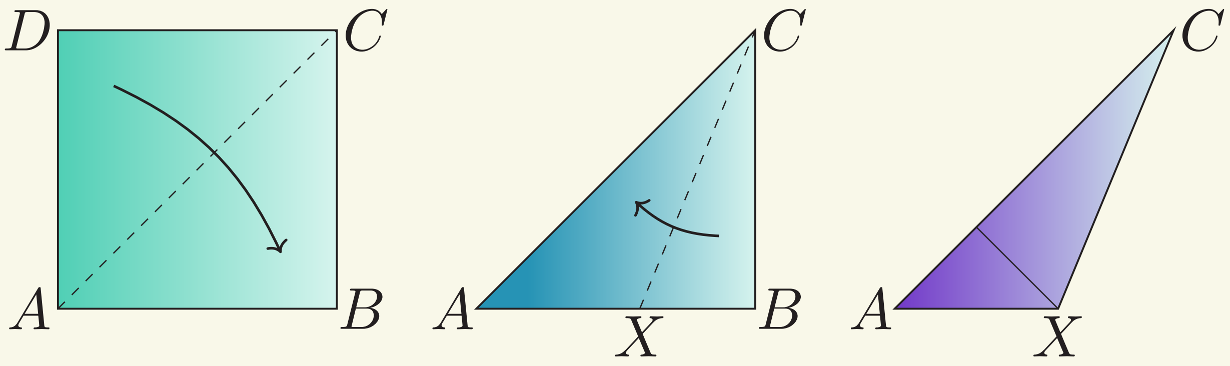
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA

Junioras

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI



2025

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2025. Junioras

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Turinys

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 31300 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2025 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis sprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto rinktis labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2025 metų kovo 20 dieną keliavo ir gausiai sprendė 9–10 klasių (*Junioro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

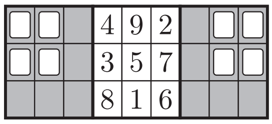
Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

2025 m. *Junioro* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

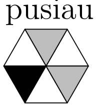
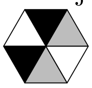
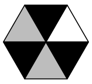
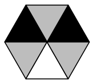
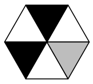
1. Lapelis padalytas į 27 langelius. Devyniuose iš jų įrašyti skaičiai, o dar aštuoniuose padarytos skylutės (žr. pav.). Tada pilkosios 3×3 dalys užlenktos, kad uždengtų vidurinę 3×3 dalį. Kokia yra skylutėse matomų skaičių suma?



A) 7 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 15

2. Lukas nubrėžė du trikampius. Kiekvieno iš jų viena kraštinė raudona. Į raudonąsias trikampių kraštines nuleistos aukštinės. Lukas pastebėjo, kad pirmajame trikampyje raudonoji kraštinė yra 50% ilgesnė nei antrajame, o nuleistoji aukštinė – trečdaliu trumpesnė nei antrajame. Koks yra pirmojo ir antrojo trikampių plotų santykis?
A) 1:1 **B)** 2:1 **C)** 3:1 **D)** 3:2 **E)** 2:3

3. Taisyklingieji šešiakampiai padalyti į lygiakraščius trikampius. Kuris šešiakampis pagal plotą yra pusiau baltas ir trečdaliu juodas?

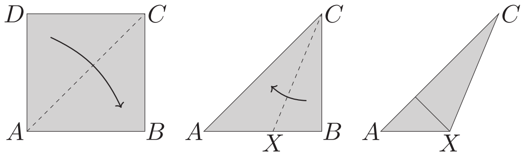
A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

4. Kengūradienis yra trečiasis kovo ketvirtadienis. Kuri kovo diena yra anksčiausias galimas kengūradienis?
A) 14-oji **B)** 15-oji **C)** 20-oji **D)** 21-oji **E)** 22-oji

5. Vienas receptas nurodo puodelį ryžių užpilti pusantro puodelio vandens. Laikydamasi recepto, Urtė užpylė vandeniu pusantro puodelio ryžių. Kiek vandens, matuojant puodeliais, panaudojo Urtė?
A) 1 **B)** 1,25 **C)** 1,75 **D)** 2,25 **E)** 2,5

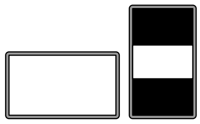
6. Elzė turi keturis žaislinius skaitmenis 2, 0, 2, 5. Iš jų ji nori sudaryti skaičių, didesnį už 2025. Kiek tokių skirtingų skaičių gali sudaryti Elzė?
A) 3 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 11

7. Kvadrato formos lapelis sulankstytas, kaip parodyta paveikslėlyje: lenkiant išilgai kvadrato įstrižainės AC, kad taškai B ir D sutaptų, o tada – išilgai linijos CX, kad taškas B atsidurtų atkarpoje AC. Tada $\angle AXC =$
A) 108° **B)** 112,5° **C)** 120° **D)** 145° **E)** 157,5°



8. Dėdė Martynas, sudėjęs sūnėnų Jono ir Tomo amžius (metais), gavo dviženklę sumą, didesnę už 40 ir parodančią, kiek metų yra jam pačiam. Jono ir Tomo amžių (metais) santykis lygus 19 : 17. Kiek metų Jonui?
A) 19 **B)** 34 **C)** 38 **D)** 57 **E)** 76

9. Išmaniojo telefono ekranas ir nuotrauka yra to paties 16 : 9 formato, tad nuotrauka užima visą ekraną. Pavertus telefoną vertikaliai, nuotrauka sumažėja, kad tilptų ekrane, bet jos formatas nepakinta (žr. pav.). Kurią ekrano dalį (pagal plotą) užima sumažėjusi nuotrauka?



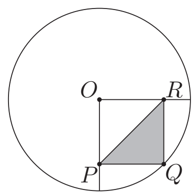
A) $\frac{3}{4}$ **B)** $\frac{9}{16}$ **C)** $\frac{27}{64}$ **D)** $\frac{32}{81}$ **E)** $\frac{81}{256}$

10. Natūraliojo keturženklio skaičiaus 80□□ du paskutiniai skaitmenys paslėpti. Jis dalijasi iš 8 ir iš 9. Kokia yra dviejų paslėptųjų skaitmenų sandauga?
A) 6 **B)** 16 **C)** 20 **D)** 24 **E)** 48

Klausimai po 4 taškus

11. Slibinų ūkyje laikomi aštuongalviai, penkiagalviai ir septyngalviai slibinai. Lygiai aštuoni slibinai nėra aštuongalviai, lygiai penki nėra penkiagalviai, o lygiai septyni nėra septyngalviai. Kiek iš viso slibinų yra ūkyje?
A) 10 **B)** 11 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 20

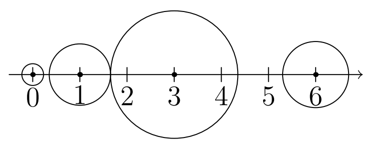
12. Kvadrato $OPQR$ viršūnė O yra apskritimo, einančio per viršūnę Q, centras (žr. pav.). Koks yra trikampio PQR plotas, jei apskritimo spindulio ilgis yra 10?



A) 25 **B)** 24,5 **C)** 22,5 **D)** 16 **E)** Kitas atsakymas

13. Nojus dvi dienas šaudė į taikinį. Jis šovė iš viso 27 kartus ir pataikė lygiai 18 kartų. Pirmąją dieną buvo taiklūs 50% Nojaus šūvių, o antrąją dieną – net 80%. Kiek taiklių šūvių Nojus atliko pirmąją dieną?
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

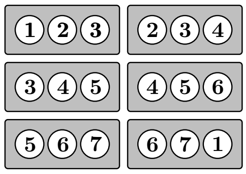
14. Plokštumoje nubrėžta skaičių tiesė. Kiekvienam iš jos taškų 0, 1, 3 ir 6 reikia nubrėžti po apskritimą su centru šiame taške. Jokio apskritimo viduje negali būti kito apskritimo taškų, bet apskritimai gali liestis (paveikslėlyje parodyta viena iš galimybių). Kokia yra didžiausia galima tokių keturių apskritimų spindulio ilgių suma $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$?



A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** Jokia sumos reikšmė nėra didžiausia galima

15. Maiše guli 18 rutulių, sunumeruotų skaičiais 1, 2, 3, ..., 18. Jokūbas nežiūrėdamas traukia rutulius iš maišo. Kiek mažiausiai rutulių jis turi ištraukti, jei nori būti tikras, kad ištraukė bent tris rutulius, pažymėtus pirminiais skaičiais?
A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

16. Austėja įvairių mokslų olimpiadose laimėjo du aukso ir penkis sidabro medalius. Jie tam tikra tvarka sunumeruoti skaičiais 1, 2, 3, …, 7. Austėja nori taip sudėti tris medalius vienoje dėžutėje, kad lygiai vienas iš jų būtų aukso medalis. Paveikslėlyje parodyti šeši būdai, kaip tai galima padaryti. Kokia yra dviejų aukso medalių numerių suma?

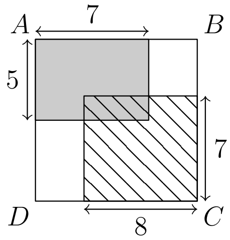


A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

17. Skaičius N yra didžiausias natūralusis šešiaženklis skaičius, kurio skaitmenų sandauga lygi 180. Kokia yra skaičiaus N skaitmenų suma?

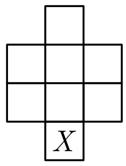
A) 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

18. Pilkasis 7×5 stačiakampis ir dryžuotasis 8×7 stačiakampis įbrėžti kvadrate $ABCD$, kaip parodyta paveikslėlyje. Šių dviejų stačiakampių sankirta vėlgi yra stačiakampis. Jo plotas lygus 18. Koks yra kvadrato $ABCD$ perimetras?



A) 30 **B)** 32 **C)** 38 **D)** 40 **E)** Kitas atsakymas

19. Pavaizduotos figūros langeliuose tam tikra tvarka po vieną įrašyti skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Kiekvienoje langelių, turinčių bent vieną bendrą viršūnę, poroje esantys skaičiai skiriasi daugiau nei per 1. Tada skaičius X lygus



A) 1 arba 8 **B)** 2 arba 7 **C)** 3 arba 6 **D)** 4 arba 5 **E)** 7 arba 8

20. Senelė paėmė didelį rutulio formos siūlų kamuolį ir ėmė megzti kojines. Numezgus 70 to paties dydžio kojinių, siūlų kamuolio spindulys sumažėjo perpus. Kiek dar tokių kojinių senelė gali numegzti iš likusių siūlų?

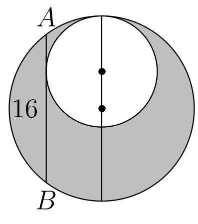
A) 70 **B)** 50 **C)** 30 **D)** 20 **E)** 10

Klausimai po 5 taškus

21. Trijų skirtingų pirminių skaičių sandauga yra 11 kartų didesnė už jų sumą S. Kokia yra didžiausia galima S reikšmė?

A) 20 **B)** 21 **C)** 25 **D)** 26 **E)** 28

22. Mažasis apskritimas liečia didįjį apskritimą ir jo stygą AB (žr. pav.). Ši styga yra lygiagreti su didžiojo apskritimo skersmeniu, kuriame yra ir mažojo apskritimo skersmuo. Koks yra nuspalvintos srities plotas, jei $AB = 16$?



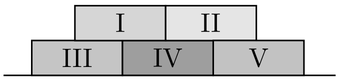
A) 36π **B)** 49π **C)** 64π **D)** 81π **E)** Trūksta informacijos

23. Stulpeliu padauginus natūralųjį keturženklį skaičių iš jo paskutinio skaitmens, gautas keturženklis skaičius, kurio tūkstančių ir vienetų skaitmenys atitinkamai sutampa su pradinio skaičiaus vienetų ir tūkstančių skaitmenimis (žr. pav.). Čia skaitmenys A, B, C, D, X, Y nebūtinai skirtingi, $D \neq 1$. Kiek yra tokių skaičių $\overline{ABCD}$?

$$\begin{array}{r} A\ B\ C\ D \\ \times \quad\quad\quad D \\ \hline D\ X\ Y\ A \end{array}$$

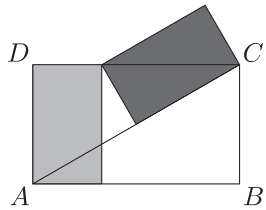
A) 1 **B)** 2 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

24. Penkios plytos sudėtos, kaip parodyta paveikslėlyje. Vienu ėjimu leidžiama pašalinti bet kurią plytą, ant kurios tuo metu neguli kita plyta. Kajus sugalvojo visus būdus, kaip penkiais ėjimais pašalinti visas plytas, tada atsitiktinai pasirinko ir pritaikė vieną iš jų. Kokia tikimybė, kad trečiuoju ėjimu jis pašalino plytą IV?



A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{5}$ **D)** $\frac{1}{6}$ **E)** $\frac{1}{8}$

25. Nubrėžus stačiakampio $ABCD$ įstrižainę AC, du lygūs nuspalvinti stačiakampiai gaunami, kaip parodyta paveikslėlyje. Vieno nuspalvinto stačiakampio plotas lygus 4. Koks yra stačiakampio $ABCD$ plotas?



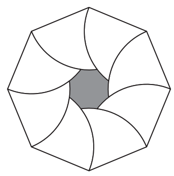
A) 12 **B)** 10 **C)** $8\sqrt{3}$ **D)** $4\sqrt{3}+6$ **E)** Kitas atsakymas

26. Skaičių sekoje $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$ kiekvienas narys, pradedant nuo a_3, lygus visų prieš jį einančių narių aritmetiniam vidurkiui. Pavyzdžiui, $a_4 = \frac{a_1+a_2+a_3}{3}$. Jei $a_1 = 8$ ir $a_{10} = 26$, tai $a_2 =$
A) 28 **B)** 32 **C)** 38 **D)** 44 **E)** 50

27. Dvylikai brolių, juodvarniais lakstančių, sesuo pasiuvo 6 baltus ir 6 žalius marškinius. Radusi brolių buveinę, sesuo turi palikti kiekvienam broliui ant lovos po marškinius. Yra trys brolių poros, kuriose vienas brolis turi gauti tos pačios spalvos marškinius kaip kitas, o likusių 6 brolių marškiniai gali būti bet kokių spalvų. Kiek yra skirtingų būdų parinkti marškinių spalvas visiems broliams juodvarniams?
A) 72 **B)** 86 **C)** 92 **D)** 102 **E)** 132

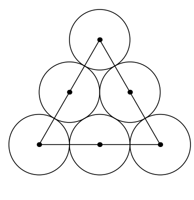
28. Užrašius skaitmenis 1, 2, 3, 4, 5, 6 tam tikra tvarka, gautas šešiaženklis skaičius $\overline{ABCDEF}$. Jo fragmentai A, $\overline{AB}$, $\overline{ABC}$, $\overline{ABCD}$, $\overline{ABCDE}$ ir $\overline{ABCDEF}$ dalijasi atitinkamai iš 1, 2, 3, 4, 5 ir 6. Kokios yra visos galimos skaitmens F reikšmės?
A) Tik 2 **B)** Tik 4 **C)** Tik 6 **D)** 2 ir 4 **E)** 4 ir 6

29. Taisyklingajame aštuonkampyje, kurio kraštinės ilgis lygus 1, nubrėžti aštuonių apskritimų lankai, kaip parodyta paveikslėlyje. Čia kiekvieno apskritimo centras yra viena iš aštuonkampio viršūnių, o spindulio ilgis lygus 1. Koks yra nuspalvintos figūros perimetras?



A) $\frac{2\pi}{3}$ **B)** $\frac{3\pi}{4}$ **C)** $\frac{4\pi}{5}$ **D)** π **E)** Kitas atsakymas

30. Šešiuose skrituliuose tam tikra tvarka po vieną įrašyti skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, 6 (žr. pav.). Trijų skaičių ties kiekviena trikampio kraštine suma yra tokia pati. Trijų skaičių ties trikampio viršūnėmis suma lygi s. Kiek yra galimų s reikšmių?

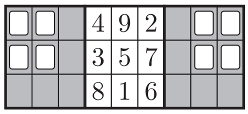


A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Junioro užduočių sprendimai

1. (D) 14

! Užlenkus tik kairiąją lapelio dalį, liktų matomi skaičiai 9, 2, 5, 7, o užlenkus tik dešiniąją – skaičiai 4, 9, 3, 5. Taigi užlenkus abi pilkąsias dalis, pro jų abiejų skylutes matytųsi du skaičiai: 9 ir 5. Jų suma lygi 14.



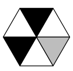
2. (A) 1:1

! Nagrinėjamų pirmojo trikampio kraštinės ir aukštinės ilgius atitinkamai pažymėkime a_1 ir h_1, o antrojo trikampio – atitinkamai a_2 ir h_2. Tada pirmojo ir antrojo trikampių plotai atitinkamai lygūs $S_1 = \frac{a_1h_1}{2}$ ir $S_2 = \frac{a_2h_2}{2}$. Gauname, kad

$$a_2 = a_1 + a_1 \cdot \frac{50\%}{100\%} = a_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}a_1, \qquad h_2 = h_1 - \frac{1}{3}h_1 = \frac{2}{3}h_1,$$

$$a_2h_2 = \frac{3}{2}a_1 \cdot \frac{2}{3}h_1 = a_1h_1, \qquad S_1 : S_2 = (a_1h_1) : (a_2h_2) = 1 : 1.$$

Plotų ir atkarpų ilgių raidėmis galėjome ir nežymėti. Pakanka suvokti, kad 50% padidinus a_1, plotas $\frac{a_1h_1}{2}$ padidėja pusantro karto ($1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$), o tada trečdaliu sumažinus h_1, plotas sumažėja pusantro karto ($1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = (\frac{3}{2})^{-1}$).

3. (E) 

! Lygiakraščiai trikampiai, į kuriuos padalyti šešiakampiai, yra lygūs. Todėl pusiau baltas ir trečdaliu juodas yra tas šešiakampis, kuriame pusė visų 6 trikampių yra balti, o trečdalis visų 6 trikampių yra juodi. Tris baltus ir du juodus trikampius matome tik atsakyme **E**.

4. (B) 15-oji

? Tarp bet kurių 7 iš eilės einančių dienų lygiai viena yra ketvirtadienis. Todėl per kovo pirmąsias $14 = 2 \cdot 7$ dienų visada būna lygiai du ketvirtadieniai, tad niekada nebūna kengūradienio.

Tuo tarpu 15 dienų jau gali pakakti. Galima nuspėti, kad kovo pirmoji gali išpulti bet kurią savaitės dieną, įskaitant ketvirtadienį. Pastaruoju atveju ketvirtadieniai bus kovo pirmoji, $1 + 7 = 8$-oji ir $8 + 7 = 15$-oji dienos. Taigi anksčiausias galimas kengūradienis yra kovo 15-oji.

Renkamės atsakymą **B**.

! Užbaikime **?** dalies sprendimą patikrindami, kad kovo pirmoji išties gali būti ketvirtadienis. Metai nuo vienos kovo pirmosios iki kitos trunka 365 dienas arba, jei įsiterpia vasario 29-oji, tai viena diena ilgiau. Kadangi 365 dalijasi iš 7 su liekana 1, tai kovo pirmoji, 2025 m. buvusi šeštadieniu, išpuola sekmadienį 2026 m., pirmadienį – 2027 m., ne antradienį, bet trečiadienį – keliamaisiais 2028 m., ketvirtadienį – 2029 m. (penktadienį – 2030 m., antradienį – 2033 m.).

Mąstant panašiai, tik abstrakčiau, galima įsitikinti, kad kiekviena metų diena (įskaitant atskirą vasario 29 d. atvejį) bent kartais sutampa su kiekviena savaitės diena.

5. (D) 2,25

! Laikytis recepto reiškia išsaugoti nurodytą naudojamų ryžių ir vandens kiekio proporciją: vandens turi būti pusantro karto daugiau. Taigi Urtė 1,5 puodelio ryžių užpylė vandeniu, kurio kiekis lygus $1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25$ (puodelio).

6. (C) 8

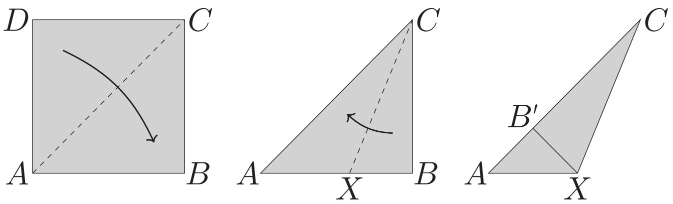
! Skaičiai, didesni už 2025, kuriuos galima sudaryti iš Elzės skaitmenų, yra keturženkliai ir prasideda arba skaitmeniu 5, arba skaitmeniu 2. Tinka visi trys tokie skaičiai, prasidedantys skaitmeniu 5 (5022, 5202, 5220). Jei pirmasis skaitmuo yra 2, tai likusius tris skirtingus skaitmenis 0, 2, 5 galima surikiuoti $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ būdais: antrąjį keturženklio skaičiaus skaitmenį galima pasirinkti 3 būdais, tada trečiąjį – 2 būdais, tada ketvirtąjį – tik vienu būdu. Skaičius 2025, gaunamas surikiavus tris skaitmenis 0, 2, 5 didėjimo tvarka, yra mažiausias iš šių 6 skaičių, tad kiti 5 yra didesni už jį. Iš viso gauname $3 + 5 = 8$ tinkamus skaičius.

7. (B) 112,5°

? Antruoju lenkimu trikampis BCX tampa jam lygiu trikampiu $B'CX$ (žr. pav.). Pažymėkime $\angle BXC = \angle B'XC = \alpha$. Galima nuspėti, kad trikampis $AB'X$ yra statusis lygiašonis ir todėl $\angle AXB' = 45°$. Tada $\angle AXC = \angle AXB' + \angle B'XC = 45° + \alpha$ ir

$$180° = \angle AXB = \angle AXC + \angle BXC = (45° + \alpha) + \alpha = 2 \cdot (45° + \alpha) - 45° = 2\angle AXC - 45°.$$

Vadinasi, $\angle AXC = (180° + 45°) : 2 = 112{,}5°$.



! Antruoju lenkimu atkarpa CB tampa tiesės CA atkarpa CB' (žr. pav.), o kampas BCX – to paties didumo kampu ACX. Taigi atkarpa CX yra trikampio ABC pusiaukampinė.

Kvadrato $ABCD$ įstrižainė AC dalija jį į du lygiašonius stačiuosius trikampius. Jų smailieji kampai lygūs 45°. Taigi $\angle ACB = 45°$ ir

$$\angle BCX = \angle ACB : 2 = 22{,}5°, \qquad \angle BXC = 90° - \angle BCX \quad \text{(statusis trikampis } BCX\text{)},$$

$$\angle AXC = 180° - \angle BXC = 90° + \angle BCX = 90° + 22{,}5° = 112{,}5°.$$

8. (C) 38

? Remiantis amžių santykiu 19 : 17, natūralu patikrinti galimybes, kai šie amžiai yra 19 ir 17 metų, tada $19 \cdot 2 = 38$ ir $17 \cdot 2 = 34$ metai, ir t. t. Jau antroji galimybė tinka: Jonui gali būti 38 metai, Tomui 34 metai, o jų dėdei $38 + 34 = 72$ metai.

Renkamės atsakymą **C**.

! Tarkime, kad Jonui yra a metų, o Tomui b metų. Čia a ir b yra natūralieji skaičiai, kuriems $a : b = 19 : 17$. Tada skaičius $17a = 19b$ dalijasi iš 19. Natūraliųjų skaičių sandauga $17 \cdot a$ dalijasi iš **pirminio** skaičiaus 19, todėl iš jo dalijasi bent vienas iš dauginamųjų. Kadangi 17 iš 19 nesidalija, tai dalijasi a, t. y. $a = 19k$, kur skaičius k natūralusis. Tada $b = 17a : 19 = 17k$ ir

$$a + b = 19k + 17k = 36k, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

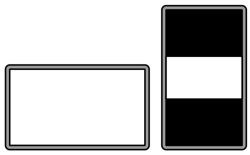
Dėdei Martynui yra $a + b$ metų – daugiau nei 40, tad $k > 1$, bet mažiau nei 100, tad $k < 3$. Vadinasi, $k = 2$, o Jonui yra $19k = 38$ metai.

9. (E) $\dfrac{81}{256}$

! Didelė ir maža nuotraukos yra stačiakampiai. Jų matmenis atitinkamai pažymėkime $16x \times 9x$ ir $16y \times 9y$. Mažos nuotraukos ilgis lygus telefono ekrano, tad ir didelės nuotraukos pločiui: $16y = 9x$. Taigi $y : x = 9 : 16$. Ieškomas mažos nuotraukos ir ekrano plotų santykis lygus

$$\frac{16y \cdot 9y}{16x \cdot 9x} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{9}{16}\right)^2 = \frac{81}{256}.$$

!! Nagrinėkime du stačiakampius – sumažėjusią nuotrauką ir telefono ekraną. Nuotraukos plotis lygus $\frac{9}{16}$ jos ilgio, šis lygus ekrano pločiui, o pastarasis lygus $\frac{9}{16}$ ekrano ilgio. Taigi nuotraukos plotis lygus $\frac{9}{16} \cdot \frac{9}{16} = \frac{81}{256}$ ekrano ilgio. Kiti du stačiakampių matmenys (nuotraukos ilgis ir ekrano plotis) lygūs. Todėl ieškomas šių stačiakampių plotų santykis lygus nuotraukos pločio ir ekrano ilgio santykiui $\frac{81}{256}$.



!!! Nagrinėkime sumažėjusią nuotrauką ir telefono ekraną. Tai yra panašiosios figūros – stačiakampiai, kurių ilgio ir pločio santykiai lygūs. Ieškomas jų plotų santykis lygus panašumo koeficiento k kvadratui. Skaičius k lygus nuotraukos ir ekrano ilgių santykiui. Nuotraukos ilgis lygus ekrano pločiui. Taigi k yra ekrano pločio ir ilgio santykis $\frac{9}{16}$, ir $k^2 = \frac{81}{256}$.

10. (D) 24

? Skaičius $\overline{80AB} = 8000 + a$ dalijasi iš 8, kai $a = \overline{AB} = 10A + B$ dalijasi iš 8, ir dalijasi iš 9, kai jo skaitmenų suma $8 + A + B$ dalijasi iš 9.

Tikrinant atsakymus, pakanka pastebėti, kad tinka **D)** $24 = A \cdot B$, kur $A = 6$, $B = 4$. Tada $a = 64$ dalijasi iš 8, o $8 + A + B = 18$ – iš 9.

Renkamės atsakymą **D**.

! Kartu su duotuoju skaičiumi $n = \overline{80AB}$ iš 9 dalijasi ir jo skaitmenų suma $s = 8 + A + B$. Kadangi $s \geqslant 8$ ir $s \leqslant 8 + 9 + 9 < 27$, tai $s = 9$ arba $s = 18$. Taigi $A + B = 1$ arba $A + B = 10$. Be to, n dalijasi iš 8, tad ir iš 2, o skaitmuo B yra lyginis. Liko galimybės

$$\overline{AB} = 10, \quad 82, \quad 64, \quad 46, \quad 28.$$

Kadangi $\overline{AB} = n - 8 \cdot 1000$ dalijasi iš 8, tai tinka tik $\overline{AB} = 64$. Vadinasi, paslėptųjų skaitmenų A ir B sandauga lygi $6 \cdot 4 = 24$.

11. (A) 10

! Bendrą slibinų skaičių ūkyje pažymėkime x. Tada aštuongalvių, penkiagalvių ir septyngalvių slibinų yra atitinkamai $x-8$, $x-5$ ir $x-7$. Gauname kitą bendro slibinų skaičiaus išraišką:

$$(x-8)+(x-5)+(x-7)=3x-20.$$

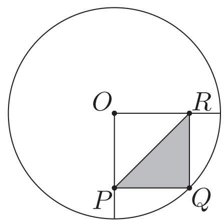
Vadinasi, $x=3x-20$ ir $x=10$.

!! Penkiagalvių ir septyngalvių slibinų yra 8, aštuongalvių ir septyngalvių yra 5, o aštuongalvių ir penkiagalvių yra 7. Sudėję visus tris skaičius, kiekvieną slibiną priskaičiuosime po du kartus. Todėl dvigubas visų slibinų skaičius yra $8+5+7=20$, ir ūkyje yra $20:2=10$ slibinų.

12. (A) 25

! Kvadrato $OPQR$ kraštinės ilgį pažymėkime a. Jo įstrižainė OQ yra duotojo apskritimo spindulys. Taigi $OQ=10$. Kvadrato įstrižainės ir kraštinės ilgių santykis lygus $\sqrt{2}$:

$$OQ:a=\sqrt{2}, \qquad a=OQ:\sqrt{2}=10:\sqrt{2}\ (=5\sqrt{2}).$$



Stačiojo trikampio PQR plotas S lygus $\frac{a^2}{2}$ (kaip pusė kvadrato $OPQR$ ploto a^2 arba pagal formulę $\frac{1}{2}PQ\cdot QR$). Vadinasi,

$$S=\left(10:\sqrt{2}\right)^2:2=(100:2):2=25.$$

13. (C) 6

? Pirmąją dieną taiklūs buvo pusė Nojaus šūvių, todėl šūvių skaičius buvo lyginis. Antrąją dieną taiklių ir netaiklių šūvių skaičiaus santykis buvo $80\%:20\%=4:1$, todėl šūvių skaičių sudarė $4+1=5$ lygios dalys. Taigi bendras šūvių skaičius 27 yra dviejų neneigiamų sveikųjų skaičių suma, kurių pirmasis yra lyginis, o antrasis nelyginis ir dalus iš 5. Šis antrasis dėmuo tegali būti 5, 15 arba 25, o pirmasis – pirmosios dienos šūvių skaičius – atitinkamai 22, 12 arba 2. Tada pirmąją dieną taiklių šūvių buvo 11, 6 arba 1. Atsakymų 11 ir 1 tarp pateiktųjų nėra.

Renkamės atsakymą **C**.

! Tarkime, kad Nojus pirmąją dieną taikliai šovė x kartų, o antrąją – $4y$ kartų. Turime rasti x.

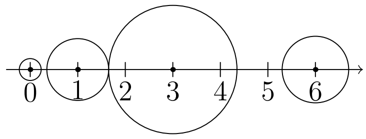
Pirmąją dieną taiklūs buvo pusė Nojaus šūvių, o antrąją dieną taiklių ir netaiklių šūvių skaičiaus santykis buvo $80\%:20\%=4:1$. Taigi pirmąją ir antrąją dienomis Nojus atitinkamai nepataikė po x ir y kartų, o šovė po $x+x=2x$ ir $4y+y=5y$ kartų. Nojus šovė iš viso $2x+5y=27$ kartus, o netaiklus buvo $x+y=27-18=9$ kartus. Vadinasi,

$$3x=5(x+y)-(2x+5y)=5\cdot 9-27=18, \qquad x=18:3=6.$$

!! Pirmosios dienos taiklių šūvių skaičių pažymėkime x. Jei tą dieną Nojus papildomai būtų atlikęs dar $3x$ taiklių šūvių, tai bendras netaiklių šūvių skaičius $27-18=9$ nepakistų, bet tos dienos taiklių ir netaiklių šūvių skaičiaus santykis iš $1:1$ taptų $(1+3):1=4:1$. Antrąją dieną jis toks pats $(80\%:20\%=4:1)$, tad toks būtų ir dviejų dienų laikotarpiu: 9 netaiklūs šūviai sudarytų 20% – penktadalį – visų šūvių. Iš viso šūvių būtų $9\cdot 5=45$, o papildomų šūvių skaičius $3x$ būtų lygus $45-27=18$. Vadinasi, $3x=18$ ir $x=6$.

14. (**B**) 4

? Tarkime, kad apskritimai, kurių centrai yra skaičių tiesės taškai 0, 1, 3 ir 6, nubrėžti reikiamu būdu (nebūtinai taip, kaip parodyta paveikslėlyje), o jų spindulio ilgiai atitinkamai yra r_1, r_2, r_3 ir r_4. Šių ilgių sumą pažymėkime s.



Apskritimai yra vieni kitų išorėje (gali nebent liestis). Intuityviai aišku, kad pirmasis (iš kairės pagal apskritimų centrus) apskritimas visas yra kairėje nuo antrojo – taip pat kaip antrasis nuo trečiojo, o šis nuo ketvirtojo. Ieškodami didžiausios s reikšmės, galime tarti, kad pirmasis apskritimas liečia antrąjį. Priešingu atveju didintume r_1, kol imtų liesti: pirmasis apskritimas vis tiek liktų visas kairėje nuo antrojo, o s tik padidėtų. Analogiškai galime tarti, kad ketvirtasis apskritimas liečia trečiąjį.

Pirmojo ir antrojo apskritimų lietimosi taškas yra skaičių tiesėje, atkarpoje tarp jų centrų – taškų 0 ir 1, nutolęs per r_1 nuo taško 0 ir per r_2 nuo taško 1. Todėl suma $r_1 + r_2$ lygi šios atkarpos ilgiui 1. Analogiškai $r_3 + r_4 = 6 - 3 = 3$. Vadinasi, šiuo atveju

$$s = (r_1 + r_2) + (r_3 + r_4) = 1 + 3 = 4,$$

o didesnės reikšmės skaičius s įgyti negali.

Renkamės atsakymą **B**.

! Pasitikrinkime, ar **?** dalyje teisingai nusprendėme, kad pirmasis apskritimas visas yra kairėje nuo antrojo (galbūt liečia jį; patikrinimas kitoms apskritimų poroms analogiškas). Šie apskritimai kerta skaičių tiesę atitinkamai taškuose $\pm r_1$ ir $1 \pm r_2$. Taškas $1 - r_2$ negali būti pirmojo apskritimo viduje, todėl $1 - r_2 \notin (-r_1;\, r_1)$. Analogiškai $r_1 \notin (1 - r_2;\, 1 + r_2)$. Jei $r_1 > 1 - r_2$, tai $-r_1 \geqslant 1 - r_2$ ir $r_1 \geqslant 1 + r_2$. Tačiau sudėję šias nelygybes, gauname prieštarą: $0 \geqslant 2$. Vadinasi, $r_1 \leqslant 1 - r_2$, ir mūsų intuicija **?** dalyje buvo teisinga: pirmasis apskritimas, visas būdamas kairėje nuo savo vertikalios liestinės taške r_1, yra visas kairėje ir nuo antrojo apskritimo vertikalios liestinės taške $1 - r_2$, taigi ir nuo antrojo apskritimo.

Sprendimą galime užbaigti ir kitaip nei **?** dalyje. Žinome, kad nelygybė $r_1 \leqslant 1 - r_2$ yra būtina, kad du nagrinėtieji apskritimai būtų vienas kito išorėje, bet ji ir pakankama, kad pirmasis visas būtų kairėje nuo antrojo (galbūt liesdamas jį). Taigi ekvivalenti nelygybė $r_1 + r_2 \leqslant 1$ kartu su analogiškomis nelygybėmis $r_2 + r_3 \leqslant 2$ ir $r_3 + r_4 \leqslant 3$ nusako visus teigiamų skaičių r_i ketvertus, tenkinančius uždavinio sąlygą (keturi apskritimai su duotais centrais vieni kitų išorėje). Šias tris nelygybes galima apibendrinti tokiu teiginiu: du apskritimai yra vienas kito išorėje (galbūt liesdamiesi) tada ir tik tada, kai jų spindulio ilgių suma yra ne didesnė už atstumą tarp jų centrų. Nelygybė $s \leqslant 4$ yra pirmosios ir trečiosios nelygybių suma. Lengva rasti tinkamą r_i ketvertą, kuriam $s = 4$. Pavyzdžiui, tinka $r_1 = r_2 = 0{,}5$, $r_3 = r_4 = 1{,}5$.

15. (**D**) 14

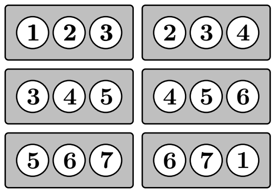
! Nuo 1 iki 18 yra 7 pirminiai skaičiai:

$$2,\quad 3,\quad 5,\quad 7,\quad 11,\quad 13,\quad 17.$$

Maiše yra $18 - 7 = 11$ rutulių, pažymėtų kitais skaičiais (sudėtiniai skaičiai ir skaičius 1). Ištraukus $11 + 2 = 13$ rutulių, gali nutikti, kad tik du iš 13 skaičių bus pirminiai. O ištraukus $11 + 3 = 14$ rutulių, daugiausiai 11 iš 14 skaičių nebus pirminiai, tad pirminiai garantuotai bus bent trys iš jų. Vadinasi, Jokūbas turi ištraukti bent 14 rutulių.

16. (C) 9

? Turime šešis skaičių trejetus (žr. pav.). Yra du tokie (aukso medalių) skaičiai, kurių kiekviename trejete yra po lygiai vieną. Jei vienas iš dviejų skaičių yra 1, tai pagal trejetą $(1, 2, 3)$ kitas nėra nei 2, nei 3. Pagal trejetą $(2, 3, 4)$ tai skaičius 4. Tačiau tarp duotųjų atsakymų skaičiaus $1 + 4 = 5$ nėra. Analogiškai gauname, kad poroje su skaičiumi 2 turi būti skaičius 5, su skaičiumi 3 – skaičius 6, ir t. t. Turime atsakymą **A)** $2 + 5 = 7$, bet trejete $(6, 7, 1)$ nėra nei 2, nei 5. Tuo tarpu medaliai 3 ir 6 galėjo būti aukso: visuose trejetuose yra po vieną iš šių skaičių.



Renkamės atsakymą **C)** $3 + 6 = 9$.

! Duotuose trejetuose $(1, 2, 3)$ ir $(4, 5, 6)$ visi 6 medaliai skirtingi. Tėra du aukso medaliai, jų yra po vieną kiekviename iš šių trejetų. Todėl likęs medalis Nr. 7 yra sidabro. Analogiškai nagrinėdami trejetus $(2, 3, 4)$ ir $(5, 6, 7)$ bei trejetus $(3, 4, 5)$ ir $(6, 7, 1)$, atitinkamai gauname, kad medaliai Nr. 1 ir Nr. 2 yra sidabro. Taigi aukso medaliu trejete $(1, 2, 3)$ tegali būti medalis Nr. 3, o trejete $(6, 7, 1)$ – Nr. 6. Vadinasi, ieškoma numerių suma lygi $3 + 6 = 9$.

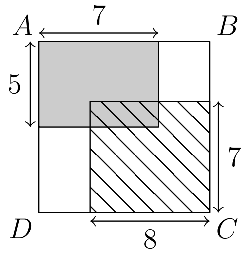
17. (A) 21

! Tarp natūraliųjų šešiaženklių skaičių didžiausi yra prasidedantieji skaitmeniu 9. Tarp šių didesni yra tie, kurių antrasis skaitmuo didesnis, o fiksavus antrąjį skaitmenį – tie, kurių trečiasis skaitmuo didesnis. Taigi pirmiausiai tikrinkime galimybę $N = \overline{9ABCDE}$. Čia skaitmuo A turėtų būti didžiausias, kuriam įmanoma gauti sandaugą $A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E = 180 : 9 = 20$. Ji nesidalija iš 9, 8, 7 ir 6, tad $A \leqslant 5$ ir pirmiausiai patikrinsime galimybę $A = 5$. Skaitmuo B turėtų būti didžiausias, kuriam įmanoma gauti $B \cdot C \cdot D \cdot E = 180 : 9 : 5 = 4$. Tai skaitmuo $B = 4$. Jam turime vienintelę galimybę: $C = D = E = 1$. Vadinasi, didžiausias tinkamas šešiaženklis skaičius yra $N = 954\,111$. Jo skaitmenų suma lygi 21.

18. (E) Kitas atsakymas

? Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgį pažymėkime a.

Galima nuspėti, kad pilkojo stačiakampio apatinė kraštinė yra tiek įsiterpusi dryžuotajame, kiek jos ilgis 7 sumoje su dryžuotojo stačiakampio horizontalios kraštinės ilgiu 8 viršija atstumą a tarp lygiagrečių atkarpų AD ir BC. Taigi pilkasis stačiakampis horizontaliai įsiterpęs dryžuotajame per $7 + 8 - a = 15 - a$, o vertikaliai – analogiškai per $5 + 7 - a = 12 - a$. Tai yra mažojo stačiakampio, kurio plotas yra 18, matmenys. Pertvarkę lygtį



$$(15 - a)(12 - a) = 18,$$

gausime kvadratinę lygtį su sprendiniais 9 ir 18. Antrasis iš jų netinka, nes $12 - a > 0$ (mažojo stačiakampio plotis). Taip pat galima pastebėti, kad nepertvarkytoje lygtyje abu dauginamieji mažėja likdami teigiami, kai a didėja nuo 0 iki 12. Taigi mažėja ir sandauga, reikšmę 18 įgydama vienintelį kartą – kai $a = 9$ (šį sprendinį lengva atspėti).

Vadinasi, $a = 9$, o kvadrato $ABCD$ perimetras lygus $4a = 36$.

Renkamės atsakymą **E**.

! Po dvi pilkojo ir dryžuotojo stačiakampių kraštines yra kvadrato $ABCD$ kraštinėse. Todėl kitos jų kraštinės su kvadrato kraštinėmis yra lygiagrečios arba statmenos. Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgį pažymėkime a, o mažojo stačiakampio (kurio plotas yra 18) horizontalios ir vertikalios kraštinių ilgius atitinkamai pažymėkime b ir c. Čia $bc = 18$.

Jei vertikalią tiesę AD lygiagrečiai pastumsime į dešinę per 7, tada į kairę per b bei į dešinę per 8, tai joje iš eilės atsidurs pilkojo (kartu ir mažojo) stačiakampio dešinioji kraštinė, mažojo (kartu ir dryžuotojo) stačiakampio kairioji kraštinė bei atkarpa BC. Taigi $7 - b + 8 = a$ ir $b = 15 - a$. Analogiškai gauname $c = 12 - a$. Toliau sprendimą galima užbaigti kaip **?** dalyje.

19. B 2 arba 7

! Du viduriniai langeliai turi net po 6 gretimus (bendrą viršūnę su jais turinčius) langelius. Tačiau skaičiams 2, 3, 4, 5, 6 ir 7 yra po du skaičius, kurie duotojoje figūroje negali būti jiems gretimi, todėl tik po 5 skaičius, kurie gali. Pavyzdžiui, skaičiai 2 ir 4 nėra gretimi skaičiui 3, ir tik 5 likę skaičiai 1, 5, 6, 7, 8 gali būti jam gretimi. Taigi dviejuose viduriniuose langeliuose tegali būti 1 ir 8. Skaičius 2, negretimas skaičiui 1, yra arba viršutiniame, arba apatiniame langelyje, kaip ir skaičius 7, negretimas skaičiui 8. Vadinasi, X yra vienas iš skaičių 2 ir 7.

Nors tai nebūtina, pateikiame vieną galimą langelių užpildymą (žr. pav.). Remiantis gautomis išvadomis, galima patikrinti, kad tinkamų užpildymų tėra keturi.

	7	
3	1	4
5	8	6
	2	

20. E 10

! Net nežinant rutulio tūrio formulės $\frac{4}{3}\pi r^3$, galima suvokti, kad k kartų sumažinus rutulio spindulį, tūris sumažėja k^3 kartų. Taip būtų su bet kokia erdvine figūra, kurios tiesinius matmenis sumažinę k kartų gautume panašią (tos pačios formos, bet nebūtinai to paties dydžio) figūrą.

Taigi siūlų kamuolio spinduliui sumažėjus du kartus, jo tūris sumažėjo $2^3 = 8$ kartus. Senelei liko $\frac{1}{8}$ siūlų, tad sunaudojo $\frac{7}{8}$ jų. Siūlų liko 7 kartus mažiau, nei sunaudota 70-iai kojinių. Vadinasi, iš likusių siūlų senelė gali numegzti $70 : 7 = 10$ kojinių.

21. D 26

! Trijų pirminių skaičių sandauga dalijasi iš pirminio skaičiaus 11. Todėl vienas iš jų dalijasi iš 11, o būdamas pirminis, pats lygus 11. Kitus du pirminius skaičius pažymėkime p ir q. Tada

$$11pq = 11S = 11(p + q + 11), \qquad pq = p + q + 11, \qquad q(p - 1) = p + 11 = (p - 1) + 12.$$

Gauname skaičiaus 12 skaidinį

$$12 = q(p - 1) - (p - 1) = (p - 1)(q - 1).$$

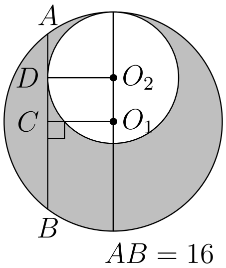
Čia $p - 1$ ir $q - 1$ yra sveikieji teigiami skaičiai $(p,\, q \geqslant 2)$. Nemažindami bendrumo galime tarti, kad $p - 1 < q - 1$ (duota, kad $p \neq q$). Skaičius 12 turi tik tris tokius skaidinius:

$$12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4; \qquad \text{atitinkamai} \quad (p, q) = (2, 13), \quad (3, 7), \quad (4, 5).$$

Uždavinio sąlygą tenkina tik dvi gautos poros (p, q), o trečiuoju atveju skaičius $p = 4$ sudėtinis. Iš vienintelių galimų S reikšmių $2 + 13 + 11 = 26$ ir $3 + 7 + 11 = 21$ didžiausia yra 26.

22. (C) 64π

! Nuspalvintos srities plotas S lygus didžiojo ir mažojo skritulių plotų skirtumui $\pi r_1^2 - \pi r_2^2$. Čia r_1 ir r_2 – atitinkami spindulio ilgiai. Pažymėkime taškus, kaip parodyta paveikslėlyje.



$AB = 16$

Lengva nuspėti, kad atstumas tarp lygiagrečių tiesių AB ir O_1O_2 lygus r_2. Iš tiesų, mažojo apskritimo liestinė AB taške D yra statmena spinduliui O_2D. Tad šis spindulys yra bendras lygiagrečių tiesių statmuo, o jo ilgis r_2 lygus atstumui tarp tiesių. Tada statmens O_1C ilgis taip pat yra r_2.

Galima nuspėti, kad iš O_1 į atkarpą AB išvestas statmuo O_1C dalija ją pusiau. Iš tiesų, $O_1A = O_1B = r_1$, trikampis O_1AB lygiašonis, o jo aukštinė O_1C yra ir pusiaukraštinė. Taigi $BC = AB : 2 = 16 : 2 = 8$.

Liko pritaikyti Pitagoro teoremą trikampiui O_1BC (arba analogiškai O_1AC):

$$r_1^2 = O_1B^2 = O_1C^2 + BC^2 = r_2^2 + 8^2, \qquad S = \pi(r_1^2 - r_2^2) = \pi \cdot 8^2 = 64\pi.$$

23. (E) 11

? Galima nuspėti: jei $A > 1$, tai sandauga $\overline{ABCD} \cdot D \geqslant 2\,000 \cdot D$ veikiausiai per didelė, kad prasidėtų skaitmeniu D. Taigi imkime $A = 1$. Sandaugos $\overline{DXYA}$ skaitmuo A lygus 1, kai $D = 9$: tada $\overline{ABCD} \cdot 9 = \overline{1BC9} \cdot 9$ baigiasi tuo pačiu skaitmeniu kaip $9 \cdot 9 = 81$.

Mažiausios galimos $\overline{1BC9}$ reikšmės gaunamos, kai $B = 0$, $C = 0, 1, \ldots, 9$. Padaugintos iš $D = 9$, jos didesnės už $9\,000 = 9 \cdot 1\,000$, bet mažesnės už $9\,999 = 9 \cdot 1\,111$, taigi keturženklės ir prasideda skaitmeniu $D = 9$, be to, baigiasi skaitmeniu $A = 1$ pagal $9 \cdot 9 = 81$. Gauname 10 tinkamų skaičių $\overline{ABCD}$. Dėl tų pačių priežasčių tinka vienuoliktas skaičius $n = 1\,109$. Daugiau tinkamų skaičių būti neturėtų, nes **E)** 11 yra didžiausias iš penkių duotųjų atsakymų.

Renkamės atsakymą **E**.

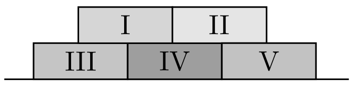
$$\begin{array}{r} A\ B\ C\ D \\ \times \qquad\quad D \\ \hline D\ X\ Y\ A \end{array}$$

! Nagrinėkime duotąją daugybą stulpeliu. Keturženklės sandaugos tūkstančių skaitmuo D nelygus 0. Jis gautas arba kaip sandauga $A \cdot D$, arba ją padidinus skaitmeniu, turėtu mintyje. Taigi $A \cdot D \leqslant D$, $A \leqslant 1$ ir $A = 1$. Vienetų skaitmuo $A = 1$ gautas kaip sandaugos $D \cdot D$ paskutinis skaitmuo. Čia $D \neq 1$, tad tinka tik $D = 9$ (pagal $D^2 = 81$). Kadangi

$$\overline{1BC9} \cdot 9 = \overline{9XY1} < 9\,999, \qquad \overline{1BC9} < 1\,111,$$

tai $B < 2$, o jei $B = 1$, tai tinka nebent $C = 0$. Mums liko 11 galimų $\overline{ABCD}$ reikšmių: $\overline{10C9}$, kur skaitmuo C bet koks, ir $1\,109$. Kodėl visos šios reikšmės tinka, aptarėme **?** dalyje.

24. (B) $\dfrac{1}{4}$



! Norint nuimti plytą IV trečiuoju ėjimu, pirmaisiais dviem ėjimais būtina nuimti abi viršutines plytas bet kokia tvarka: I, II arba II, I. Paskutiniais dviem ėjimais nuimamos likusios plytos: III, V arba V, III. Taigi yra $2 \cdot 2 = 4$ tinkami būdai nuimti plytas. Tarkime, kad iš viso būdų nuimti plytas yra n. Jie yra vienodai tikėtini, todėl ieškoma tikimybė p lygi $\frac{4}{n}$. Liko rasti n.

Pirmuoju ėjimu nuimama plyta I arba II. Tarkime, kad tai plyta I. Tada antruoju ėjimu nuimama plyta II arba III. Pirmuoju atveju likusias tris plytas galima nuimti bet kokia tvarka, ir gauname $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ būdus. Antruoju atveju po trečiojo ėjimo turi nelikti plytos II, o likusios plytos nuimamos dviem būdais: IV, V arba V, IV. Kai pirmuoju ėjimu nuimama plyta II, dėl simetrijos būdų yra tiek pat, t. y. $6 + 2 = 8$. Vadinasi, $n = 8 \cdot 2 = 16$ ir $p = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

(Taip pat žr. panašiai suformuluotą, bet kitaip sprendžiamą Senjoro grupės 24 uždavinį.)

25. (A) 12

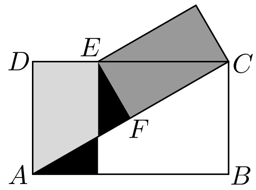
! Pažymėkime taškus, kaip parodyta paveikslėlyje. Tegu $AD = a$, $DE = b$. Tada $ab = 4$. Lygių nuspalvintųjų stačiakampių atitinkamos atkarpos lygios:

$$CF = AD = a, \qquad EF = DE = b, \qquad EC = EA.$$

Taigi trikampis AEC lygiašonis, o jo aukštinė EF yra ir jo pusiaukraštinė: $AC = 2CF = 2a$. Statieji trikampiai CEF ir CAD yra panašūs (bendras smailusis kampas). Vadinasi,

$$CE : EF = CA : AD = 2a : a = 2, \qquad CE = 2EF = 2b,$$

$$CD = CE + ED = 2b + b = 3b.$$



Stačiakampio $ABCD$ plotas lygus $AD \cdot CD = 3ab = 3 \cdot 4 = 12$.

!! Du stačiuosius trikampius nuspalvinkime juodai (žr. pav.). Jie panašūs, nes turi po tokį patį smailųjį kampą (kryžminiai kampai). Be to, jie ir lygūs, nes turi po tokį patį statinį prieš atitinkamus kampus (nuspalvintųjų stačiakampių plotis). Trikampį ACD sudaro pilkasis keturkampis, juodasis ir pilkasis trikampiai. Jų plotus atitinkamai pažymėkime S_1, S_2, S_3. Tada apatinio juodojo trikampio plotas taip pat yra S_2, ir $S_1 + S_2 = 4$. Kiekvieną stačiakampį jo įstrižainė dalija į du lygius trikampius. Todėl $S_3 = 4 : 2 = 2$, o stačiakampio $ABCD$ plotas lygus

$$2(S_1 + S_2 + S_3) = 2 \cdot (4 + 2) = 12.$$

26. (D) 44

? Atmetus lygybę $a_1 = 8$, uždavinio sąlygą tenkina seka 26, 26, …, 26, kurios visi 10 narių lygūs. Jei taip pakeistume a_1 ir a_2, kad suma $S = a_1 + a_2 = 52$ nepakistų, tai vieną po kitos gautume nepakitusias reikšmes $a_3 = \frac{S}{2}$, $a_4 = \frac{S+a_3}{3}$, …. Todėl reikšmės $a_1 = 8$, $a_2 = 52 - 8$, $a_3 = a_4 = \ldots = a_{10} = 26$ pilnai tenkina uždavinio sąlygą, ir reikšmė $a_2 = 44$ yra galima.

Renkamės atsakymą **D**.

! Aštuonios sumos $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, …, $a_1 + a_2 + \ldots + a_9$ atitinkamai lygios $2a_3, 3a_4, 4a_5, \ldots, 9a_{10}$. Gretimos sumos skiriasi tik vienu nariu, tad jas galima susieti:

$$3a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 2a_3 + a_3 = 3a_3, \qquad 4a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3a_4 + a_4 = 4a_4, \quad \text{ir t. t.}$$

Iš eilės gauname, kad $a_3 = a_4$, $a_4 = a_5$, …. Tai galima užrašyti abstraktesne forma:

$$ka_{k+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_k = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}) + a_k = (k-1)a_k + a_k = ka_k, \qquad a_{k+1} = a_k.$$

Čia $k = 3, 4, \ldots, 9$. Vadinasi, $a_3 = a_4 = \ldots = a_{10} = 26$ ir $a_2 = 2a_3 - a_1 = 52 - 8 = 44$.

27. (C) 92

! Yra trys ypatingos brolių poros. Žali marškiniai gali tekti trims, dviem, vienai arba nė vienai iš jų. Pirmuoju ir ketvirtuoju atvejais likusiems 6 broliams tektų atitinkamai vien balti arba vien žali marškiniai – turime po vieną būdą parinkti spalvas. Antruoju atveju parinkti spalvas reikštų pasirinkti dvi iš trijų porų, kurioms teks 4 žali marškiniai (3 galimybės), ir du iš likusių 6 brolių, kuriems teks likę dveji žali marškiniai ($C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ galimybių). Gauname $3 \cdot 15 = 45$ būdus parinkti spalvas. Likęs trečiasis atvejis analogiškas antrajam, tik spalvos sukeičiamos vietomis. Turime dar 45, o iš viso $2 + 45 \cdot 2 = 92$ būdus parinkti marškinių spalvas broliams.

28. (B) Tik 4

! Skaičiai $\overline{AB}$, $\overline{ABCD}$, $\overline{ABCDEF}$ dalijasi iš 2, 4 arba 6, todėl yra lyginiai. Taigi jie baigiasi lyginiais skaitmenimis B, D, F, ir šie tam tikra tvarka lygūs 2, 4, 6. Likę skaitmenys A, C, E tegali būti nelyginiai, o skaičiaus 5 kartotinis $\overline{ABCDE}$ baigiasi skaitmeniu 5. Vadinasi,

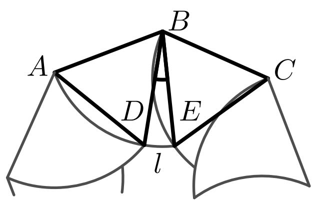
$$\{B,\,D,\,F\} = \{2,\,4,\,6\}, \qquad E = 5, \qquad \{A,\,C\} = \{1,\,3\}.$$

Nagrinėkime $\overline{ABC}$ ir $\overline{ABCD}$ dalumą. (Galima įsitikinti, kad kitų keturių $\overline{ABCDEF}$ fragmentų reikiamą dalumą jau užsitikrinome.) Kartu su $\overline{ABC}$ iš 3 dalijasi skaitmenų suma

$$A + B + C = (A + C) + B = (1 + 3) + B = 4 + B.$$

Čia $B = 2$, 4 arba 6. Tinka tik $B = 2$. Taigi $F = 4$ arba 6. Paskubėtume pasirinkę atsakymą **E**: reikia dar atsižvelgti į tai, kad $\overline{ABCD} = \overline{AB} \cdot 100 + \overline{CD} = \overline{AB} \cdot 25 \cdot 4 + \overline{CD}$ dalijasi iš 4. Taigi $\overline{CD}$ dalijasi iš 4. Čia $C = 1$ arba 3, o $D = 4$ arba 6. Iš 4 nesidalija 14 ir 34, tad $D = 6$, o vienintelė galima F reikšmė yra 4 (ir $\overline{ABCDEF} = 123\,654$ arba $321\,654$).

29. (A) $\dfrac{2\pi}{3}$



! Kiekvieno aštuonkampio kampų suma lygi $\pi \cdot (8 - 2) = 6\pi$. Todėl taisyklingojo aštuonkampio kiekvienas kampas lygus $\alpha = 6\pi : 8 = \frac{3\pi}{4}$. Nuspalvintos figūros kraštą, kurio ilgį turime rasti, sudaro apskritimų 8 lankeliai. Nagrinėkime bet kurį vieną iš jų ir raskime jo ilgį l.

Apskritimo, kurio spindulio ilgis yra 1, kiekvienas lankas lygus atitinkamam centriniam kampui (radianais). Paveikslėlyje $l = \angle DBE$ ir $AD = BA = BD = BE = CB = CE = 1$ (duotųjų apskritimų spinduliai). Lygiakraščių trikampių ABD ir BCE kampai lygūs $\frac{\pi}{3}$:

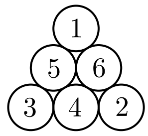
$$\alpha = \angle ABC = \frac{\pi}{3} + \angle DBE + \frac{\pi}{3}, \qquad l = \angle DBE = \alpha - \frac{2\pi}{3} = \pi\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

Gavome kiekvieno iš 8 lankelių ilgį. Nuspalvintos figūros perimetras lygus $8l = \dfrac{8\pi}{12} = \dfrac{2\pi}{3}$.

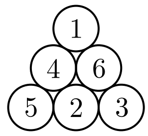
30. (D) 4

! Trijų skaičių ties kiekviena trikampio kraštine sumą pažymėkime S. Visų trijų tokių sumų suma yra 9 skaičių suma, gaunama imant visus 6 skaičius skrituliuose, o tris skaičius ties trikampio viršūnėmis – dar po vieną kartą. Taigi

$$3S = (1 + 2 + \ldots + 6) + s = 21 + s, \qquad s = 3S - 21 = 3(S - 7).$$



Skaičius s dalijasi iš 3, ir $1 + 2 + 3 \leqslant s \leqslant 4 + 5 + 6$. Taigi $s = 6$, 9, 12 arba 15.



Šios keturios s reikšmės įmanomos. Pirmosios dvi – atitinkamai įrašius ties trikampio viršūnėmis tris mažiausius skaičius 1, 2, 3 arba nelyginius skaičius 1, 3, 5, o tada kitus skritulius užpildžius pagal sąlygą $3S = 21 + s$ (žr. pav.). Reikšmės 15 ir 12 analogiškai gaunamos, ties trikampio viršūnėmis įrašius tris didžiausius arba lyginius skaičius. Tačiau to neprireiks pastebėjus: vietoj s gauname $21 - s$, skrituliuose kiekvieną skaičių x pakeitę į $7 - x$ (toks skaičių surašymas vėl tinkamas).

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	D
2	A
3	E
4	B
5	D
6	C
7	B
8	C
9	E
10	D
11	A
12	A
13	C
14	B
15	D
16	C
17	A
18	E
19	B
20	E
21	D
22	C
23	E
24	B
25	A
26	D
27	C
28	B
29	A
30	D