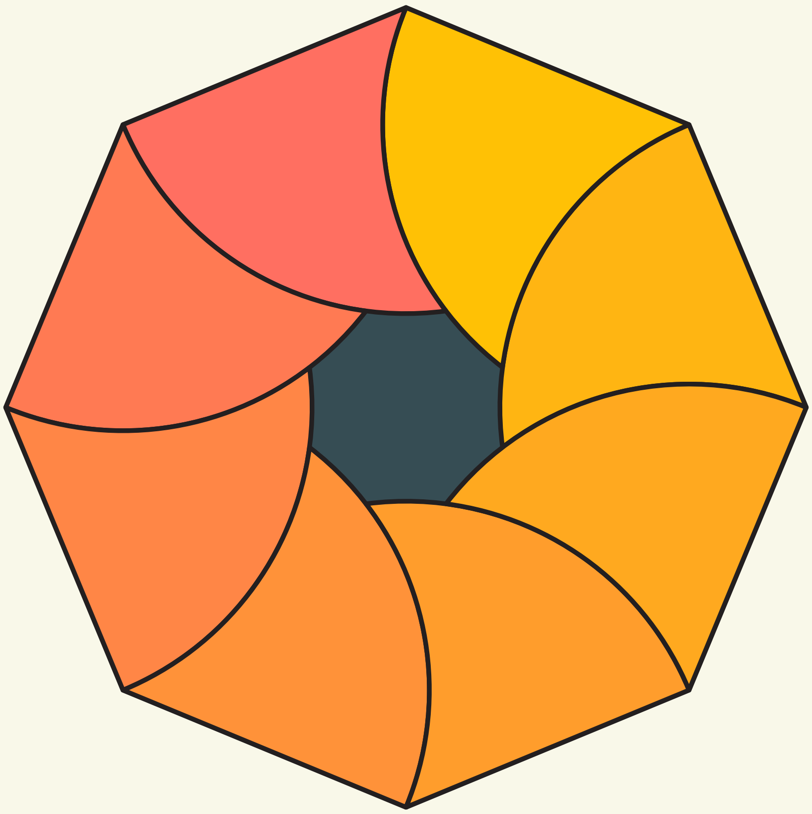
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA

Senjoras

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI



2025

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2025. Senjoras

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Turinys

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 31300 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2025 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis sprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto rinktis labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2025 metų kovo 20 dieną keliavo ir gausiai sprendė 11–12 klasių (*Senjoro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

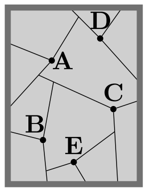
Organizatoriai

2025 m. *Senjoro* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Šių metų skaičius yra sveikojo skaičiaus kvadratas: $2025 = 45^2$. Kiek mažiausiai metų praeis, kol tai ir vėl nutiks?
A) 25 **B)** 91 **C)** 121 **D)** 500 **E)** 2025

2. Vieną po kito sviedus penkis akmenis, jie kliudė langą taškuose A, B, C, D, E (žr. pav.). Kliudžius langą kuriame nors taške, stikle atsiranda iš to taško išeinantys tiesūs įtrūkiai, kurie užsibaigia ties jau esamais įtrūkiais arba ties lango kraštu. Kokia tvarka akmenys kliudė langą?
A) DACBE **B)** ABCDE **C)** BDACE **D)** BCDAE **E)** DCABE

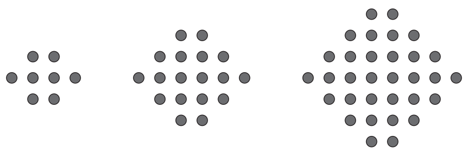


3. Akvariume plaukioja 20 žuvyčių. Kiekviena iš jų yra auksinė, sidabrinė, žalia arba juoda. Lygiai 17 žuvyčių nėra sidabrinės, lygiai 15 nėra žalios, o lygiai 12 nėra juodos. Kiek auksinių žuvyčių yra akvariume?
A) 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 4 **E)** 3

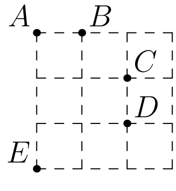
4. Skaičius 88×888 yra
A) tarp 8 ir 88
B) tarp 88 ir 888
C) tarp 888 ir 8 888
D) tarp 8 888 ir 88 888
E) tarp 88 888 ir 888 888

5. Kurį skaičių gausime, ištraukę kvadratinę šaknį iš 16^{16}?
A) 4^4 **B)** 4^8 **C)** 4^{16} **D)** 8^8 **E)** 16^4

6. Figūros sudaromos iš skrituliukų, kaip parodyta paveikslėlyje: pasirinkus nelyginį skaičių $n > 1$, suglaudžiami stulpeliai, kuriuose skrituliukų iš eilės yra $1, 3, 5, \ldots, n$, tada $n, n-2, n-4, \ldots, 1$. Kiek skrituliukų sudaro penktąją mažiausią tokią figūrą?
A) 72 **B)** 74 **C)** 76 **D)** 78 **E)** 80



7. Padalijus $\sqrt{11}$ iš 3, gautas skaičius a. Kuriam intervalui jis priklauso?
A) $(0;1)$ **B)** $(1;2)$ **C)** $(2;3)$ **D)** $(3;4)$ **E)** $(4;5)$

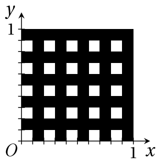


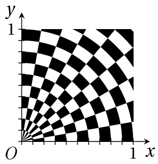
8. Taškai A, B, C, D, E yra kvadratinių langelių viršūnės (žr. pav.). Gabija pasirinko vieną iš jų, o kiekvienus du iš likusių keturių taškų sujungė atkarpa. Kurį tašką pasirinko Gabija, jei jokios dvi gautos atkarpos nėra lygios?
A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

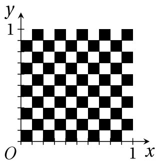
9. Emilis, pirkdamas savo mėgiamas bandeles, šiemet už keturias sumoka tiek, kiek pernai už penkias. Kiek pabrango viena bandelė?

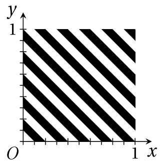
A) 10% **B)** 20% **C)** 25% **D)** 30% **E)** 50%

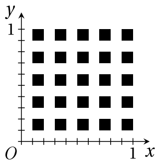
10. Kengūrai Kingai patinka realieji skaičiai, kuriuos įmanoma užrašyti tokia dešimtaine trupmena: prieš kablelį yra tik skaitmuo 0, o po kablelio yra bent vienas skaitmuo ir pirmasis iš jų nelyginis. Kuris paveikslėlis gaunamas, koordinačių plokštumoje Oxy pažymėjus visus taškus $(x; y)$, kurių abi koordinatės patinka Kingai?

A) 

B) 

C) 

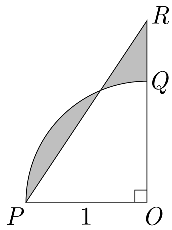
D) 

E) 

Klausimai po 4 taškus

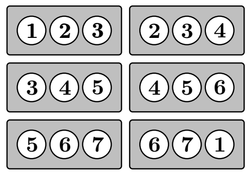
11. Apskritimo su centru O ketvirtis PQ kerta stačiojo trikampio OPR įžambinę PR (žr. pav.). Dvi nuspalvintos figūros yra lygiaplotės. Koks yra atkarpos OR ilgis, jei $OP = 1$?

A) $\frac{\pi}{2}$ **B)** $\frac{3}{2}$ **C)** $\sqrt{2}$ **D)** $\frac{4}{\pi}$ **E)** Kitas atsakymas



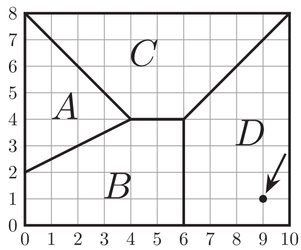
12. Austėja įvairių mokslų olimpiadose laimėjo du aukso ir penkis sidabro medalius. Jie tam tikra tvarka sunumeruoti skaičiais 1, 2, 3, …, 7. Austėja nori taip sudėti tris medalius vienoje dėžutėje, kad lygiai vienas iš jų būtų aukso medalis. Paveikslėlyje parodyti šeši būdai, kaip tai galima padaryti. Kokia yra dviejų aukso medalių numerių suma?

A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

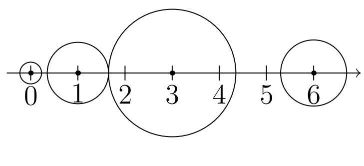


13. Užmoksliškių miestelio žemėlapis padalytas į sritis A, B, C ir D (žr. pav.). Jos yra priskirtos keturioms Užmoksliškių mokykloms: kiekvieną sritį sudaro visi taškai, kur artimiausia mokykla yra viena iš tų keturių. Mokyklos, kuriai priskirta sritis D, koordinatės žemėlapyje yra $(9; 1)$. Kokios yra mokyklos, kuriai priskirta sritis A, koordinatės?

A) $(0; 4)$ **B)** $(1; 4)$ **C)** $(1; 5)$ **D)** $(1; 6)$ **E)** $(2; 4)$



14. Plokštumoje nubrėžta skaičių tiesė. Kiekvienam iš jos taškų 0, 1, 3 ir 6 reikia nubrėžti po apskritimą su centru šiame taške. Jokio apskritimo viduje negali būti kito apskritimo taškų, bet apskritimai gali liestis (paveikslėlyje parodyta viena iš galimybių). Kokia yra didžiausia galima tokių keturių apskritimų spindulio ilgių suma $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$?

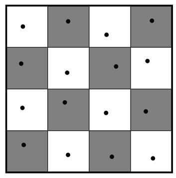


A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** Jokia sumos reikšmė nėra didžiausia galima

15. Koks yra mažiausias natūralusis skaičius N, kuriam skaičius $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{N}}}$ taip pat yra natūralusis?

A) $2^{12} \cdot 3^6$ **B)** $2^4 \cdot 3^{14}$ **C)** $2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^8$ **D)** $2^4 \cdot 3^2$ **E)** Kitas atsakymas

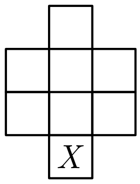
16. Didelės 4×4 aikštelės kiekviename langelyje tupi kengūra (žr. pav.). Nuaidėjus varpo dūžiui, kiekviena kengūra iš savo langelio turi peršokti į gretimą (į langelį, gretimą pagal kraštinę, t. y. įstrižai šokti draudžiama). Jokia kengūra negali palikti aikštelės, o viename langelyje gali atsidurti ir kelios kengūros. Kiek daugiausiai tuščių langelių gali būti po 100 varpo dūžių?



A) 15 **B)** 14 **C)** 12 **D)** 10 **E)** 8

17. Penkiaženklis skaičius $\overline{N18NN}$ dalijasi iš 18. Kiek yra galimų skaitmens N reikšmių?
A) Viena **B)** Dvi **C)** Trys **D)** Nė vienos **E)** Daugiau nei trys

18. Pavaizduotos figūros langeliuose tam tikra tvarka po vieną įrašyti skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Kiekvienoje langelių, turinčių bent vieną bendrą viršūnę, poroje esantys skaičiai skiriasi daugiau nei per 1. Tada skaičius X lygus



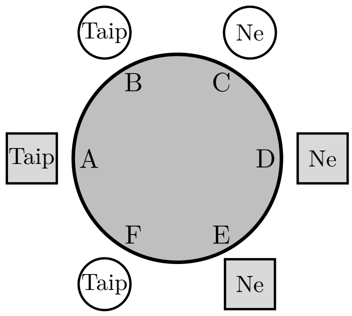
A) 1 arba 8 **B)** 2 arba 7 **C)** 3 arba 6 **D)** 4 arba 5 **E)** 7 arba 8

19. Slibinų ūkyje laikoma 10 slibinų. Jokie du iš jų neturi po tiek pat galvų. Lygiai penkių slibinų galvų skaičiai dalijasi iš 5, o lygiai septynių slibinų galvų skaičiai dalijasi iš 7. Daugiausiai galvų turintis slibinas yra n-galvis. Kokia yra mažiausia galima n reikšmė?
A) 105 **B)** 77 **C)** 75 **D)** 63 **E)** Kitas atsakymas

20. Senelė paėmė didelį rutulio formos siūlų kamuolį ir ėmė megzti kojines. Numezgus 70 to paties dydžio kojinių, siūlų kamuolio spindulys sumažėjo perpus. Kiek dar tokių kojinių senelė gali numegzti iš likusių siūlų?
A) 70 **B)** 50 **C)** 30 **D)** 20 **E)** 10

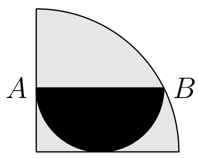
Klausimai po 5 taškus

21. Skraidančios lėkštės šešis išėjimus saugo trys kubiniai ir trys sferiniai ateiviai (žr. pav.). Vienas iš jų yra kapitonas. Kažkurios vienos formos ateiviai visada sako tiesą, o kitos – visada meluoja. Kiekvieno ateivio paklausus, ar ateivių rate kapitonas yra jam gretimas ateivis, gauti atsakymai, parodyti paveikslėlyje. Kurį išėjimą saugo kapitonas?



A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

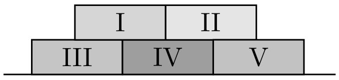
22. Pusskritulis įbrėžtas į skritulio ketvirtį, kaip parodyta paveikslėlyje. Čia pusskritulio skersmuo AB yra lygiagretus su skritulio ketvirčio spinduliu, kurį šis pusskritulis liečia. Koks yra skritulio ketvirčio plotas, jei pusskritulio plotas lygus 12?



A) 25 **B)** 30 **C)** 32 **D)** 36 **E)** 42

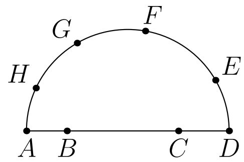
23. Lentoje užrašyti skaičiai 3 ir 5. Kiekvienu ėjimu nutrinami tuo metu lentoje esantys skaičiai a ir b, kur $a \geqslant b$, o vietoj jų užrašomi skaičiai $a+b$ ir $a-b$. Kokie du skaičiai bus lentoje po 50 ėjimų?
A) 3^{25} ir 5^{25} **B)** 3^{50} ir 5^{50} **C)** $3 \cdot 2^{25}$ ir $5 \cdot 2^{25}$ **D)** $2 \cdot 3^{25}$ ir $2 \cdot 5^{25}$
E) Kitas atsakymas

24. Penkios plytos sudėtos, kaip parodyta paveikslėlyje. Vienu ėjimu leidžiama pašalinti bet kurią plytą, ant kurios tuo metu neguli kita plyta. Kiekvieno ėjimo metu Kajus atsitiktinai pasirenka vieną iš plytų, kurias tuo metu leidžiama pašalinti, ir pašalina ją. Kokia tikimybė, kad plyta IV bus pašalinta trečiuoju ėjimu?



A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{5}$ **D)** $\frac{1}{6}$ **E)** $\frac{1}{8}$

25. Aštuoni taškai A, B, C, D, E, F, G, H priklauso pusapskritimio skersmeniui AD ir pačiam pusapskritimiui, kaip parodyta paveikslėlyje. Kiek yra trikampių, kurių viršūnės yra trys iš šių 8 taškų?

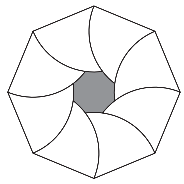


A) 15 **B)** 50 **C)** 51 **D)** 52 **E)** 54

26. Lėja ir jos jaunesnysis brolis Linas vienu metu nuo namų išvažiavo dviračiais tuo pačiu taku. Lėja po 20 minučių apsigręžė ir ėmė važiuoti atgal link namų. Kai ji susitiko vis dar pirmyn važiavusį Liną, šis taip pat apsigręžė ir ėmė važiuoti atgal. Abu vaikai visą laiką važiavo pastoviais greičiais: Lėja 18 km/h, o Linas 12 km/h. Kiek minučių Lėja, sustojusi pradiniame taške, laukė atvykstančio Lino?
A) 4 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 15

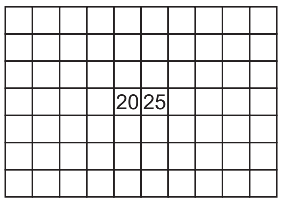
27. Nubraukus natūraliojo dviženklio skaičiaus paskutinį skaitmenį, jis sumažėjo a procentų. Kuris iš duotųjų penkių skaičių yra arčiausiai didžiausios galimos skaičiaus a reikšmės?
A) 10 **B)** 50 **C)** 90 **D)** 95 **E)** 99

28. Taisyklingajame aštuonkampyje, kurio kraštinės ilgis lygus 1, nubrėžti aštuonių apskritimų lankai, kaip parodyta paveikslėlyje. Čia kiekvieno apskritimo centras yra viena iš aštuonkampio viršūnių, o spindulio ilgis lygus 1. Koks yra nuspalvintos figūros perimetras?



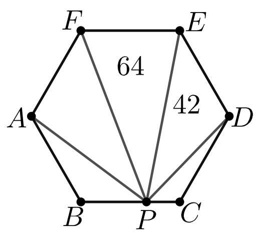
A) $\frac{2\pi}{3}$ **B)** $\frac{3\pi}{4}$ **C)** $\frac{4\pi}{5}$ **D)** π **E)** Kitas atsakymas

29. Kiekviename 7×10 lentelės langelyje įrašytas skaičius. Paveikslėlyje parodyti įrašytieji skaičiai 20 ir 25. Lentelėje kiekvieno 3×4 arba 4×3 stačiakampio 12 skaičių suma lygi 0. Kokia yra lentelės visų 70 skaičių suma?



A) -45 **B)** -25 **C)** -20 **D)** -5 **E)** Neįmanoma nustatyti

30. Taisyklingojo šešiakampio $ABCDEF$ kraštinėje BC pažymėtas taškas P. Paveikslėlyje nurodyti dviejų trikampių plotai. Koks yra trikampio APF plotas?



A) 53 **B)** 54 **C)** 56 **D)** 60 **E)** 64

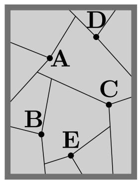
Senjoro užduočių sprendimai

1. (B) 91

! Po 45^2 pirmas tinkamas metų skaičius yra 46^2. Toks jis bus, praėjus $x = 46^2 - 45^2$ metų. Atsakymą greitai rasime, pritaikę kvadratų skirtumo formulę:

$$x = (46 + 45)(46 - 45) = 91 \cdot 1 = 91.$$

2. (A) DACBE



! Vienas įtrūkis iš A užsibaigia ties įtrūkiu iš D, todėl langas taške D kliudytas anksčiau nei taške A. Taip pat pastebėkime, kad vienas įtrūkis iš C užsibaigia ties įtrūkiu iš A, vienas įtrūkis iš B – ties įtrūkiu iš C, o vienas įtrūkis iš E – ties įtrūkiu iš B. Vadinasi, vienintelė galima akmenų, kliudžiusių langą, tvarka yra DACBE.

3. (D) 4

! Sidabrinių, žalių ir juodų žuvyčių akvariume yra atitinkamai

$$20 - 17 = 3, \qquad 20 - 15 = 5 \qquad \text{ir} \qquad 20 - 12 = 8.$$

Vadinasi, auksinių žuvyčių akvariume yra $20 - 3 - 5 - 8 = 4$.

!! Sudėję duotuosius žuvyčių skaičius 17, 15 ir 12, kiekvieną sidabrinę, žalią ir juodą žuvytę įskaičiuosime po du kartus, o kiekvieną auksinę – po tris kartus. Taigi gausime dvigubą visų žuvyčių skaičių, prie kurio pridėtas ieškomas skaičius x:

$$44 = 17 + 15 + 12 = 20 \cdot 2 + x = 40 + x, \qquad x = 4.$$

4. (D) tarp 8 888 ir 88 888

! Pastebėkime, kad $8\,888 = 88 \cdot 101$ ir $88\,888 > 88\,000 = 88 \cdot 1\,000$. Atsakymas **D** teisingas, nes 88 padauginę iš 888, gausime daugiau nei padauginę iš 101, bet mažiau nei padauginę iš 1 000.

5. (C) 4^{16}

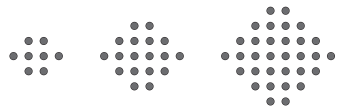
! Skaičiaus $n = \sqrt{16^{16}}$ kvadratas turi būti lygus 16^{16}. Taigi kieno kvadratas yra 16^{16}? Kadangi $16^{16} = 16^{8 \cdot 2} = (16^8)^2$, tai $n = 16^8$. Tačiau atsakymuose tokios išraiškos nėra. Atkreipkime dėmesį, kad laipsnio 16^{16} pagrindas yra kvadratas: $16 = 4^2$. Vadinasi,

$$16^{16} = (4^2)^{16} = 4^{2 \cdot 16} = 4^{16 \cdot 2} = (4^{16})^2, \qquad n = 4^{16}.$$

!! Ieškomas skaičius lygus $\sqrt{16^{16}} = (16^{16})^{\frac{1}{2}} = 16^{16 \cdot \frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2} \cdot 16} = (16^{\frac{1}{2}})^{16} = (\sqrt{16})^{16} = 4^{16}$.

6. (A) 72

? Kiekviena figūra turi vertikalią simetrijos ašį. Skaičiuodami, kiek skrituliukų yra kairėje nuo šios ašies, pastebėkime dėsningumą: $1+3=2^2$, $1+3+5=3^2$, $1+3+5+7=4^2$. Toliau šioje sekoje turėtume gauti 5^2 ir 6^2. Tada penktąją mažiausią figūrą sudaro $6^2+6^2=72$ skrituliukai.



Renkamės atsakymą **A**.

! Penktojoje mažiausioje figūroje iš abiejų pusių nuo vertikalios simetrijos ašies skrituliukų yra po $1+3+5+7+9+11=36$. Taigi figūrą sudaro $36\cdot 2=72$ skrituliukai.

Bendruoju atveju m-tąją mažiausią figūrą sudaro $a_m=(1+3+\ldots+(2m+1))\cdot 2$ skrituliukų. Šią formulę galima suprastinti. Pasirėmę formule $2k+1=(k+1)^2-k^2$, gauname

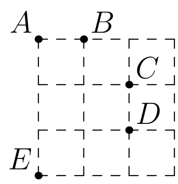
$$1+3+\ldots+(2m+1)=(1^2-0^2)+(2^2-1^2)+\ldots+((m+1)^2-m^2)=(m+1)^2, \qquad a_m=2(m+1)^2.$$

7. (B) $(1;2)$

! Kadangi $3^2<11<4^2$, tai $3<\sqrt{11}<4$, ir tada skaičius $a=\sqrt{11}:3$ yra tarp $3:3=1$ ir $4:3<2$. Vadinasi, $1<a<2$.

8. (D) D

? Lengva pastebėti, kad be taško B arba E likusių keturių taškų aibė turi simetrijos ašį ir kad atitinkamai $AC=DE$ (dvilangių stačiakampių įstrižainės; taip pat $AD=CE$) arba $AB=CD$ (langelių kraštinės; taip pat $AC=BD$). Galime atmesti atsakymus **B** ir **E**. Kiek sunkiau yra pastebėti, kad $BD=DE$ (dvilangių stačiakampių įstrižainės). Ši lygybė leidžia atmesti atsakymus **A** ir **C**.



Renkamės atsakymą **B**.

! Galime tarti, kad langelių kraštinės vienetinio ilgio. Gabijai pasirinkus tašką D, jos nubrėžtų atkarpų ilgiai visi skirtingi:

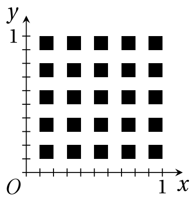
$$AB=1, \qquad AC=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}, \qquad AE=3=\sqrt{9},$$
$$BC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}, \qquad BE=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}, \qquad CE=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}.$$

Taigi atsakymas **D** tinka. Kad netinka likę keturi atsakymai, įsitikinome **?** dalyje.

9. (C) 25%

! Vienos bandelės pernykštę kainą pažymėkime a Eur. Šiemet keturios bandelės kainuoja $5a$ Eur, o viena $\frac{5a}{4}$ Eur. Bandelė pabrango $\frac{5a}{4}-a=\frac{a}{4}$ Eur – ketvirtadaliu buvusios kainos, taigi 25%.

!! Kiek procentų pabrango viena bandelė, tiek ir keturios. O keturios pabrango ketvirtadaliu: prie jų bendros kainos prisidėjo dar vienos (penktos) bandelės kaina. Gauname 25% pabrangimą.

10. (E) 

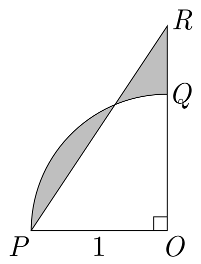
? Kingai nepatinka, pavyzdžiui, skaičiai 0,05, 0,25, 0,45, …. Todėl jokie taškai su tokiomis y koordinatėmis negali būti pažymėti plokštumoje Oxy. Tačiau atsakymuose **A**–**D** nubrėžus iš tokių taškų sudarytas horizontalias tieses $y = 0{,}05$, $y = 0{,}25$, …, jos kirstų juodąsias sritis, taigi eitų per pažymėtus taškus. Tik atsakyme **E** jos nekliudytų juodųjų kvadratų.

Renkamės atsakymą **E**.

! Kingai patinka skaičiai, užrašomi pavidalu $\overline{0{,}a\ldots}$, kur $a = 1, 3, 5, 7, 9$. Kiekvienam a tai visi skaičiai tarp $\overline{0{,}a} = \frac{a}{10}$ ir $\overline{0{,}a999\ldots} = \overline{0{,}a(9)} = \frac{a+1}{10}$ (imtinai). Gauname penkis tinkamų skaičių intervalus $I_1 = [0{,}1;\ 0{,}2]$, $I_3 = [0{,}3;\ 0{,}4]$, $I_5 = [0{,}5;\ 0{,}6]$, $I_7 = [0{,}7;\ 0{,}8]$, $I_9 = [0{,}9;\ 1]$.

Vadinasi, plokštumoje Oxy reikia pažymėti visus taškus (x, y), kur $x \in I_a$, $y \in I_b$. Čia turime $5 \cdot 5 = 25$ galimybes pasirinkti a ir b. Kiekvienai iš jų atitinkami taškai (x, y) sudaro kvadratą $I_a \times I_b$, kurį riboja vertikalios tiesės $x = \frac{a}{10}$ ir $x = \frac{a+1}{10}$ bei horizontalios tiesės $y = \frac{b}{10}$ ir $y = \frac{b+1}{10}$. Tokie 25 kvadratai pavaizduoti atsakyme **E**.

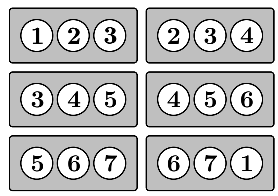
11. (A) $\dfrac{\pi}{2}$



! Dviejų nuspalvintų figūrų plotų nusakyti nemėginkime. Vietoj to pastebėkime, kad jas papildžius ta pačia nenuspalvinta sritimi, gaunamos didesnės, bet paprastesnės figūros – skritulio ketvirtis OPQ ir statusis trikampis OPR. Kadangi nuspalvintos figūros lygiaplotės, tai didesniųjų figūrų atitinkami plotai S_1 ir S_2 taip pat lygūs. Skritulio plotas $4S_1$ lygus $\pi \cdot OP^2 = \pi$. Taigi

$$\frac{\pi}{4} = S_1 = S_2 = \frac{OP \cdot OR}{2} = \frac{OR}{2}, \qquad OR = \frac{\pi}{4} \cdot 2 = \frac{\pi}{2}.$$

12. (C) 9



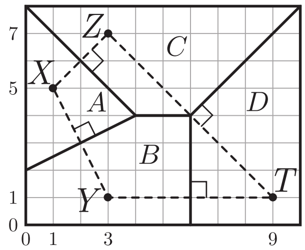
? Turime šešis skaičių trejetus (žr. pav.). Yra du tokie (aukso medalių) skaičiai, kurių kiekviename trejete yra po lygiai vieną. Jei vienas iš dviejų skaičių yra 1, tai pagal trejetą $(1, 2, 3)$ kitas nėra nei 2, nei 3. Pagal trejetą $(2, 3, 4)$ tai skaičius 4. Tačiau tarp duotųjų atsakymų skaičiaus $1 + 4 = 5$ nėra. Analogiškai gauname, kad poroje su skaičiumi 2 turi būti skaičius 5, su skaičiumi 3 – skaičius 6, ir t. t. Turime atsakymą **A)** $2 + 5 = 7$, bet trejete $(6, 7, 1)$ nėra nei 2, nei 5. Tuo tarpu medaliai 3 ir 6 galėjo būti aukso: visuose trejetuose yra po vieną iš šių skaičių.

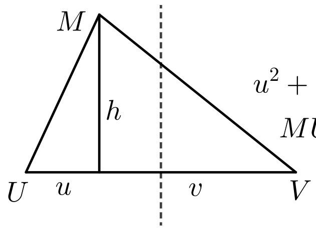
Renkamės atsakymą **C)** $3 + 6 = 9$.

! Duotuose trejetuose $(1, 2, 3)$ ir $(4, 5, 6)$ visi 6 medaliai skirtingi. Tėra du aukso medaliai, jų yra po vieną kiekviename iš šių trejetų. Todėl likęs medalis Nr. 7 yra sidabro. Analogiškai nagrinėdami trejetus $(2, 3, 4)$ ir $(5, 6, 7)$ bei trejetus $(3, 4, 5)$ ir $(6, 7, 1)$, atitinkamai gauname, kad medaliai Nr. 1 ir Nr. 2 yra sidabro. Taigi aukso medaliu trejete $(1, 2, 3)$ tegali būti medalis Nr. 3, o trejete $(6, 7, 1)$ – Nr. 6. Vadinasi, ieškoma numerių suma lygi $3 + 6 = 9$.

13. Ⓒ $(1;5)$

? Tarkime, kad sričių A, B, C ir D mokyklos yra atitinkamai taškuose X, Y, Z ir $T(9;1)$. Sričių B ir D taškai atitinkamai yra arčiau Y nei T ir arčiau T nei Y. Galima nuspėti, kad šių sričių bendros atkarpos taškai yra vienodai nutolę nuo Y ir T, taigi taškai Y ir T yra simetriški jos atžvilgiu. Taip gauname $Y(3;1)$. Analogiškai nagrinėjant sritis A ir B bei jų bendrą atkarpą, galima įžvelgti, kad X turėtų būti taškas $(1;5)$, simetriškas $Y(3;1)$ tos atkarpos atžvilgiu. Dėl visa ko galima pasitikrinti: analogiškai nagrinėjant sritis C ir D, o tada A ir C, gaunamas taškas $Z(3;7)$ ir tada – tas pats taškas $X(1;5)$ (žr. pav. kairėje).



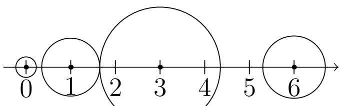


! Plokštumoje turint taškus U ir V, atkarpos UV vidurio statmuo dalija plokštumą į dvi pusplokštumes: vienoje yra taškas U, kitoje V. Paties vidurio statmens taškai yra vienodai nutolę nuo U ir V. Pirmosios pusplokštumės taškai yra arčiau U nei V (pavyzdžiui, pagal Pitagoro teoremą – žr. pav. dešinėje), o antrosios – analogiškai yra arčiau V nei U. Taigi kiekviena sritis gaunama, mokyklą sujungus atkarpomis su likusiomis trimis, nubrėžiant tų atkarpų vidurio statmenis ir imant atitinkamų pusplokštumių, kuriose yra ši mokykla, sankirtos dalį, esančią Užmoksliškėse – duotajame 10×8 stačiakampyje. Mokykla yra savo srityje, o stačiakampio viduje sritį riboja atitinkami vidurio statmenys, kurių atžvilgiu tai mokyklai simetriškos kitos.

Vadinasi, trijų mokyklų taškai vienareikšmiškai nustatomi taip, kaip **?** dalyje. Tašką, atkarpos atžvilgiu simetrišką duotajam, kaskart galima nustatyti pasitelkus vaizduotę. Tačiau galima mąstyti tiksliau. Pavyzdžiui, gavę tašką $Y(3;1)$, pastebėkime, kad sričių A ir B bendrą atkarpą l sudaro 2×1 stačiakampių įstrižainės. Todėl l statmena tokių pačių, tik $90°$ kampu pasuktų stačiakampių įstrižainėms, jungiančioms taškus $(3;1)$, $(2;3)$ ir $(1;5)$, o taškai $(1;5)$ ir $Y(3;1)$ yra simetriški l atžvilgiu. Būdamas srityje A, taškas $(1;5)$ ir yra ieškomas taškas X.

14. Ⓑ 4

? Tarkime, kad apskritimai, kurių centrai yra skaičių tiesės taškai 0, 1, 3 ir 6, nubrėžti reikiamu būdu (nebūtinai taip, kaip parodyta paveikslėlyje), o jų spindulio ilgiai atitinkamai yra r_1, r_2, r_3 ir r_4.



Apskritimai yra vieni kitų išorėje (gali nebent liestis). Intuityviai aišku, kad pirmasis (iš kairės pagal apskritimų centrus) apskritimas visas yra kairėje nuo antrojo – taip pat kaip antrasis nuo trečiojo, o šis nuo ketvirtojo. Ieškodami sumos $s = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ didžiausios reikšmės, galime tarti, kad pirmasis apskritimas liečia antrąjį. Priešingu atveju didintume r_1, kol imtų liesti: pirmasis apskritimas vis tiek liktų visas kairėje nuo antrojo, o s tik padidėtų. Analogiškai galime tarti, kad ketvirtasis apskritimas liečia trečiąjį.

Pirmojo ir antrojo apskritimų lietimosi taškas yra skaičių tiesėje, atkarpoje tarp jų centrų – taškų 0 ir 1, nutolęs per r_1 nuo taško 0 ir per r_2 nuo taško 1. Todėl suma $r_1 + r_2$ lygi šios atkarpos ilgiui 1. Analogiškai $r_3 + r_4 = 6 - 3 = 3$. Vadinasi, šiuo atveju

$$s = (r_1 + r_2) + (r_3 + r_4) = 1 + 3 = 4,$$

o didesnės reikšmės skaičius s įgyti negali.

Renkamės atsakymą **B**.

! Pasitikrinkime, ar **?** dalyje teisingai nusprendėme, kad pirmasis apskritimas visas yra kairėje nuo antrojo (galbūt liečia jį; patikrinimas kitoms apskritimų poroms analogiškas). Šie apskritimai kerta skaičių tiesę atitinkamai taškuose $\pm r_1$ ir $1 \pm r_2$. Taškas $1 - r_2$ negali būti pirmojo apskritimo viduje, todėl $1 - r_2 \notin (-r_1; r_1)$. Analogiškai $r_1 \notin (1 - r_2; 1 + r_2)$. Jei $r_1 > 1 - r_2$, tai $-r_1 \geqslant 1 - r_2$ ir $r_1 \geqslant 1 + r_2$. Tačiau sudėję šias nelygybes, gauname prieštarą: $0 \geqslant 2$. Vadinasi, $r_1 \leqslant 1 - r_2$, ir mūsų intuicija **?** dalyje buvo teisinga: pirmasis apskritimas, visas būdamas kairėje nuo savo vertikalios liestinės taške r_1, yra visas kairėje ir nuo antrojo apskritimo vertikalios liestinės taške $1 - r_2$, taigi ir nuo antrojo apskritimo.

Sprendimą galime užbaigti ir kitaip nei **?** dalyje. Žinome, kad nelygybė $r_1 \leqslant 1 - r_2$ yra būtina, kad du nagrinėtieji apskritimai būtų vienas kito išorėje, bet ji ir pakankama, kad pirmasis visas būtų kairėje nuo antrojo (galbūt liesdamas jį). Taigi ekvivalenti nelygybė $r_1 + r_2 \leqslant 1$ kartu su analogiškomis nelygybėmis $r_2 + r_3 \leqslant 2$ ir $r_3 + r_4 \leqslant 3$ nusako visus teigiamų skaičių r_i ketvertus, tenkinančius uždavinio sąlygą (keturi apskritimai su duotais centrais vieni kitų išorėje). Šias tris nelygybes galima apibendrinti tokiu teiginiu: du apskritimai yra vienas kito išorėje (galbūt liesdamiesi) tada ir tik tada, kai jų spindulio ilgių suma yra ne didesnė už atstumą tarp jų centrų. Nelygybė $s \leqslant 4$ yra pirmosios ir trečiosios nelygybių suma. Lengva rasti tinkamą r_i ketvertą, kuriam $s = 4$. Pavyzdžiui, tinka $r_1 = r_2 = 0{,}5$, $r_3 = r_4 = 1{,}5$.

15. Ⓔ Kitas atsakymas

? Pastebėkime, kad skaičius $a = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{N}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{N}}} = = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot N^{\frac{1}{8}}$ nėra natūralusis, kai **D)** $N = 2^4 \cdot 3^2$:

$$a = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{4}{8}} \cdot 3^{\frac{2}{8}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 2\sqrt{3}.$$

Taigi atsakymas **D** netinka. Tačiau N išraiškoje pakeitę 3^2 į 3^6, analogiškai gausime

$$a = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{4}{8}} \cdot 3^{\frac{6}{8}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Vadinasi, teisingas atsakymas ne didesnis nei $N_0 = 2^4 \cdot 3^6$. Atsakymai **A)** $2^8 N_0$, **B)** $3^8 N_0$ ir **C)** $5^8 N_0$ yra didesni už N_0 ir negali būti teisingi.

Renkamės atsakymą **E**.

! Pertvarkykime duotąjį reiškinį, įkeldami daugiklius po šaknies ženklu:

$$\sqrt{\sqrt{2^2 \cdot 3\sqrt{N}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot N}}} = \sqrt[8]{2^4 \cdot 3^2 \cdot N}.$$

Taigi turime rasti tokį mažiausią natūralųjį N, kad

$$2^4 \cdot 3^2 \cdot N = a^8,$$

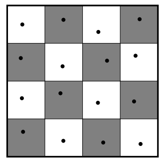
kur skaičius a natūralusis. (Tą patį gautume, lygybę $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{N}}} = a$ tris kartus pakėlę kvadratu.) Skaičius a^8 turi dalytis iš skaičių 2 ir 3, todėl iš jų turi dalytis ir a. Tada a dalijasi iš $2 \cdot 3$, o a^8 – iš $(2 \cdot 3)^8 = 2^8 \cdot 3^8$. Vadinasi,

$$N = a^8 : (2^4 \cdot 3^2) \geqslant (2^8 \cdot 3^8) : (2^4 \cdot 3^2) = 2^4 \cdot 3^6.$$

Čia nelygybė $N \geqslant 2^4 \cdot 3^6$ virsta lygybe, kai $a = 2 \cdot 3$. Taigi mažiausia tinkama skaičiaus N reikšmė yra $2^4 \cdot 3^6$.

16. (B) 14

! Vienu šuoliu kengūra visada nušoka iš balto langelio į pilką arba atvirkščiai, taigi dviem šuoliais iš savo langelio visada nušoka į tos pačios spalvos langelį. Todėl po varpo $100 = 50 \cdot 2$ dūžių baltuose ir pilkuose langeliuose užtikrintai bus po tiek pat kengūrų kaip pradžioje – po 8. Kengūros užims mažiausiai du – baltą ir pilką – langelius, o tuščių langelių bus ne daugiau nei $16 - 2 = 14$.



Kita vertus, kiekviena iš 8 „baltalangių“ kengūrų gali, vos kelis kartus atlikusi po du šuolius, atsidurti kairiajame viršutiniame (baltame) langelyje, o po to kiekvienais dviem šuoliais vis į jį sugrįžti. Tada po 100 dūžių šios 8 kengūros bus viename langelyje, o likusios 8 kengūros analogiškai gali visos atsidurti kitame (pilkame). Vadinasi, $16 - 2 = 14$ langelių po 100 dūžių gali likti tušti, ir tai yra didžiausias tuščių langelių skaičius, kurį galima gauti.

17. (A) Viena

! Skaičius $a = \overline{N18NN}$ dalijasi iš $18 = 2 \cdot 9$, taigi iš 2 ir iš 9. Remiantis dalumo požymiais, skaičiaus a paskutinis skaitmuo N lyginis (dalijasi iš 2), o skaitmenų suma

$$N + 1 + 8 + N + N = 3N + 9$$

dalijasi iš 9. Skaičius $\frac{3N+9}{9} = \frac{N}{3} + 1$ sveikasis, todėl N dalijasi iš 3. Tik skaitmenys 0 ir 6 yra lyginiai ir dalijasi iš 3. Pirmasis iš jų netinka: a negali prasidėti skaitmeniu $N = 0$.

Vienintelė likusi reikšmė $N = 6$ tenkina uždavinio sąlygą. To galima tiesiogiai netikrinti: $a = 61\,866$ dalijasi iš tarpusavyje pirminių skaičių 2 ir 9, todėl dalijasi iš jų sandaugos 18.

18. (B) 2 arba 7

! Du viduriniai langeliai turi net po 6 gretimus (bendrą viršūnę su jais turinčius) langelius. Tačiau skaičiams 2, 3, 4, 5, 6 ir 7 yra po du skaičius, kurie duotojoje figūroje negali būti jiems gretimi, todėl tik po 5 skaičius, kurie gali. Pavyzdžiui, skaičiai 2 ir 4 nėra gretimi skaičiui 3, ir tik 5 likę skaičiai 1, 5, 6, 7, 8 gali būti jam gretimi. Taigi dviejuose viduriniuose langeliuose tegali būti 1 ir 8. Skaičius 2, negretimas skaičiui 1, yra arba viršutiniame, arba apatiniame langelyje, kaip ir skaičius 7, negretimas skaičiui 8. Vadinasi, X yra vienas iš skaičių 2 ir 7.

Nors tai nebūtina, pateikiame vieną galimą langelių užpildymą (žr. pav.). Remiantis gautomis išvadomis, galima patikrinti, kad tinkamų užpildymų tėra keturi.

	7	
3	1	4
5	8	6
	2	

19. (E) Kitas atsakymas

! Turime 10 skirtingų natūraliųjų skaičių, tarp kurių lygiai penki dalijasi iš 5 ir lygiai septyni – iš 7. Kai kurie iš jų gali dalytis iš abiejų pirminių skaičių 5 ir 7, taigi iš $5 \cdot 7 = 35$. Jei būtų daugiausiai vienas skaičius, dalus iš 35, tai be jo turėtume dar bent $(5 - 1) + (7 - 1) = 10$ kitų. Vadinasi, bent du skaičiai dalijasi iš 35, ir $n \geqslant 35 \cdot 2 = 70$.

Kita vertus, reikšmė $n = 70$ yra galima. Ją gauname, imdami skaičius 35 ir 70, dar tris skaičiaus 5 kartotinius 5, 10, 15 ir dar penkis skaičiaus 7 kartotinius 7, 14, 21, 28, 42.

Vadinasi, mažiausia galima n reikšmė yra 70.

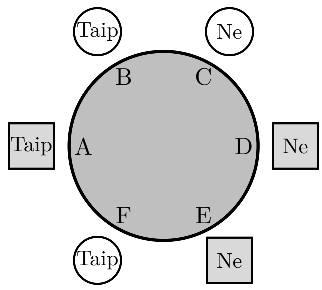
20. E 10

! Net nežinant rutulio tūrio formulės $\frac{4}{3}\pi r^3$, galima suvokti, kad k kartų sumažinus rutulio spindulį, tūris sumažėja k^3 kartų. Taip būtų su bet kokia erdvine figūra, kurios tiesinius matmenis sumažinę k kartų gautume panašią (tos pačios formos, bet nebūtinai to paties dydžio) figūrą.

Taigi siūlų kamuolio spinduliui sumažėjus du kartus, jo tūris sumažėjo $2^3 = 8$ kartus. Senelei liko $\frac{1}{8}$ siūlų, tad sunaudojo $\frac{7}{8}$ jų. Siūlų liko 7 kartus mažiau, nei sunaudota 70-iai kojinių. Vadinasi, iš likusių siūlų senelė gali numegzti $70 : 7 = 10$ kojinių.

21. B B

! Ateivius žymėkime išėjimų, kuriuos jie saugo, raidėmis.

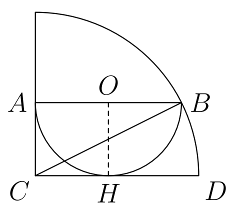


Tarkime, kad sferiniai ateiviai yra teisuoliai. Ateivių B ir F atsakymai reiškia, kad kapitonas yra A arba C bei kad jis yra A arba E. Tada jis tegali būti A. Tačiau neskubėkime daryti išvadų. Šiuo atveju kubiniai ateiviai D ir E yra melagiai, tačiau pasakė tiesą, kad kapitonas A nėra jiems gretimas. Vadinasi, teisuoliai yra kubiniai ateiviai. Ateivis A pasakė tiesą, tad kapitonas yra B arba F. Tai ne F, nes tiesą pasakė ir E. Vadinasi, kapitonas yra ateivis B.

!! Ateivius žymėkime kaip **!** dalyje. Bene greičiausias būdas nustatyti, kas sumelavo, yra nagrinėti priešingus ateivius B ir E. Jei B pasakė tiesą, tai ją pasakė ir E. Tačiau taip negali būti, nes jie skirtingos formos. Taigi B sumelavo, sferiniai ateiviai yra melagiai, o kubiniai – teisuoliai. Toliau kapitonas nustatomas, pasirėmus bet kurių dviejų iš ateivių A, C, E atsakymais.

22. B 30

! Pusė mažojo skritulio įbrėžta į didžiojo skritulio ketvirtį. Atitinkamus spindulio ilgius pažymėkime r ir R, o skritulių plotus – s ir S. Tada $s = 2 \cdot 12 = 24$, o turime rasti $\frac{S}{4}$.



Pažymėkime taškus, kaip parodyta paveikslėlyje. Čia pusskritulio spindulys OH yra statmenas jo liestinei CD. Taigi $OH = r$ yra atstumas tarp lygiagrečių atkarpų AB ir CD. Skritulio ketvirtį nusako $\angle ACD = 360° : 4 = 90°$. Kadangi $AB \parallel CD$, tai $\angle CAB = 90°$. Trikampis ABC statusis, o jo kraštinių ilgiai yra $AB = 2r$ (pusskritulio skersmuo), $AC = r$ (atstumas tarp atkarpų AB ir CD), $BC = R$ (skritulio ketvirčio spindulys). Tai lengva ir nuspėti, praleidus ankstesnius samprotavimus. Liko pasiremti Pitagoro teorema:

$$R^2 = BC^2 = AB^2 + AC^2 = (2r)^2 + r^2 = 5r^2, \qquad \frac{S}{4} = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{5\pi r^2}{4} = \frac{5s}{4} = \frac{5 \cdot 24}{4} = 5 \cdot 6 = 30.$$

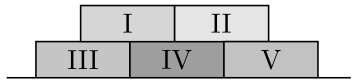
23. C $3 \cdot 2^{25}$ ir $5 \cdot 2^{25}$

! Vienu ėjimu skaičiai a ir b, kuriems $a > b > 0$, pakeičiami skaičiais $a+b$ ir $a-b$, kuriems ir vėl $a + b > a - b > 0$. Taigi skaičiai lentoje visada liks teigiami ir skirtingi. Nustatykime taisyklę, kaip pasikeičia skaičiai po kiekvienų dviejų ėjimų:

$$(a,\ b) \implies (a+b,\ a-b) \implies ((a+b)+(a-b),\ (a+b)-(a-b)) = (2a,\ 2b).$$

Vadinasi, dviem ėjimais turimi skaičiai tiesiog padvigubinami. Per $50 = 25 \cdot 2$ ėjimų skaičiai 3 ir 5 padvigubinami 25 kartus, ir taip gaunami skaičiai $3 \cdot 2^{25}$ bei $5 \cdot 2^{25}$.

24. D $\frac{1}{6}$

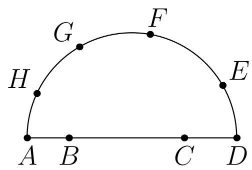


! Jei visi būdai nuimti plytas būtų vienodai tikėtini, tai ieškoma tikimybė būtų lygi tinkamų būdų skaičiaus ir bendro būdų skaičiaus santykiui (žr. 2025 m. Junioro grupės 24 uždavinį). Tačiau čia neturime pagrindo taip manyti: Kajus atsitiktinai renkasi ne vieną iš būdų nuimti plytas, bet kiekvieno ėjimo metu – vieną iš leidžiamų nuimti plytų. Uždavinį spręsime kitaip.

Pirmuoju ėjimu nuimama viena iš plytų I ir II. Prieš nuimant plytą IV, turi būti nuimta ir antroji iš jų. Todėl yra du (nesutaikomi) įvykiai, kai trečiuoju ėjimu nuimama plyta IV: juos nusako pirmųjų trijų nuimamų plytų sekos (I, II, IV) ir (II, I, IV).

Renkantis atsitiktinai tarp plytų I ir II, tikimybė pirmąją nuimti plytą I lygi $p_1 = \frac{1}{2}$. Ją nuėmęs, Kajus rinksis tarp plytų II ir III, ir plytą II nuims vėlgi su tikimybe $p_2 = \frac{1}{2}$. Taip nutikus, trečiuoju ėjimu galės nuimti bet kurią iš trijų likusių plytų, taigi plytą IV nuims su tikimybe $p_3 = \frac{1}{3}$. Tikimybės p_2 ir p_3 sąlyginės – gaunamos tarus, kad ankstesniais ėjimais jau nuimtos tam tikros plytos. Įvykio (I, II, IV) tikimybė lygi $p_1p_2p_3 = \frac{1}{12}$. Dėl simetrijos įvykio (II, I, IV) tikimybė tokia pati, o ieškoma įvykio $(*, *, \text{IV}, *, *)$ tikimybė lygi $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.

25. D 52



? Tris iš 8 duotųjų taškų galima pasirinkti $C_8^3 = \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 56$ būdais. Tačiau trikampio negausime, kai trys taškai yra vienoje tiesėje. Taip bus, jei pasirinksime tris iš keturių taškų A, B, C, D, vieną iš jų atmesdami. Taigi 4 iš 56 būdų nėra tinkami. Galima nuspėti, kad jokie kiti trys iš 8 taškų nėra vienoje tiesėje. Gauname $56 - 4 = 52$ trikampius.

! Trys taškai yra trikampio viršūnės tada ir tik tada, kai nėra vienoje tiesėje. Nagrinėkime du taškų ketvertus: A, B, C, D ir E, F, G, H. Renkantis tris iš 8 taškų, yra du atvejai: visi trys taškai yra iš to paties ketverto arba du yra iš vieno ketverto, o trečiasis – iš kito.

Pirmuoju atveju imdami tris pirmojo ketverto taškus, trikampio negausime, nes jie būtų vienoje tiesėje. Tačiau pasirinkus tris antrojo ketverto taškus visais 4 būdais, jie nebus vienoje tiesėje: kitaip toji tiesė kirstų apskritimą trijuose taškuose. Taigi čia gauname 4 trikampius.

Antruoju atveju du taškus imdami iš pirmojo ketverto, užtikrintai gausime trikampį: pusapskritimio taškai E, F, G, H yra vienoje pusėje nuo skersmens AD, taigi nėra tiesėje AD kartu su skersmens taškais. Du iš taškų A, B, C, D ir vieną iš taškų E, F, G, H galima pasirinkti $C_4^2 \cdot 4 = 24$ būdais. Gauname 24 trikampius. Taip pat trikampį visada gausime, du taškus imdami iš antrojo ketverto: atitinkamos pusapskritimio stygos tiesė visa bus apskritimo išorėje, išskyrus pačią stygą, tad neis per A, B, C arba D. Gauname dar $6 \cdot 4 = 24$ trikampius.

Vadinasi, iš viso yra $4 + 24 + 24 = 52$ tinkami trikampiai.

26. C 8

! Lėja ir Linas per $20 \text{ min} = \frac{1}{3}$ h spėjo nuvažiuoti $18 \cdot \frac{1}{3} = 6$ km bei $12 \cdot \frac{1}{3} = 4$ km, ir juos skyrė 2 km. Tada jie važiavo vienas priešais kitą, kol susitiko po $2 : (12 + 18) = \frac{1}{15}$ h, t. y. po $\frac{60}{15} = 4$ min. Taigi Lėja ir Linas atitinkamai važiavo į vieną pusę 20 min ir $20+4 = 24$ min, į abi $20 \cdot 2 = 40$ min ir $24 \cdot 2 = 48$ min, o Lėjai prie namų teko laukti $48 - 40 = 8$ min.

!! Lėja nuvažiavo iš taško A į tašką B, tada atgal iš B į tašką C, kur sutiko Liną, ir iš C į A. Atstumus $AB = AC + CB$, BC ir CA ji įveikė atitinkamai per 20 min, t min ir $(20 - t)$ min. Linas buvo pusantro karto lėtesnis $(18 : 12 = 3 : 2)$ ir per $(20 + t)$ min teįveikė atstumą AC. Taigi $(20 + t) : (20 - t) = 3 : 2$ ir $t = 4$ (min). Susitikę taške C, vaikai atstumą CA iki namų įveikė per $20 - t = 16$ min ir $20 + t = 24$ min. Taigi Lėja Lino prie namų laukė $24 - 16 = 8$ min.

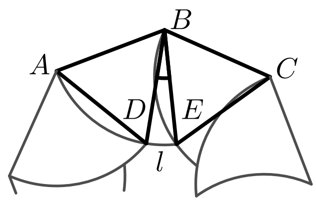
27. (**D**) 95

? Iš skaičiaus $u = \overline{AB} = 10A + B$ (čia $A \neq 0$) gautas skaičius A. Skaičius u sumažėjo per $u - A$ – savo dalimi, lygia $\frac{u-A}{u} = 1 - \frac{A}{u}$. Ši dalis ir atitinkamas procentų skaičius $a = \frac{u-A}{u} \cdot 100$ yra tuo didesni, kuo mažesnė skaičiaus u dalis $\frac{A}{u}$ liko, taigi kuo didesnis jai atvirkštinis skaičius $\frac{u}{A} = 10 + \frac{B}{A}$. Savo ruožtu didžiausią galimą $10 + \frac{B}{A}$ reikšmę gausime, imdami kuo didesnį B ir kuo mažesnį A, t. y. $B = 9$, $A = 1$. Vadinasi, didžiausią a gausime, kai skaičius $u_0 = 19$ sumažėja iki $A_0 = 1$, ir taip lieka $\frac{1}{19}$ jo dalis. Tai mažiau nei $\frac{1}{10} = 10\%$ ir tik šiek tiek daugiau nei $\frac{1}{20} = 5\%$ skaičiaus u_0. Taigi u_0 sumažėja daugiau nei 90% ir tik šiek tiek mažiau nei 95%. Tada didžiausia a reikšmė $a_0 = \frac{u_0 - A_0}{u_0} \cdot 100 = \frac{18}{19} \cdot 100$ yra tarp **C)** 90 ir **D)** 95, o iš akies galime spėti, kad ji yra gerokai arčiau antrojo iš šių skaičių.

Renkamės atsakymą **D**.

! Užbaikime **?** dalies sprendimą griežtai patikrindami, kad didžiausia galima skaičiaus a reikšmė $a_0 = \frac{18}{19} \cdot 100 \in (90; 95)$ yra arčiau skaičiaus 95 nei skaičiaus 90. Iš tiesų, ji yra nutolusi nuo skaičiaus 90 per $\frac{18}{19} \cdot 100 - 90 = \frac{90}{19}$, o nuo skaičiaus 95 tik per $95 - \frac{18}{19} \cdot 100 = \frac{5}{19}$.

28. (**A**) $\dfrac{2\pi}{3}$



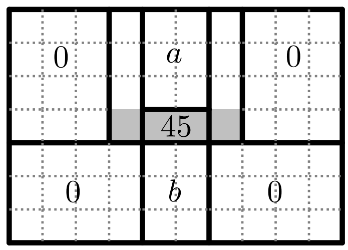
! Kiekvieno aštuonkampio kampų suma lygi $\pi \cdot (8 - 2) = 6\pi$. Todėl taisyklingojo aštuonkampio kiekvienas kampas lygus $\alpha = 6\pi : 8 = \frac{3\pi}{4}$. Nuspalvintos figūros kraštą, kurio ilgį turime rasti, sudaro apskritimų 8 lankeliai. Nagrinėkime bet kurį vieną iš jų ir raskime jo ilgį l.

Apskritimo, kurio spindulio ilgis yra 1, kiekvienas lankas lygus atitinkamam centriniam kampui (radianais). Paveikslėlyje $l = \angle DBE$ ir $AD = BA = BD = BE = CB = CE = 1$ (duotųjų apskritimų spinduliai). Lygiakraščių trikampių ABD ir BCE kampai lygūs $\frac{\pi}{3}$:

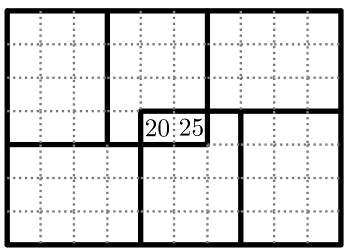
$$\alpha = \angle ABC = \frac{\pi}{3} + \angle DBE + \frac{\pi}{3}, \qquad l = \angle DBE = \alpha - \frac{2\pi}{3} = \pi\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

Gavome kiekvieno iš 8 lankelių ilgį. Nuspalvintos figūros perimetras lygus $8l = \dfrac{8\pi}{12} = \dfrac{2\pi}{3}$.

29. (**A**) -45



! Ieškomą sumą pažymėkime s. Padalykime lentelę į stačiakampius ir įrašykime jų skaičių sumas kaip viršutiniame paveikslėlyje. Nagrinėkime 4×4 kvadratą, kurio apatinė eilutė nudažyta pilkai. Jos skaičių sumą pažymėkime c. Kvadrato baltosios srities skaičių suma lygi 0, todėl jo visų skaičių suma yra c. Tada $s = b + c$. Dėl simetrijos analogiškai gaunama, kad $s = a + c$. Pašalinus kvadrato kairiausią stulpelį, likusių skaičių suma lygi 0. Todėl ir šio stulpelio skaičių suma lygi c. Vadinasi, $c + a + 45 = 0$ ir $s = a + c = -45$.



!! Ieškomą sumą pažymėkime s. Lentelėje nubrėžkime šešis 3×4 ir 4×3 stačiakampius (apatinis pav.). Du iš jų persidengia dviem langeliais. Užrašius kiekvieno stačiakampio 12 skaičių, gaunami lentelės visi 70 skaičių, tik persidengimo skaičiai 20 ir 25 užrašomi po antrą kartą. Visus 72 skaičius sudėjus, gaunama suma 0, nes tokios yra šešių stačiakampių skaičių sumos. Taigi $s + 20 + 25 = 0$ ir $s = -45$.

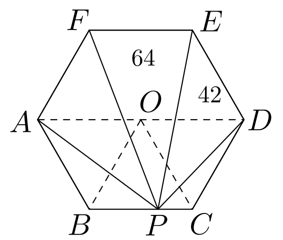
30. (B) 54

? Trikampio XYZ plotą žymėsime S_{XYZ}.

Atkarpos AD vidurio tašką pažymėkime O. Galima nuspėti, kad atkarpa AD yra lygiagreti su atkarpomis BC ir EF bei yra per vidurį tarp jų. Tada trikampio OBC aukštinė iš O yra du kartus trumpesnė už trikampio PEF aukštinę iš P, o jų atitinkamos kraštinės BC ir EF lygios. Taigi $S_{OBC} = S_{PEF} : 2 = 32$. Galima nuspėti, kad atkarpos OA, OB, …, OF dalija šešiakampį $ABCDEF$ į 6 lygius trikampius. Tad jo plotas S lygus $6S_{OBC} = 192$. Be to, $S_{ABP} = S_{OBP}$, $S_{DCP} = S_{OCP}$ (trikampiai turi po bendrą kraštinę, į kurią nuleistos lygios aukštinės). Vadinasi,

$$S_{ABP} + S_{DCP} = S_{OBP} + S_{OCP} = S_{OBC} = 32,$$

$$S_{APF} = S - S_{PEF} - S_{PDE} - (S_{ABP} + S_{DCP}) = 192 - 64 - 42 - 32 = 54.$$



! Taisyklingojo šešiakampio viršūnės visada priklauso vienam apskritimui, kurį dalija į 6 lygius lankus (pagal 6 centrinius kampus, lygius $2\pi : 6 = \frac{\pi}{3}$). Mūsų atveju šie lygūs lankai užtikrina, kad taškai A ir D dalija apskritimą į pusapskritimius (po tris lankus kiekviename iš jų), o atkarpa AD yra skersmuo ir eina per apskritimo centrą O. Savo ruožtu lygūs lankai AB, CD, DE ir FA užtikrina simetrijas (skersmens AD vidurio statmens ir tiesės AD atžvilgiu), dėl kurių atkarpos BC ir EF yra lygiagrečios su atkarpa AD ir nutolusios nuo jos tuo pačiu atstumu h.

Šešiakampio $ABCDEF$ kraštinės ilgį pažymėkime a. Šeši spinduliai OA, OB, …, OF dalija šešiakampį į 6 lygius trikampius (pagal dvi kraštines – apskritimo spindulius – ir kampą tarp jų). Trikampio OBC viršūnė O (kaip ir visa atkarpa AD) nutolusi nuo jo kraštinės BC atstumu h. Todėl jo plotas lygus $\frac{1}{2}ha$, o šešiakampio $ABCDEF$ plotas S lygus $6 \cdot \frac{1}{2}ha = 3ha$.

Trikampio PEF viršūnė P nutolusi nuo kraštinės EF atstumu $2h$, todėl jo plotas $S_1 = 64$ lygus $\frac{1}{2} \cdot 2h \cdot a = ha = \frac{S}{3}$. Vadinasi, $S = 64 \cdot 3 = 192$. Trikampių ABP ir DCP viršūnės A ir D nutolusios nuo kraštinių BP ir CP atstumu h, todėl jų plotų suma S_2 lygi

$$\frac{1}{2}h \cdot BP + \frac{1}{2}h \cdot CP = \frac{1}{2}h \cdot (BP + CP) = \frac{1}{2}h \cdot BC = \frac{1}{2}ha = \frac{S}{6} = \frac{192}{6} = 32.$$

Trikampio APF plotas lygus

$$S - S_1 - S_2 - 42 = 192 - 64 - 32 - 42 = 54.$$

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	B
2	A
3	D
4	D
5	C
6	A
7	B
8	D
9	C
10	E
11	A
12	C
13	C
14	B
15	E
16	B
17	A
18	B
19	E
20	E
21	B
22	B
23	C
24	D
25	D
26	C
27	D
28	A
29	A
30	B