarti, kad $a \geq 3$. Skaičius $2 \cdot 1013 = 2026 = a \cdot (a^{b-1} - b)$ dalijasi iš a . Čia skaičius 1013 pirminis. Iš tiesų, priešingu atveju jis turėtų pirminį daliklį, ne didesnį už

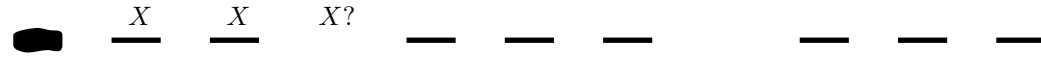
$$\sqrt{1013} < \sqrt{1024} = \sqrt{2^{10}} = 2^5 = 32,$$

bet tokio daliklio neturi (nesidalija iš 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31). Taigi skaičiaus 2026 teigiamas daliklis $a \geq 3$ tegali būti lygus 1013 arba 2026. Tačiau tada $(a - 1)^2 > 1000^2 > 2027$ – tai prieštarauja gautajai nelygybei $2027 \geq (a - 1)^2$. Vadinasi, $a < 3$, o $(a, b) = (2, 11)$ yra vienintelis natūralusis lygties $a^b - ab = 2026$ sprendinys.

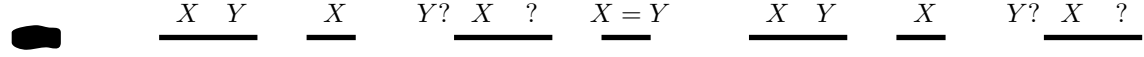
24. **(E)** 

! Ratui, kurio ilgis (kaip apskritimo) lygus a , pravažiavus balą, kurios ilgis l , sušlampa rato lankas, kurio ilgis l , o likusi rato dalis, kurios ilgis $a - l$, lieka sausa. Ratui toliau sukantis, jis palieka šlapius ilgio l pėdsakus vienodais atstumais: pirmąjį atstumu $a - l$ nuo balos, antrąjį atstumu $a - l$ nuo pirmojo, ir t. t. Taigi abiejų ratų pėdsakai yra to paties ilgio (balos ilgis), kiekvieno rato pėdsakai pasikartoja vienodais atstumais, pradedant nuo balos. Tik didžiajam ratui tie atstumai didesni nei mažajam, todėl pirmasis (iš kairės) pėdsakas yra mažojo rato.

Mažojo rato pėdsakus žymėsime X , o didžiojo – Y . Atsakyme **A** mažasis ratas nepaliko savo trečiojo pėdsako, o atsakyme **D** – net antrojo:

A) 
 D) 

Atsakyme **B** pirmoji (iš kairės) atkarpa sudaryta iš dviejų pėdsakų (nes ilgesnė nei balą): pirmasis iš jų turėtų būti X , o tada antrasis – nebent Y . Tačiau antrojo Y vieta būtų tuščia, o trečioji atkarpa per ilgą – jos dešinioji dalis negalėtų būti nei X , nei Y :

B) 

To nepastebėjus, priešara gaunama ir kitaip: jei pirmąją atkarpą sudaro pėdsakai X ir Y , tai didžiojo rato (kaip apskritimo) ilgis nėra daug didesnis nei mažojo. O tada ir jo aukštis (apskritimo skersmuo) negali būti daugiau nei du kartus didesnis nei mažojo.

Atsakyme **C** antroji atkarpa per ilgą: ji daugiau nei trigubai ilgesnė už balą. Taigi ją sudaro daugiau nei trys pėdsakai, iš kurių daugiausiai du yra X ir daugiausiai vienas – Y :

C) 

Prieštara gaunama ir kitaip. Antroji atkarpa galėtų būti nebent $X Y X$, tada antrasis Y – nebent ketvirtoji atkarpa (sutampanti ir su X), o penktoji atkarpa ilgą ir vėlgi turėtų būti $X Y X$. Tačiau tokiu atveju atstumai tarp Y pėdsakų akivaizdžiai nebūtų lygūs.

Vadinasi, teisingas tegali būti atsakymas **E**. Jis iš tiesų sudarytas iš vienodais atstumais (pradedant nuo balos) pasikartojančių dviejų rūšių pėdsakų:

E) 

Toks pėdsakų vaizdas gaunamas, kai balos, mažojo ir didžiojo ratų ilgių santykis yra $1 : 3 : 7$. Jei balą suvoktume kaip skaičių tiesės intervalą $[0; 1]$, tai mažojo rato pėdsakai būtų $[3; 4]$, $[6; 7]$, $[9; 10]$, $[12; 13]$, $[15; 16]$, $[18; 19]$, $[21; 22]$, ..., o didžiojo rato – $[7; 8]$, $[14; 15]$, $[21; 22]$, ...

25. **(A)** 10

! Skaičius $6^{70} = 2^{70} \cdot 3^{70}$ dalijasi iš 3^{70} , bet ne iš 3^{71} . Kita vertus, tai 100 skaičių sandauga, kurioje kai kurie dauginamieji lygūs 3 arba $6 = 2 \cdot 3$, o likę dauginamieji nesidalija iš 3. Todėl šioje sandaugoje yra lygiai 70 dauginamųjų, lygių 3 arba 6. Likę 30 dauginamųjų lygūs 1, 2 arba 4 (bet ne 5, nes 6^{70} iš 5 nesidalija). Šių 30 skaičių sandauga galėtų dalytis iš $4^{30} = 2^{60}$, bet ne iš 2^{61} . Visų 100 skaičių sandauga dalijasi iš $2^{70} = 2^{60} \cdot 2^{10}$. Todėl akučių skaičių, lygių 3 arba $6 = 2 \cdot 3$, sandauga dalijasi bent iš 2^{10} . Vadinasi, tarp jų yra bent 10 skaičių, lygių 6.

Kita vertus, kauliukas galėjo atvirsti 6 akutėmis tik 10 kartų. Tada 3 akutėmis jis atvirto $70 - 10 = 60$ kartų. Jei likusius 30 kartų atvirto 4 akutėmis, tai gauname 30 sandaugų $3 \cdot 3 \cdot 4 = 6^2$ ir dar 10 šešetų, taigi bendrą sandaugą $(6^2)^{30} \cdot 6^{10} = 6^{70}$.

Vadinasi, ieškomas mažiausias atvirtimų 6 akutėmis skaičius lygus 10.

26. © 34 cm

! Iš trijų atkarpų, kurių ilgiai a , b , c , trikampį galima sudaryti tada ir tik tada, kai $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$. Galime tarti, kad $a \geq b \geq c > 0$. Tada garantuotai $a + b > c$ ir $c + a > b$. Taigi sąlyga, kad trikampis su tokiomis kraštinėmis neegzistuoja, yra $a \geq b + c$ (ilgiausia atkarpa ne trumpesnė už kartu paimtas dvi kitas).

Tarkime, kad Godos lazdelių ilgiai (cm) didėjimo tvarka yra $a_1, a_2, \dots, a_8$. Iš trumpiausių trijų lazdelių negalima sudėti trikampio, todėl $a_3 \geq a_1 + a_2$. Analogiškai $a_4 \geq a_2 + a_3$, $a_5 \geq a_3 + a_4, \dots$. Kadangi $a_1 \geq 1$ ir $a_2 \geq 2$, tai $a_3 \geq 1 + 2 = 3$ ir toliau iš eilės gauname, kad $a_4 \geq 2 + 3 = 5$, $a_5 \geq 3 + 5 = 8$, $a_6 \geq 5 + 8 = 13$, $a_7 \geq 8 + 13 = 21$, $a_8 \geq 13 + 21 = 34$.

Kita vertus, reikšmė $a_8 = 34$ galima, kai lazdelių ilgių (cm) seka yra 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34. Iš tiesų, tada bet kuriems a_i, a_j, a_k , kur $i < j < k$, galioja

$$k \geq 3, \quad j \leq k - 1, \quad i \leq k - 2; \quad a_k = a_{k-2} + a_{k-1} \geq a_i + a_j.$$

Todėl a_i, a_j, a_k nėra jokio trikampio kraštinių ilgių.

Vadinasi, ieškoma mažiausia a_8 reikšmė yra 34 (cm). Gautieji skaičiai 1, 2, 3, 5, 8, ..., kur kiekvienas skaičius, pradedant nuo trečiojo, yra dviejų paskutinių prieš tai užrašytų skaičių suma, vadinami Fibonačio (Fibonacci) skaičiais.

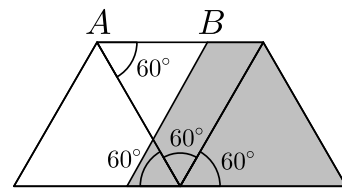
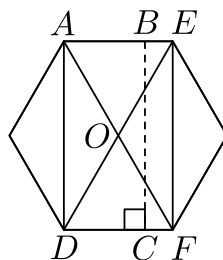
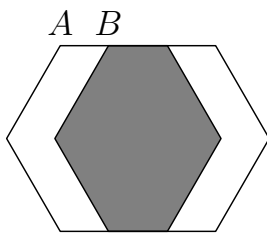
27. D 45

? Tarkime, kad trys sritys, sudarančios duotąją figūrą, lygiaplotės. Kairioji ir vidurinė (nuspalvinta) sritys sudaro taisyklingąjį šešiakampį. Jo plotą pažymėkime S . Tada nuspalvintos srities plotas lygus $\frac{S}{2}$. Kairiajame taisyklingajame šešiakampyje nubrėžkime atkarpas ir pažymėkime taškus, kaip parodyta viduriniame paveikslėlyje. Nesunku nuspėti, kad keturkampiai $AEFD$ ir $ABCD$ yra stačiakampiai. Pažymėkime $a = AD = BC = EF$ ir $x = AB$.

Galima nuspėti, kad stačiakampio $AEFD$ įstrižainių sankirta O yra taisyklingojo šešiakampio apibrėžtinio apskritimo centras. Tada apskritimo spinduliai, išvesti iš O , dalija pilnąjį kampą į 6 lygius kampus, o šešiakampį – į 6 lygius trikampius, vienas iš kurių yra OAE . Taigi $\triangle OAE$ plotas lygus $\frac{S}{6}$. Galima nuspėti, kad O yra per vidurį tarp tiesių AE ir DF , tad nutolęs nuo jų per $\frac{a}{2}$. Tada $\triangle OAE$ plotas $\frac{S}{6}$ lygus $\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot AE = \frac{a}{4} \cdot 60 = 15a$. Taigi $S = 90a$.

Galima nuspėti, kad pašalinus stačiakampį $ABCD$, o likusias dvi šešiakampio, kurio plotas S , dalis suglaudus (t. y. sutrumpinus atkarpas AE ir DF per atkarpos AB ilgį), gauname figūrą, lygi nuspalvintai sričiai, kurios plotas $\frac{S}{2}$. Tada stačiakampio $ABCD$ plotas $AD \cdot AB = ax$ yra $S - \frac{S}{2} = \frac{S}{2}$. Vadinasi,

$$90a = S = 2ax, \quad AB = x = (90a) : (2a) = 45.$$



! Nagrinėkime kairįjį taisyklingąjį šešiakampį ir jo plotą S . Tarkime, kad trys sritys, sudarančios duotąją figūrą, lygiaplotės. Tada kairiosios srities plotas lygus $\frac{S}{2}$. Pažymėkime $x = AB$.

Nagrinėjamas šešiakampis taisyklingasis, todėl įbrėžtas į apskritimą, iš kurio centro išvesti spinduliai dalija pilnąjį kampą į $360^\circ : 6 = 60^\circ$ kampus, o šešiakampį – į 6 lygius lygiašonius trikampius. Šie trikampiai lygiakraščiai (kampai prie pagrindo lygūs $\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$). Trys viršutiniai trikampiai sudaro keturkampį, kuris yra trapecija (pagal 60° priešinius kampus; žr. dešinįjį paveikslėlį). Analogiškai trapeciją sudaro ir trys apatiniai trikampiai. Pastūmus šešiakampį, jo visi taškai pastumiami per x ta pačia kryptimi (tiesėmis, lygiagrečiomis su tiese AB). Todėl trys kairiosios šešiakampio viršūnės pastumiamos per x , likdamos dviejų trapecijų pagrindų taškais. Vadinasi, nenuspalvinta viršutinės (analogiškai ir apatinės) trapecijos dalis yra keturkampis, dar daugiau – tai lygiagretainis (horizontalios kraštinės lygiagrečios ir lygios). Šio lygiagretainio ir trapecijos bendros aukštinės ilgį pažymėkime h . Trapecijos pagrindų ilgiai yra 60 ir $60 + 60 = 120$, o lygiagretainio – x . Plotai atitinkamai lygūs $\frac{60+120}{2} \cdot h = 90h$ ir xh . Analogiškai gaunami tokie patys apatinės trapecijos ir jos nenuspalvintos dalies plotai. Vadinasi,

$$S = 90h + 90h = 180h, \quad \frac{S}{2} = xh + xh = 2xh, \quad 180h = 4xh, \quad x = 180 : 4 = 45.$$

28. (E) –22

! Nagrinėkime bet koki natūralųjį skaičių n bei visus natūraliuosius skaičius tarp n^2 ir $(n+1)^2$. Turime $2n$ skaičių

$$n^2 + 1, \quad n^2 + 2, \quad \dots, \quad n^2 + 2n.$$

Jei i yra vienas iš jų, tai $n \leq \sqrt{i} < n+1$. Tada didžiausias natūralusis skaičius, ne didesnis už $\sqrt{i}$, yra $a_i = n$ (tai ne kas kita kaip $\sqrt{i}$ sveikoji dalis). Taip pat $a_{n^2} = n$. Vadinasi, jei duotajame reiškinyje $a_1 - a_2 + \dots - a_{2026}$ yra nariai a_{n^2} ir $a_{(n+1)^2}$, tai tarp jų esančius $2n$ narių galima visus poromis suprastinti pagal $\pm a_i \mp a_{i+1} = 0$. Be to, galime suprastinti $a_{2025} - a_{2026} = a_{45^2} - a_{45^2+1} = 45 - 45 = 0$. Lieka reiškiny

$$a_1 - a_4 + a_9 - a_{16} + \dots + a_{43^2} - a_{44^2} = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 43 - 44.$$

(Kaip buvo prieš prastinant, taip ir liko, kad su minusais yra tie a_i , kurių indeksas i lyginis.) Turime 44 narius, taigi 22 jų poras. Gauname tokią duotojo reiškinio reikšmę:

$$(1 - 2) + (3 - 4) + \dots + (43 - 44) = (-1) + (-1) + \dots + (-1) = -22.$$

29. (B) 827

? Ignas traukė 1, 3, 5, 7, ... saldainius, jo turimų saldainių skaičiui tampant 1, 4, 9, 16, ... Galima nuspėti, kad šie skaičiai yra iš eilės einančių natūraliųjų skaičių kvadratai. Tokiu atveju Ignas po 20-ojo ėjimo galėjo turėti $20^2 = 400$ saldainių. Tada Saulė, kuri kaskart po Igno ištraukdavo vienu saldainiu daugiau nei jis, po savo 20-ojo ėjimo galėjo turėti 20 saldainių daugiau nei jis, taigi iš viso 420. Toliau maiše galėjo likti tik 7 saldainiai, kuriuos ištraukęs Ignas turėjo 407 saldainius. Vadinasi, iš viso saldainių galėjo būti $407 + 420 = 827$.

! Saulė savo n -tuoju ėjimu (nebent išskyrus paskutinį) ištraukia iš maišo $2n$ saldainių, o Ignas – vienu saldainiu mažiau, taigi $2n - 1$ saldainių. Po n -tojo ėjimo (nebent išskyrus paskutinį) Ignas turi $1 + 3 + 7 + \dots + (2n - 1)$ saldainių. Šiai n dėmenų sumai, kurioje dėmenys didėja vis pridedant po 2, galime pritaikyti aritmetinės progresijos sumos formulę:

$$1 + 3 + 7 + \dots + (2n - 1) = \frac{1 + (2n - 1)}{2} \cdot n = n^2.$$

Taigi Ignas po kiekvieno savo ėjimo, išskyrus paskutinį, iš eilės turėjo $1^2, 2^2, 3^2, \dots, m^2$ saldainių (čia skaičius m sveikasis). O savo paskutiniu ėjimu taisyklės nesilaikė (skaičius 407 nėra sveikąjo skaičiaus kvadratas), tad paėmė iš maišo visus likusius saldainius. Čia $m^2 < 407$, taigi $m \leq 20$. Jei $m < 20$, tai Ignas būtų galėjęs laikytis taisyklės ir paskutiniu ėjimu būtų paėmęs tiek saldainių, kad jų turėtų ne 407, o tik $(m + 1)^2 \leq 20^2$. Vadinasi, $m = 20$, priešpaskutinis Igno ėjimas buvo 20-asis, paskutiniu 21-uuoju ėjimu Ignas paėmė iš maišo visus likusius 7 saldainius, o Saulė 21-ojo ėjimo jau neatliko. Po 20 ėjimų Ignas turėjo $m^2 = 400$ saldainių. Saulė kaskart po Igno ištraukdavo vienu saldainiu daugiau nei jis. Todėl po savo paskutinio 20-ojo ėjimo ji turėjo 20 saldainių daugiau nei tuo metu Ignas: $400 + 20 = 420$. Vadinasi, iš viso saldainių buvo $407 + 420 = 827$.

30. (B) 2

! Devynis triženklis skaičius iš eilės (kaip jie gaunami einant ratu) pažymėkime $a_1, a_2, \dots, a_9$. Galime tarti, kad $a = a_1$. Suma $a_2 + a_3 + \dots + a_9$ dalijasi iš skaičiaus a_1 tada ir tik tada, kai iš jo dalijasi visų 9 skaičių suma $S = a_1 + a_2 + \dots + a_9$. Kiekvieną dėmenį galima užrašyti taip:

$$a_i = \overline{A_i B_i C_i} = 100A_i + 10B_i + C_i.$$

Čia skaičiai $A_1, A_2, \dots, A_9$ yra tam tikra tvarka surašyti skaičiai 1, 2, $\dots$, 9. Tą patį galima pasakyti apie $B_1, B_2, \dots, B_9$ ir $C_1, C_2, \dots, C_9$. Kadangi $1 + 2 + \dots + 9 = 45$, tai

$$S = 100(A_1 + \dots + A_9) + 10(B_1 + \dots + B_9) + (C_1 + \dots + C_9) = 100 \cdot 45 + 10 \cdot 45 + 45 = 111 \cdot 45.$$

Taigi a yra skaičiaus $111 \cdot 45 = 3 \cdot 37 \cdot 9 \cdot 5 = 3^3 \cdot 5 \cdot 37$ triženklis daliklis, kurio trys skaitmenys skirtingi ir nelygūs 0. Be to, bet kuris toks daliklis a tenkina uždavinio sąlygą: ratu iš eilės surašius skaičiaus a skaitmenis A_1, B_1, C_1 ir toliau bet kokia tvarka likusius 6 nenulinius skaitmenis, garantuotai gaunama suma $S = 111 \cdot 45$, kuri dalijasi iš a .

Liko nustatyti, kiek tinkamų daliklių a turi skaičius $3^3 \cdot 5 \cdot 37$. Čia a turi turėti pavidalą $3^x \cdot 5^y \cdot 37^z$, kur $x = 0, 1, 2$ arba 3, $y = 0$ arba 1, $z = 0$ arba 1. Kai $x = 0$, gauname skaičius 1, 5, 37 ir 185. Tinka $a = 185$. Kai $x > 0$ ir $z = 1$, tai a dalijasi iš $3 \cdot 37 = 111$. Tokie triženkliai skaičiai yra devyni: 111, 222, $\dots$, 999. Jie netinka, nes turi vienodus skaitmenis. Liko atvejais, kai $x > 0$ ir $z = 0$. Jei ir $y = 0$, tai $a = 3^x \leq 27$ nėra triženklis skaičius. Taigi $y = 1$, ir gauname skaičius 15, 45, 135. Tinka $a = 135$.

Vadinasi, tinkamų a reikšmių yra dvi (185 ir 135).

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	A
2	B
3	D
4	E
5	D
6	C
7	A
8	B
9	E
10	B
11	D
12	C
13	C
14	B
15	D
16	C
17	C
18	A
19	E
20	D
21	C
22	D
23	B
24	E
25	A
26	C
27	D
28	E
29	B
30	B