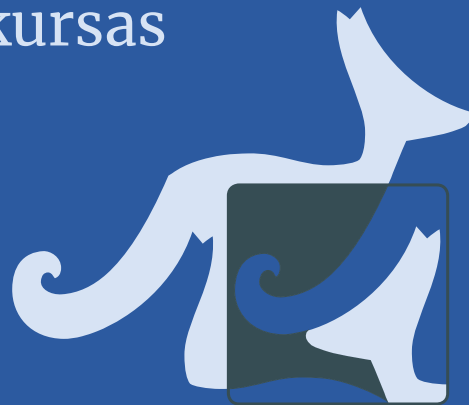


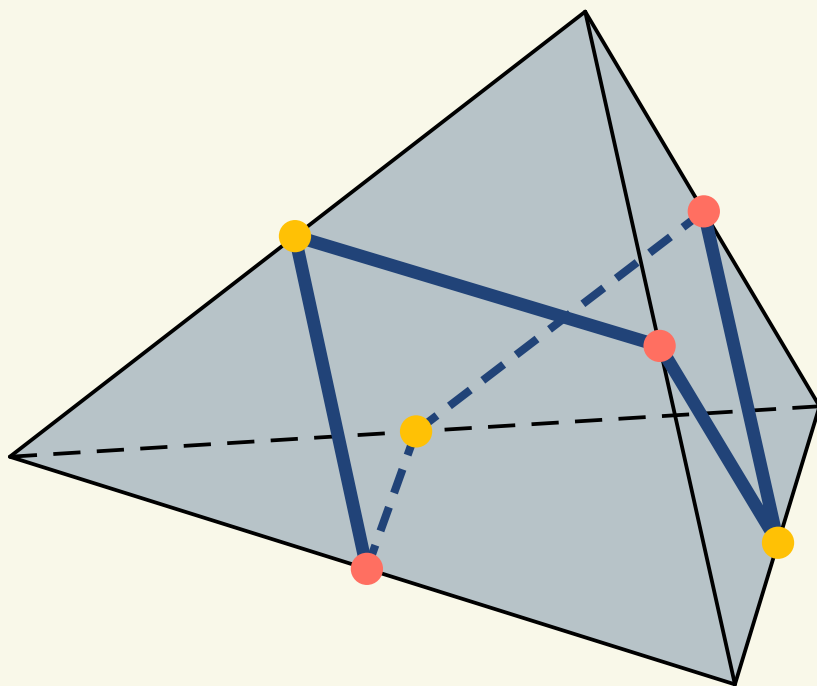
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA



Senjoras

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI



2024

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA



KENGŪRA 2024. Senjoras
TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Maketavo
Ugnė Gudžinskaitė

Turiny

Pratarmė	4
Sąlygos	6
Užduočių sprendimai	10
Atsakymai	25

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdienišku) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisiuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadyneje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spęsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 30300 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2024 metais.

Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamas, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis sprendžiant galima patirti žaislingumą, spėliojoimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrantančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto rinktis labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pra-

dininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Matematikos ir informatikos institutas bei Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pas-tangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažinę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai atečiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2024 metų kovo 21 dieną keliavo ir gausiai sprendė 11–12 klasių (*Senjoro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu !), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu ?). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais ??, !!, !!! ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

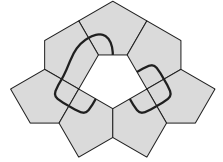
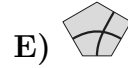
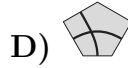
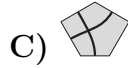
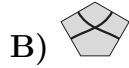
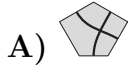
Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojai, šitiek daug turite!

Organizatoriai

2024 m. *Senjoro* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Elzė sudarė figūrą iš 8 vienodų detalių ir ant jos neatitraukdama pieštuko nubrėžė uždara liniją, kuri kerta pati save. Elzė pašalino vidurinę detalę, kaip parodyta paveikslėlyje dešinėje. Kaip atrodo pašalintoji detalė?

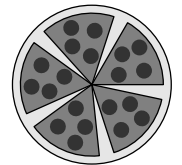


2. Kurį skaičių padidinus 2, gaunamas skaičiaus 10 kartotinis, sumažinus 2 – sveiką skaičiaus kvadratas, o sumažinus 2 kartus – pirminis skaičius?

A) 78 B) 58 C) 38 D) 18 E) 6

3. Luka supjaustė picą į 6 lygius gabalus (tiesiais pjūviais nuo picos centro). Vieną iš jų suvalgė, likusius ji išdėstė lygiais tarpais, kaip parodyta paveikslėlyje. Kampas tarp dviejų gretimų picos gabalų lygus

A) 5° B) 8° C) 9° D) 10° E) 12°

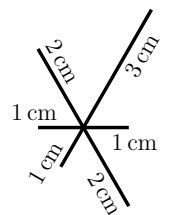


4. Augustas šiek tiek pakeitė standartinio lošimo kauliuko formą. Tikimybės, kad paridentas kauliukas atvirs 2, 3, 4 arba 5 akutėmis, nepakito – jos lygios $\frac{1}{6}$. Kokia dabar yra tikimybė, kad kauliukas atvirs 6 akutėmis, jei ji yra du kartus didesnė nei tikimybė, kad jis atvirs viena akute?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{7}{36}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{5}{18}$

5. Neatitraukdamas pieštuko nuo popieriaus lapo, Tomas nubrėžė figūrą, kurią sudaro šešios atkarpos. Paveikslėlyje parodyta ši figūra ir visų atkarpų ilgiai. Kokį trumpiausią kelią galėjo popieriumi nueiti pieštukas, Tomui brėžiant figūrą?

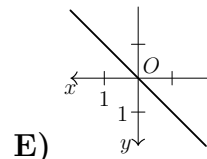
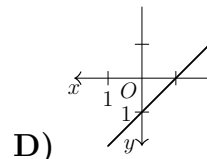
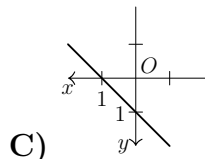
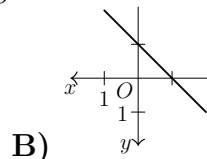
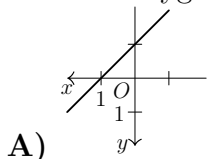
A) 14 cm B) 15 cm C) 16 cm D) 17 cm E) 18 cm



6. Suma $16^{15} + 16^{15} + 16^{15} + 16^{15}$ yra lygi

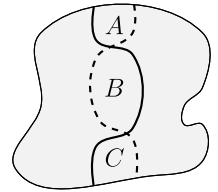
A) 4^{31} B) 4^{60} C) 4^{122} D) 16^{19} E) 16^{60}

7. Jokūbas tyrinėja stačiakampę koordinačių sistemą Oxy , kurios ašys nukreiptos priešingomis kryptimis nei įprasta: Ox į kairę, Oy žemyn. Kuriam paveikslėlyje pavaizduota tiesė, nusakoma lygtimi $y = x + 1$?



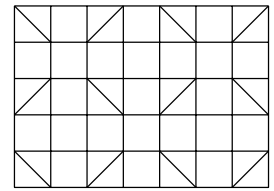
8. Ant stalo dugnu aukštyn stovi 6 stiklinės. Vienu ėjimu leidžiama pasirinkti bet kurias 4 stiklines ir jas apversti. Per kiek mažiausiai ėjimų galima pasiekti, kad visos 6 stiklinės stovėtų dugnu žemyn?
 A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

9. Per pievą eina du takeliai. Kiekvienas iš jų dalija pievą į dvi lygiaplotes dalis. Trijų pievos sričių, kurias riboja takeliai, plotai lygūs A , B ir C , kaip parodyta paveikslėlyje (čia takeliai pažymėti skirtingomis linijomis). Kuri lygybė yra garantuotai teisinga?



- A) $A = C$ B) $B = A + C$ C) $B = \frac{1}{2}(A + C)$ D) $B = \frac{2}{3}(A + C)$ E) $B = \frac{3}{5}(A + C)$

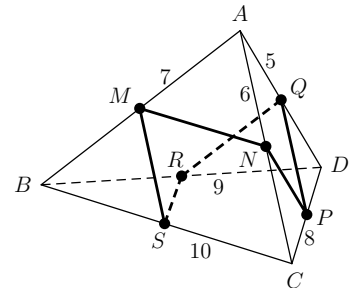
10. Ema iš plytelių sudėjo stačiakampį (žr. pav.). Ji panaudojo kelių spalvų kvadratinės ir trikampės plyteles. Kiekviena plytelė yra vienspalvė. Kiekvienos dvi plytelės, turinčios sąlyčio tašką (net jei vienintelį), yra skirtingų spalvų. Kiek mažiausiai spalvų gali turėti Emos sudėtas stačiakampis?



- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

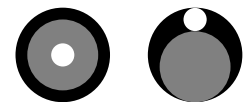
Klausimai po 4 taškus

11. Trikampės piramidės $ABCD$ briaunų vidurio taškai M , N , P , Q , R ir S sujungti atkarpomis, kaip parodyta paveikslėlyje. Šios atkarpos sudaro uždara laužtę $MNPQRSM$. Koks yra jos ilgis, jei $AD = 5$, $AC = 6$, $AB = 7$, $CD = 8$, $BD = 9$ ir $BC = 10$?
 A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) Kitas atsakymas



12. Jei lentoje užrašytas skaičius n , tai leidžiama jį nutrinti bei užrašyti vieną iš skaičių $6n$ ir $10n$. Kurio skaičiaus neįmanoma gauti tokiu būdu, pradžioje turint užrašytą skaičių 1?
 A) $2^{100} \cdot 3^{20} \cdot 5^{80}$ B) $2^{90} \cdot 3^{20} \cdot 5^{80}$ C) $2^{110} \cdot 3^{80} \cdot 5^{30}$ D) $2^{90} \cdot 3^{20} \cdot 5^{70}$ E) $2^{50} \cdot 5^{50}$

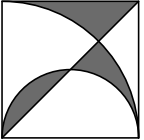
13. Rokas tris popierinius skritulius pradžioje sudėjo, kad sutaptų skritulių centrai, o vėliau – kad bet kurie du skritulius ribojantys apskritimai liestųsi (žr. pav.). Pirmosios gautos figūros juodosios srities plotas yra 7 kartus didesnis nei baltosios srities plotas. Koks yra dviejų gautųjų figūrų juodųjų sričių plotų santykis?



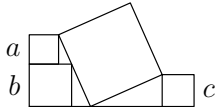
- A) 3 : 1 B) 4 : 3 C) 6 : 5 D) 7 : 6 E) 9 : 7

14. Yra žinoma, kad lygiai vienas iš teiginių A–E apie tam tikrą natūralųjį skaičių n yra teisingas. Kuris?

- A) Skaičius n dalijasi iš 3 B) Skaičius n dalijasi iš 6 C) Skaičius n yra nelyginis
 D) $n = 2$ E) Skaičius n yra pirminis

15. Sofija turi sudėti $3 \times 3 \times 3$ kubą iš 27 vienodų kubelių. Kiekvieną kubelį ji turi nudažyti viena iš dviejų spalvų: raudonai arba mėlynai. Sudėjus kubą, lygiai pusė jo paviršiaus turi būti raudona ir lygiai pusė – mėlyna. Kiek mažiausiai kubelių turi būti nudažyta raudonai?
 A) 9 B) 11 C) 12 D) 14 E) Kitas atsakymas
16. Kvadrato įstrižainė, pusapskritimis ir apskritimo ketvirtis dalija kvadratą į 6 dalis (žr. pav.). Koks yra užtušiuotos srities plotas, jei kvadrato kraštinės ilgis lygus 6?
 A) 9 B) 3π C) $6\pi - 9$ D) $\frac{10\pi}{3}$ E) 12
- 
17. Kurios trupmenos reikšmė didžiausia, jei skaičiams p ir q galioja nelygybės $0 < p < q$?
 A) $\frac{p+3q}{4}$ B) $\frac{p+2q}{3}$ C) $\frac{p+q}{2}$ D) $\frac{2p+q}{3}$ E) $\frac{3p+q}{4}$
18. Dviženklį skaičių $\overline{AB}$ ir $\overline{CD}$ aritmetinis vidurkis gaunamas, keturženklį skaičių $N = \overline{ABCD}$ padalijus iš 100. Kokia yra skaičiaus N skaitmenų suma?
 A) 14 B) 18 C) 21 D) 25 E) 27
19. Duoti trys sveikieji skaičiai a, b, c , nelygūs 0. Jokie du iš jų nėra lygūs. Lygtys $ax^2 + bx + c = 0$ ir $bx^2 + ax + c = 0$ turi bendrą sprendinį $x = x_0$. Kuris teiginys yra garantuotai teisingas?
 A) $x_0 = 0$ B) Lygtis $ax^2 + bx + c = 0$ turi vienintelį sprendinį C) $a > 0$ D) $b < 0$
 E) $a + b + c = 0$
20. Nojus laiko saldinius keturiose striukės kišenėse. Jis užrašė, po kiek saldinių yra kiekvienoje kišenėje. Jo sesuo Lėja užrašė, keliose kišenėse yra lygiai vienas saldinis, keliose lygiai du, keliose lygiai trys, o keliose – nė vieno saldainio. Lėja užrašė tuos pačius keturis skaičius kaip ir Nojus. Kiek iš viso saldinių yra striukės kišenėse?
 A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Klausimai po 5 taškus

21. Kiek yra natūraliųjų triženklį skaičių, turinčių bent vieną iš skaitmenų 1, 2 ir 3?
 A) 27 B) 147 C) 441 D) 557 E) 606
22. Tarp trijų mažesniųjų kvadratų, kurių kraštinių ilgiai yra a, b ir c , įbrėžtas didysis kvadratas, kaip parodyta paveikslėlyje. Didžiojo kvadrato kraštinės ilgis lygus
 A) $\frac{2}{3}(a+b+c)$ B) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ C) $\sqrt{(b-a)^2 + c^2}$ D) $\sqrt{(a+b)^2 + c^2}$
 E) $\sqrt{a^2 + ab + b^2 + c^2}$
- 

23. Augustė turi kelis vienodus dvylikasienius lošimo kauliukus. Paridenus tokį kauliuką, jis atvirsta vienu iš skaičių 1, 2, ..., 12, ir visi šie skaičiai yra vienodai tikėtini. Paridenus visus Augustės kauliukus, yra vienodai tikėtina, kad skaičiumi 12 atvirs lygiai vienas kauliukas ir kad šiuo skaičiumi neatvirs nė vienas kauliukas. Kiek kauliukų turi Augustė?
 A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

24. Domas turi šešias korteles. Kiekvienos kortelės abiejose pusėse yra po skaičių. Skaičių poros, esančios kortelėse, yra tokios: (5, 12), (3, 11), (0, 16), (7, 8), (4, 14) ir (9, 10). Domas tam tikra tvarka sudėjo korteles langeliuose (žr. pav.), atvertęs kiekvieną iš jų vienu iš dviejų atitinkamų skaičių, ir apskaičiavo gautojo reiškinių reikšmę.

$$\square + \square + \square - \square - \square - \square = ?$$

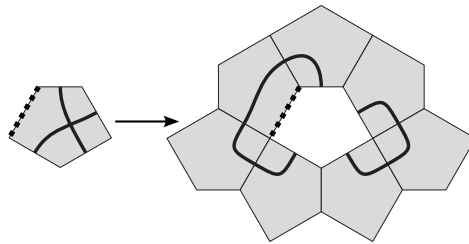
Kokią mažiausią reikšmę galėjo gauti Domas?

- A) -23 B) -24 C) -25 D) -26 E) -27
25. Dvi to paties ilgio žvakės uždegtos vienu metu. Jos dega skirtingais pastoviais greičiais: viena sudegs per 4 val., kita – per 5 val. Kiek laiko degs žvakės, kol viena taps 3 kartus ilgesnė už kitą?
 A) $\frac{40}{11}$ val. B) $\frac{45}{12}$ val. C) $\frac{63}{20}$ val. D) 3 val. E) $\frac{47}{14}$ val.
26. Daugianariui $p(x)$ lygybė $p(x+1) = x^2 - x + 2p(6)$ galioja su kiekvienu realiuoju x . Kokia yra daugianario $p(x)$ visų koeficientų suma?
 A) -6 B) 12 C) -40 D) 40 E) Kitas atsakymas
27. Kuri lygybė sieja skaičius x, y, z , jei $2^x = 3$, $2^y = 7$ ir $6^z = 7$?
 A) $z = \frac{y}{1+x}$ B) $z = \frac{x}{y} + 1$ C) $z = \frac{y}{x} - 1$ D) $z = \frac{x}{y-1}$ E) $z = y - \frac{1}{x}$
28. Funkcijai $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lygybė $f(20-x) = f(22+x)$ galioja su kiekvienu realiuoju x . Egzistuoja lygiai dvi x reikšmės, kurioms $f(x) = 0$. Kokia yra šių dviejų reikšmių suma?
 A) -1 B) 20 C) 21 D) 22 E) 42
29. Liepa pažymėjo 12 apskritimo taškų, kad atstumai tarp gretimų taškų būtų lygūs. Ji nori sujungti tris iš pažymėtųjų taškų, kad gautasis trikampis turėtų 45° kampą. Kiek tokių trikampių ji gali gauti?
 A) 48 B) 60 C) 72 D) 84 E) Kitas atsakymas
30. Keturženklis skaičius $\overline{ABCD}$, neturintis skaitmens 0, lygus $A^A + B^B + C^C + D^D$. Tada $A =$
 A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Senjoro užduočių sprendimai

1. ☒ C 

! Svarbu atkreipti dėmesį į detalių formą ir pastebėti, kad penkiakampio viena kraštinė yra trumpesnė už likusias keturias arba kad jo lygiai du kampai akivaizdžiai mažesni už likusius tris. Paaiškėja, kad norint atsakymuose parodytas detales įterpti pašalintos detalės vietoje, jas būtina pasukti 180° kampu – penkiakampio trumpąja kraštine aukštyn. Įsivaizdavus taip pasuktas detales **A–E**, lengva pasirinkti atsakymą **C** pagal tai, kurios kraštinės nekerta Elzės nubrėžta linija:



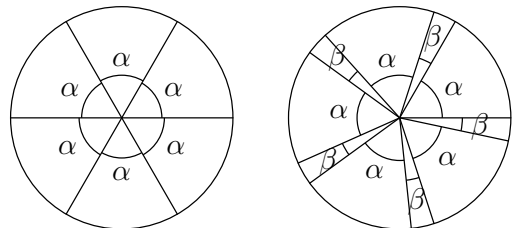
2. ☒ C 38

! Tikrinant atsakymus pakanka pastebėti, kad tinka **C** arba kad netinka kiti keturi atsakymai:

- A) $78 - 2 = 76$ nėra sveikojo skaičiaus kvadratas, o $78 : 2 = 39 = 3 \cdot 13$ nėra pirminis skaičius;
- B) $58 - 2 = 56$ nėra sveikojo skaičiaus kvadratas;
- C) $38 + 2 = 40$ yra skaičiaus 10 kartotinis, $38 - 2 = 6^2$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas, o $38 : 2 = 19$ yra pirminis skaičius;
- D) $18 : 2 = 9 = 3 \cdot 3$ nėra pirminis skaičius;
- E) $6 + 2 = 8$ nėra skaičiaus 10 kartotinis.

3. ☒ E 12°

! Picą padalijus į 6 lygius gabalus, skritulys padalintas į 6 lygias išpjovas, o pilnasis kampas padalintas į 6 lygius kampus. Kampus, į kuriuos padalytas pilnasis kampas prieš suvalgant picos gabalą ir jį suvalgius, pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje. Reikia rasti β .



Matome, kad $6\alpha = 360^\circ$ ir $5\alpha + 5\beta = 360^\circ$. Taigi

$$\alpha = 360^\circ : 6 = 60^\circ, \quad \alpha + \beta = 360^\circ : 5 = 72^\circ.$$

Vadinasi, $\beta = 72^\circ - \alpha = 72^\circ - 60^\circ = 12^\circ$.

!! Prieš suvalgant vieną picos gabalą, 6 lygūs gabalai sudaro skritulį, o ties picos viduriu 6 lygūs kampai sudaro pilnąjį kampą. Suvalgius vieną picos gabalą, lieka 5 tokie lygūs kampai, o šeštasis kampas – pilnojo kampo šeštadalis – išskaidomas į 5 lygius kampus tarpuose tarp gretimų picos gabalų. Taigi kiekvienas iš šių 5 kampų tarpuose tarp gabalų lygus pilnojo kampo šeštadalio penktadaliui $360^\circ : 6 : 5 = 12^\circ$.

4. (D) $\frac{2}{9}$

! Tikimybę, kad paridentas pakeistas kauliukas atvirs 1, 2, ..., 6 akutėmis, atitinkamai pažymėkime $p_1, p_2, \dots, p_6$. Reikia rasti p_6 .

Visų 6 tikimybių suma lygi 1:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_6 = 1, \quad p_1 + p_6 = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Kadangi $p_6 = 2p_1$, tai

$$\frac{1}{3} = p_1 + p_6 = 3p_1, \quad p_1 = \frac{1}{9}, \quad p_6 = \frac{2}{9}.$$

!! Pakeitus kauliuką, nepakito tikimybė, kad paridentas jis atvirs 2, 3, 4 arba 5 akutėmis (ji lygi $\frac{2}{3}$). Vadinasi, nepakito ir priešingo įvykio – kad kauliukas atvirs 1 arba 6 akutėmis – tikimybė p , lygi $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Kadangi kauliuko atvirtimas 6 akutėmis yra du kartus labiau tikėtinas nei jo atvirtimas viena akute, tai ieškoma tikimybė sudaro du trečdalius tikimybės p bei yra lygi $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

5. (B) 15 cm

? Galima nuspėti, kad pieštuko kelias būtų trumpiausias, jei jis brėžtų atkarpas, keliaudamas tiesiomis linijomis tarp taškų tokia tvarka:

$$A_1 \rightarrow O \rightarrow A_2 \rightarrow O \rightarrow A_3 \rightarrow O \rightarrow A_4 \rightarrow O \rightarrow A_5 \rightarrow O \rightarrow A_6.$$

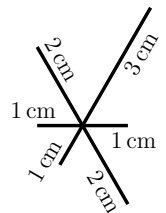
Čia O yra bendras visų šešių atkarpų galas, o taškai $A_1, A_2, \dots, A_6$ – tam tikra tvarka pasirinkti antrieji atkarpų galai. Tada pieštuko kelias s lygus

$$OA_1 + 2OA_2 + 2OA_3 + 2OA_4 + 2OA_5 + OA_6,$$

kur šešių atkarpų ilgiai $OA_1, OA_2, \dots, OA_6$ tam tikra (kol kas bet kokia) tvarka yra 1, 1, 1, 2, 2 ir 3 centimetrai. Kad gautume kuo mažesnę s reikšmę, natūralu imti kuo trumpesnes atkarpas, kurių ilgiai skaičiuojant s dauginami iš 2, taigi kuo ilgesnes likusias dvi atkarpas OA_1 ir OA_6 :

$$OA_1 = 3 \text{ cm}, \quad OA_6 = 2 \text{ cm}, \quad s = 3 + 2 \cdot (1 + 1 + 1 + 2) + 2 = 15 \text{ (cm)}.$$

Renkamės atsakymą B.



! Pieštukas turėjo nueiti bent jau viengubą kiekvienos atkarpos ilgį, kad jas nubrėžtų. Na-grinėkime bet kurią iš šešių atkarpų, kuri nėra nei pirmoji, kurią Tomas pradėjo brėžti, nei paskutinė, kurią Tomas baigė brėžti. Kad ją pilnai nubrėžtų, pieštukas turėjo kada nors iš visų atkarpų bendro galo O pasiekti kitą tos atkarpos galą bei grįžti atgal į tašką O , taigi turėjo nueiti mažiausiai dvigubą atkarpos ilgį. Taip turėjo nutikti, brėžiant mažiausiai keturias atkarpas. Tokių keturių atkarpų ilgius centimetrais pažymėkime x_1, x_2, x_3, x_4 , o likusių dviejų atkarpų ilgius centimetrais pažymėkime x_5 ir x_6 . Tada pieštuko nueitas kelias centimetrais yra ne trumpesnis nei

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 &= 2(x_1 + x_2 + \dots + x_6) - x_5 - x_6 \geq \\ &\geq 2(1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3) - 3 - 2 = 15. \end{aligned}$$

Kita vertus, pieštuko kelias gali būti lygus 15 cm: pieštukas nubrėžia 3 cm atkarpą, eidamas į tašką O iš kito jos galo, tada iš eilės nueina keturiomis atkarpomis, kurių ilgiai yra 1, 1, 1 ir 2 centimetrai, brėždamas kiekvieną atkarpą iš O ir grįždamas ja atgal, bei pabaigoje nubrėžia 2 cm atkarpą iš taško O .

6. (A) 4^{31}

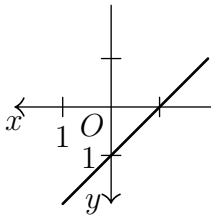
! Duotosios sumos dėmenis užrašykime kaip ketverto laipsnius:

$$16^{15} = (4^2)^{15} = 4^{2 \cdot 15} = 4^{30}.$$

Taigi duotoji suma lygi

$$4^{30} + 4^{30} + 4^{30} + 4^{30} = 4 \cdot 4^{30} = 4^{31}.$$

7. (D)



! Galima būtų pavaizduoti tiesę $y = x + 1$, koordinačių ašis nukreipus įprastomis kryptimis, o tada įsivaizduoti, kas nutinka, kai ašių kryptys pakeičiamos priešingomis. Bet vietoj to yra paprasčiau nustatyti du taškus, per kuriuos turi eiti duotoji tiesė. Pateiktuose atsakymuose aiškiausiai matyti, kokiuose taškuose ši tiesė galimai kerta koordinačių ašis. Tad jos sankirtos su ašimis taškus ir nustatykite.

Lygtįje $y = x + 1$ įrašę $x = 0$ ir $y = 0$, gauname, kad duotoji tiesė eina per taškus

$$(x_1; y_1) = (0; 1), \quad (x_2; y_2) = (-1; 0).$$

Vadinasi, ji kerta ašį Oy taške, kuris pažymėtas skaičiumi $y_1 = 1$, o ašį Ox – taške, kuris pažymėtas skaičiumi $x_2 = -1$. Vienintelė tiesė, einanti per šiuos du taškus, pavaizduota atsakyme D.

8. (B) 3

! Po pirmojo ėjimo keturios stiklinės stovės dugnu žemyn, o likusios dvi – dugnu aukštyn. Prieš paskutinį ėjimą turi būti atvirkščiai – dvi stiklinės dugnu žemyn, keturios dugnu aukštyn (tada liks apversti tas keturias stiklines). Todėl antrasis ėjimas negali būti paskutinis. Tačiau antruoju ėjimu jau galima gauti šią atvirkščią situaciją. Toks antrasis ėjimas aptinkamas, perrenkant galimybes, kurių tėra trys: apverčiamos dvi dar neliestos stiklinės, viena iš jų arba nė vienos. Tinka antroji galimybė: viena stiklinė apverčiama dugnu žemyn ir trys dugnu aukštyn. Taigi trijų ėjimų pakanka:

$$\underline{A A A A A A} \Rightarrow \underline{\check{Z} \check{Z} \check{Z} \check{Z} A A} \Rightarrow \underline{\check{Z} A A A \check{Z} A} \Rightarrow \underline{\check{Z} \check{Z} \check{Z} \check{Z} \check{Z} \check{Z}}$$

(Čia „A“ žymi stiklinę dugnu aukštyn, „Ž“ – stiklinę dugnu žemyn.)

9. (B) $B = A + C$

! Takeliai dalija pievą į penkias sritis. Trijų iš jų plotai pažymėti A , B ir C . Galima likusių dviejų sričių plotus pažymėti D ir E , o tada sąlygą, kad takeliai dalija pievą į lygiaplotes dalis, užrašyti lygtimis:

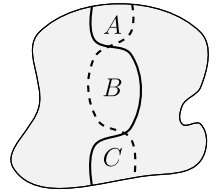
$$D + B = E + A + C, \quad D + A + C = E + B.$$

Abiejose lygtyse išreikškime $D - E$:

$$D - E = A + C - B, \quad D - E = B - A - C.$$

Vadinasi, $A + C - B = B - A - C$, $2B = 2A + 2C$ ir $B = A + C$.

!! Paveikslėlyje takeliai pažymėti ištisine ir punktyrine linijomis. Pievos dalies U , kuri yra kairėje nuo ištisinės linijos pažymėto takelio, plotas lygus pusei visos pievos ploto. Tą patį galima pasakyti apie pievos dalį V , kuri yra kairėje nuo punktyrų pažymėto takelio. Pievos dalis V gaunama, pievos dalyje U pašalinus sritį, kurios plotas yra B , ir pridėjus sritis, kurių plotai yra A ir C . Kadangi pievos dalies plotas nepakinta, tai $B = A + C$.



10. (C) 5

! Pažymėtame sudėtojo stačiakampio taške sueina 5 plytelės (žr. pav.). Kiekvienos dvi iš jų turi būti skirtingų spalvų, todėl stačiakampis negali turėti mažiau nei 5 spalvas.

Kita vertus, 5 spalvų pakanka. Paveikslėlyje parodytas tinkamo stačiakampio, kuriame plytelės yra 5 spalvų A , B , C , D , E , pavyzdys. Čia trijose stačiakampio eilutėse pakaitomis iš eilės eina spalvos A , B ir C , o kitose dviejose eilutėse – likusios dvi spalvos D ir E . Tos pačios spalvos plytelės šiame stačiakampyje visada yra arba dviejose eilutėse, kurias skiria dar bent viena eilutė, arba toje pačioje eilutėje, kur jas skiria kitos plytelės.

Vadinasi, mažiausias galimas stačiakampio spalvų skaičius yra 5.

$\begin{smallmatrix} B \\ A \end{smallmatrix}$	C	$\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}$	C	$\begin{smallmatrix} B \\ A \end{smallmatrix}$	C	$\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}$
D	E	D	E	D	E	D
$\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}$	C	$\begin{smallmatrix} B \\ A \end{smallmatrix}$	C	$\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}$	C	$\begin{smallmatrix} B \\ A \end{smallmatrix}$
D	E	D	E	D	E	D
$\begin{smallmatrix} B \\ A \end{smallmatrix}$	C	$\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}$	C	$\begin{smallmatrix} B \\ A \end{smallmatrix}$	C	$\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}$

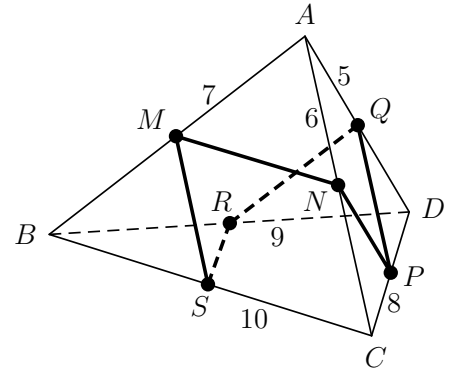
11. © 21

! Piramidės $ABCD$ sienos yra trikampiai, o taškai M, N, P, Q, R ir S yra šių trikampių kraštinių vidurio taškai. Todėl laužtę $MNPQRSM$ sudaro šių trikampių vidurio linijos. Kiekviena vidurio linija yra du kartus trumpesnė už atitinkamo trikampio atitinkamą kraštinę:

$$\begin{aligned} MN &= \frac{BC}{2}, & NP &= \frac{AD}{2}, & PQ &= \frac{AC}{2}, \\ QR &= \frac{AB}{2}, & RS &= \frac{CD}{2}, & SM &= \frac{AC}{2}. \end{aligned}$$

Laužtės $MNPQRSM$ ilgis lygus

$$(BC+AD+AC+AB+CD+AC) : 2 = (10+5+6+7+8+6) : 2 = 42 : 2 = 21.$$

12. (B) $2^{90} \cdot 3^{20} \cdot 5^{80}$

? Kadangi lentoje užrašytas skaičius kaskart dauginamas iš $2 \cdot 3$ arba iš $2 \cdot 5$, tai pradėjus nuo skaičiaus 1 galima gauti tik dvejetų, trejetų ir penketų sandaugas. Šios sandaugos negali būti bet kokios. Kaskart sandaugoje atsiranda vienas papildomas dvejetas, o su juo – vienas papildomas trejetas arba penketas. Todėl sandaugoje trejetų ir penketų kartu paėmus turi būti tiek pat, kiek dvejetų. Tačiau skaičius B) $2^{90} \cdot 3^{20} \cdot 5^{80}$ yra lygus 90 dvejetų ir net $20 + 80 = 100$ trejetų bei penketų sandaugai. Vadinasi, šio skaičiaus nurodytu būdu gauti neįmanoma.

Renkamės atsakymą B.

! Kad užbaigtume ? dalies sprendimą, liko patikrinti, kad keturis skaičius A, C, D ir E įmanoma gauti nurodytu būdu.

Jei lentoje užrašytas skaičius iš 6 padauginamas m kartų, o iš 10 padauginamas n kartų, tai, pradėjus nuo 1, lentoje gaunamas skaičius

$$a = 6^m \cdot 10^n = (2^m \cdot 3^m) \cdot (2^n \cdot 5^n) = 2^{m+n} \cdot 3^m \cdot 5^n.$$

Keturis atsakymų skaičius gauname taip:

A) $m = 20, n = 80$, tada $a = 2^{100} \cdot 3^{20} \cdot 5^{80}$;

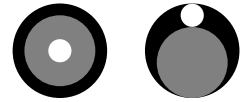
C) $m = 80, n = 30$, tada $a = 2^{110} \cdot 3^{80} \cdot 5^{30}$;

D) $m = 20, n = 70$, tada $a = 2^{90} \cdot 3^{20} \cdot 5^{70}$;

E) $m = 0, n = 50$, tada $a = 2^{50} \cdot 5^{50}$.

13. **D** 7 : 6

! Juodojo, pilkojo ir baltojo skritulių plotus atitinkamai pažymėkime S_1 , S_2 ir S_3 . Jų išreikšti per atitinkamus spindulių ilgius nebūtina. Taip pat nebūtina per daug įdėmiai svarstyti skritulių tarpusavio padėties dviejuose Roko gautose figūrose. Pirmojoje ir antrojoje figūrose juodosios srities plotas atitinkamai lygus $S_1 - S_2$ (juodojo skritulio dalis, kurios nedengia pilkasis skritulys) ir $S_1 - S_2 - S_3$ (juodajame skritulyje kiti du padėti be persidengimų). Pirmojoje figūroje baltosios srities plotas lygus S_3 (baltasis skritulys nedengiamas). Taigi



$$S_1 - S_2 = 7S_3, \quad S_1 - S_2 - S_3 = 7S_3 - S_3 = 6S_3.$$

Vadinasi, ieškomas plotų santykis lygus

$$7S_3 : 6S_3 = 7 : 6.$$

!! Pirmojoje Roko gautoje figūroje juodoji sritis pagal plotą lygi 7 tokiems baltiesiems skrituliams, kokį panaudojo Rokas. Antrojoje figūroje pašalinus baltąjį skritulį, jos juodoji sritis padidės ir plotu taps lygi pirmosios figūros juodajai sričiai (juodojo ir pilkojo skritulių plotų skirtumas), taigi 7 baltiesiems skrituliams. Antrojoje figūroje vėl padėjus baltąjį skritulį, likusi juodoji sritis pagal plotą lygi jau tik $7 - 1 = 6$ baltiesiems skrituliams, o ne 7 kaip pirmojoje figūroje. Vadinasi, ieškomas plotų santykis lygus 7 : 6.

14. **C** Skaičius n yra nelyginis

? Norint pasirinkti teisingą atsakymą, pakanka sugalvoti bent vieną n reikšmę, kuri tenkina uždavinio sąlygą. Pavyzdžiui, tinka $n = 1$: tada teiginys **C** teisingas, o kiti keturi teiginiai klaidingi. Šią mažiausią galimą reikšmę praleidus (pavyzdžiui, nežinant, kad skaičius 1 nėra pirminis) ir tiesiog iš eilės tikrinant n reikšmes, paieškos gali užtrukti: kita mažiausia tinkama n reikšmė lygi 25.

Renkamės atsakymą **C**.

! Kiekvienas pirminis skaičius yra arba nelyginis, arba lygus 2. Taigi jei teiginys **E** būtų teisingas, tai būtų teisingas vienas iš teiginių **C** ir **D**. Kadangi teisingas tik vienas iš penkių teiginių, tai teiginys **E** klaidingas, o skaičius n nėra pirminis. Tada $n \neq 2$, todėl klaidingas ir teiginys **D**.

Panašiai galima atmesti ir teiginį **A**. Kiekvienas natūralusis skaičius, kuris dalijasi iš 3, arba yra nelyginis, arba dalijasi iš 2, taigi ir iš $2 \cdot 3 = 6$. Todėl kartu su teiginiu **A** būtų teisingas ir vienas iš teiginių **B** ir **C**. Kadangi teisingas tik vienas iš penkių teiginių, tai teiginys **A** klaidingas, o skaičius n nesidalija iš 3. Tada n nesidalija iš 6, todėl klaidingas ir teiginys **B**.

Liko vienintelė galimybė: teiginys **C** teisingas, o kiti keturi teiginiai klaidingi. Taip iš tiesų gali būti, jei natūralusis skaičius n yra bet koks nelyginis nepirminis skaičius, nesidalijantis iš 3. Pavyzdžiui, tinka reikšmės

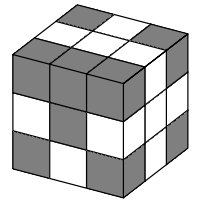
$$n = 1, 25, 35, 49, 55, 65, 77, \dots$$

15. **(E)** Kitas atsakymas

! Jei $3 \times 3 \times 3$ kubas sudėtas iš 27 kubelių, tai kiekvieną jo sieną sudaro $3 \cdot 3 = 9$ langeliai, o visą kubo paviršių sudaro $6 \cdot 9 = 54$ langeliai. Raudonų ir mėlynų langelių turi būti po $54 : 2 = 27$. Šie langeliai yra kubelių sienelės, esančios kubo paviršiuje. Tokias sienelės vadinkime išorinėmis.

Sudėjus kubą, kiekvienas kubelis turi daugiausiai tris išorines sienelės. Todėl raudonai turi būti nudažyti ne mažiau nei $27 : 3 = 9$ kubeliai. Be to, po tris išorines sienelės turi tik 8 kubeliai kubo kampuose. Raudonai nudažius tik 9 kubelius, sudėto kubo paviršiuje raudonų langelių būtų daugiausiai $3 \cdot 8 + 2 < 27$. Taigi raudonai turi būti nudažyta ne mažiau nei 10 kubelių.

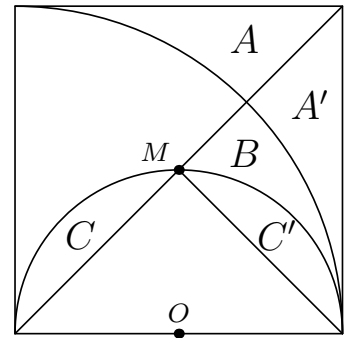
Kita vertus, 10 kubelių nudažius raudonai, o likusius 17 kubelių – mėlynai, 8 raudonus kubelius galima sudėti kubo kampuose, vieną raudoną kubelį padėti, kad jis turėtų dvi išorines sienelės (padėti ties vienos kubo briaunos centru), o likusį raudoną kubelį – kad turėtų vieną išorinę sienelę (padėti ties vienos kubo sienos centru; žr. pav.). Tada sudėto kubo paviršiuje raudonų langelių bus lygiai $3 \cdot 8 + 2 + 1 = 27$, o mėlynų langelių taip pat bus $54 - 27 = 27$. Vadinasi, mažiausias tinkamas raudonų kubelių skaičius yra 10.

16. **(A)** 9

? Kvadrato įstrižainės ir pusapskritimio sankirtos tašką pažymėkime M , o pusapskritimio centrą pažymėkime O . Taškas O yra pusapskritimio skersmens, taigi kvadrato kraštinės vidurio taškas. Kvadrato sritis pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje. Užtušuotąją sritį sudaro sritys A , B ir C .

Galima nuspėti, kad taškas M yra kvadrato centras (įstrižainių sankirtos taškas), kad sritys A ir A' yra simetriškos kvadrato įstrižainės atžvilgiu, o sritys C ir C' – tiesės OM atžvilgiu. Todėl užtušotos srities plotas lygus sričių A' , B ir C' plotų sumai. Šios trys sritys sudaro vieną iš keturių lygių trikampių, į kuriuos kvadratą dalija jo įstrižainės. Taigi ieškomas plotas lygus kvadrato ploto $6^2 = 36$ ketvirtadaliui $36 : 4 = 9$.

Renkamės atsakymą **A**.



! Užbaikime ? dalies sprendimą, pagrįsdami tai, ką joje tik nuspėjome.

Apskritimo bet kokio lanko simetrijos ašis yra to lanko galus jungiančios atkarpos (apskritimo stygos) vidurio statmuo. Mūsų atveju apskritimo ketvirčio styga yra kvadrato įstrižainė, o jos vidurio statmuo eina per kvadrato kitą įstrižainę. Taigi šios antrosios įstrižainės atžvilgiu yra simetriškas ne tik pats kvadratas, bet ir apskritimo ketvirtis. Tai pagrindžia pastebėjimą, kad jos atžvilgiu yra simetriškos sritys A ir A' .

Kvadrato centrą pažymėjus M' ir sujungus su kvadrato apatinės kraštinės vidurio tašku O , gaunama atkarpa OM' , dusyk trumpesnė už kvadrato kraštinę. Išvesta iš pusapskritimio centro O ir lygi pusei jo skersmens, ji yra pusapskritimio spindulys, o jos galo taškas M' priklauso pusapskritimiui. Jis priklauso ir kvadrato įstrižainėms, todėl $M' = M$. Kvadrato apatinė kraštinė jungia pusapskritimio galus, todėl jos vidurio statmuo $OM = OM'$ yra ne tik kvadrato su nubrėžtomis įstrižainėmis, bet ir pusapskritimio simetrijos ašis. Tai pagrindžia pastebėjimą, kad šios ašies atžvilgiu yra simetriškos sritys C ir C' , bei užbaigia uždavinio sprendimą.

17. **(A)** $\frac{p+3q}{4}$

? Pasirinkime tinkamas konkrečias p ir q reikšmes, pavyzdžiui, $p = 1$, $q = 2$, bei patikrinkime atsakymuose pateiktų penkių reiškinių reikšmes. Didžiausia visada bus reiškinio $\frac{p+3q}{4}$ reikšmė.

Renkamės atsakymą **A**.

! Penkis duotuosius reiškinius subendravardiklinkime:

A) $\frac{3p+9q}{12}$, B) $\frac{4p+8q}{12}$, C) $\frac{6p+6q}{12}$, D) $\frac{8p+4q}{12}$, E) $\frac{9p+3q}{12}$.

Kiekvienas skaitiklis lygus 12 skaičių, lygių p arba q , sumai. Pavyzdžiui, $4p+8q = p+p+p+p+q+q+q+\dots+q$. Kadangi $p < q$, tai tokia suma yra tuo didesnė, kuo joje daugiau dėmenų, lygių q , o ne p . Vadinasi, didžiausias iš penkių skaitiklių yra $3p+9q$, o didžiausią reikšmę iš penkių duotųjų reiškinių turi $\frac{p+3q}{4}$ (bet kuriems tinkamiems p ir q).

!! Kiekvienas iš penkių duotųjų reiškinių turi pavidalą $\frac{\alpha p + \beta q}{\alpha + \beta}$, kur $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Nagrinėkime bet koki šio pavidalo reiškinį. Pažymėkime $\gamma = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$. Tada $1 - \gamma = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$. Reiškinį pertvarkykime:

$$\frac{\alpha p + \beta q}{\alpha + \beta} = p \cdot \frac{\alpha}{\alpha + \beta} + q \cdot \frac{\beta}{\alpha + \beta} = (1 - \gamma)p + \gamma q = p + \gamma(q - p).$$

Čia $q - p > 0$. Kuo didesnė $\gamma > 0$ reikšmė, tuo didesnė yra $p + \gamma(q - p)$ reikšmė. Jei α ir β suvoksime kaip skaičiams p ir q suteiktus „svorius“, tai reiškinys $\frac{\alpha p + \beta q}{\alpha + \beta}$ įgyja tuo didesnę reikšmę, kuo didesnę „svorių“ sumos $\alpha + \beta$ dalį sudaro didesniojo skaičiaus q „svoris“ β . Penkiuose atsakymuose ši dalis didžiausia reiškiniui $\frac{p+3q}{4}$: skaičiaus q „svoriui“ tenka 3 iš 4 bendro „svorio“ dalių. Vadinasi, šio reiškinio reikšmė yra didesnė nei likusių keturių (bet kuriems tinkamiems p ir q).

18. **(B)** 18

? Atspėjus tinkamus skaičius $\overline{AB} = 49$ ir $\overline{CD} = 50$, gaunama skaičiaus N skaitmenų suma $4 + 9 + 5 + 0 = 18$. Skaičių $\overline{AB}$ ir $\overline{CD}$ reikšmes lengva atspėti, remiantis tokiais pastebėjimais:

- (i) skaičių $\overline{AB}$ ir $\overline{CD}$ vidurkis $\overline{AB,CD}$ yra tik šiek tiek didesnis nei skaičius $\overline{AB}$, todėl ir skaičius $\overline{CD} > \overline{AB}$ mažai skiriasi nuo $\overline{AB}$;
- (ii) skaičius $\overline{AB,CD}$ gaunamas, sveikąjį skaičių $\overline{AB} + \overline{CD}$ padalijus iš 2, todėl jo trupmeninė dalis $\overline{0,CD}$ lygi $0 = 0,00$ arba $0,5 = 0,50$.

Renkamės atsakymą **B**.

! Skaičių $\overline{AB}$ ir $\overline{CD}$ vidurkis lygus $\overline{AB,CD}$. Čia $C > 0$, nes C yra pirmasis dviženklis skaičiaus skaitmuo. Skaičius $\overline{AB,CD}$ yra didesnis nei $\overline{AB}$ ir mažesnis nei $\overline{AB} + 1$. Jei $\overline{CD} \leq \overline{AB}$, tai $\frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \leq \overline{AB}$. O jei $\overline{CD} \geq \overline{AB} + 2$, tai $\frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \geq \overline{AB} + 1$. Vadinasi, $\overline{CD} = \overline{AB} + 1$. Tada

$$\overline{AB,CD} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} = \overline{AB} + 0,5 = \overline{AB,50}, \quad \overline{CD} = 50, \quad \overline{AB} = 49.$$

Skaičiaus N skaitmenų suma lygi $A + B + C + D = 4 + 9 + 5 + 0 = 18$.

!! Pažymėkime $a = \overline{AB}$ ir $b = \overline{CD}$. Tada $N = 100a + b$ ir

$$\frac{a+b}{2} = \frac{N}{100} = \frac{100a+b}{100}, \quad 50a + 50b = 100a + b, \quad 50a = 49b.$$

Kadangi $49b$ dalijasi iš 50 , tai natūralusis dviženklis skaičius b dalijasi iš 50 , taigi lygus 50 . Tada $a = 49b : 50 = 49$, o skaičiaus $N = 4950$ skaitmenų suma lygi 18 .

19. (E) $a + b + c = 0$

? Pastebėkime, kad jei $a + b + c = 0$, tai abi lygtys $ax^2 + bx + c = 0$ ir $bx^2 + ax + c = 0$ turi sprendinį $x = 1$. Tad uždavinio sąlygą tenkina bet kokie skirtingi sveikieji skaičiai a, b, c , kurie nelygūs 0 , bet jų suma lygi 0 . Pavyzdžiui, tinka $(a, b, c) = (1, 2, -3)$ ir $(a, b, c) = (-1, 3, -2)$.

Šis pastebėjimas neįrodo, kad lygybė $a + b + c = 0$ galioja garantuotai: galbūt galėtų egzistuoti kitokie tinkami trejetai (a, b, c) . Nors jis neįrodo, kad atsakymas E teisingas, visgi leidžia atmesti likusius atsakymus. Pavyzdžiui, tinkamas trejetas $(a, b, c) = (-1, 3, -2)$ parodo, kad nelygybės $a > 0$ ir $b < 0$ yra nebūtinai teisingos. Taip atmetame atsakymus C ir D. Be to, lygtis $-x^2 + 3x - 2 = 0$ neturi sprendinio 0 , todėl galime atmesti atsakymą A. O kadangi šios lygties diskriminantas nelygus 0 , tai klaidingas yra ir atsakymas B.

Renkamės atsakymą E.

! Kadangi $x = x_0$ yra dviejų duotųjų lygčių sprendinys, tai teisingos lygybės

$$ax_0^2 + bx_0 + c = 0, \quad bx_0^2 + ax_0 + c = 0.$$

Atimkime vieną lygybę iš kitos:

$$0 = (ax_0^2 + bx_0 + c) - (bx_0^2 + ax_0 + c) = (a-b)x_0^2 + (b-a)x_0 = (a-b)x_0(x_0 - 1).$$

Kadangi $(a-b)x_0(x_0 - 1) = 0$, tai $a = b$, $x_0 = 0$ arba $x_0 = 1$. Jokie du iš skaičių a, b, c nėra lygūs, todėl $a \neq b$. Jei $x_0 = 0$, tai $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0$ ir $c = 0$. Tačiau skaičiai a, b, c nelygūs 0 , tad $x_0 \neq 0$.

Liko vienintelė galimybė: $x_0 = 1$. Vadinasi, garantuotai galioja lygybės

$$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0, \quad a + b + c = 0,$$

o atsakymas E teisingas. Kitų duotųjų atsakymų klaidingumu įsitikinome ? dalyje.

20. (C) 4

? Tarkime, kad Lėja iš eilės užrašė keturis skaičius x_1, x_2, x_3 ir x_0 . Kiekvienas x_i parodo, keli Nojaus skaičiai lygūs i (čia $i = 1, 2, 3, 0$). Nojaus skaičiai tie patys kaip Lėjos. Taigi pakanka atspėti arba išmąstyti konkretų neneigiamų sveikųjų skaičių ketvertą (x_1, x_2, x_3, x_0) , kur kiekvienas x_i parodo, keli skaičiai šiame rinkinyje lygūs i (čia $i = 1, 2, 3, 0$). Tokio rinkinio du tinkami pavyzdžiai yra $(2, 1, 0, 1)$ ir $(0, 2, 0, 2)$. Taigi saldinių keturiose kišenėse gali būti $2, 1, 0$ ir 1 arba $0, 2, 0$ ir 2 . Bet kuriuo iš dviejų atvejų matome, kad saldinių iš viso gali būti 4 .

Renkamės atsakymą C.

! Nojaus keturių skaičių suma s_1 parodo, kiek iš viso saldainių yra kišenėse. Ši skaičių ir turime nustatyti. Jis sutampa su Lėjos keturių skaičių suma s_2 , parodančia, kiek yra kišenių, kuriose yra 1, 2, 3 arba 0 saldainių. Kadangi tėra keturios kišenės, tai $s_2 \leq 4$. Be to, jei $s_2 < 4$, tai bent vienoje kišenėje turi būti ne mažiau nei 4 saldainiai ir tada $s_1 \geq 4$. Gauname prieštarą: $4 \leq s_1 = s_2 < 4$. Vadinasi, $s_2 = 4$. Kadangi $s_1 = s_2 = 4$, tai striukės kišenėse yra iš viso 4 saldainiai.

Pastebėsime, kad uždavinio situacija yra galima: du skaičių ketveto (x_1, x_2, x_3, x_0) pavyzdžiai pateikti ? dalyje. Nustačius, kad

$$4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_0 = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 0 \cdot x_0,$$

ir atlikus atvejų perranką, galima įrodyti, kad kitų tinkamų ketvertų nėra.

21. (E) 606

? Visus tinkamus triženklus skaičius išskaidykime į tris nesikertančias aibes:

- (i) skaičiai, kurių pirmasis skaitmuo yra 1, 2 arba 3;
- (ii) skaičiai, kurių pirmasis skaitmuo yra 4, 5, 6, 7, 8 arba 9, o antrasis skaitmuo yra 1, 2 arba 3;
- (iii) visi likę tinkami skaičiai – tokie, kurių pirmasis skaitmuo yra 4, 5, 6, 7, 8 arba 9, antrasis skaitmuo yra 0, 4, 5, 6, 7, 8 arba 9, o trečiasis skaitmuo yra 1, 2 arba 3.

Pirmojoje aibėje skaičiaus pirmasis skaitmuo gali įgyti 3 reikšmes, o antrasis ir trečiasis skaitmenys gali būti bet kokie ir įgyti po 10 reikšmių. Tad šioje aibėje yra $3 \cdot 10 \cdot 10$ skaičių. Analogiškai antrojoje ir trečiojoje aibėse yra atitinkamai po $6 \cdot 3 \cdot 10$ ir $6 \cdot 7 \cdot 3$ skaičių.

Vadinasi, iš viso tinkamų skaičių yra

$$3 \cdot 10 \cdot 10 + 6 \cdot 3 \cdot 10 + 6 \cdot 7 \cdot 3.$$

Net neskaičiuojant šios sumos tikslios reikšmės, galima įvertinti, kad ji didesnė nei 557, arba pastebėti, kad ji lyginė. Bet kuriuo atveju tinka tik vienas iš 5 pateiktųjų atsakymų.

Renkamės atsakymą **E**.

?? Visi 300 natūraliųjų triženklių skaičių nuo 100 iki 399 yra tinkami (pagal pirmąjį skaitmenį). Juos galima suskirstyti poromis. Likusius tinkamus skaičius taip pat galima suskirstyti poromis $(4AB, 5AB)$, $(6AB, 7AB)$, $(8AB, 9AB)$ (kiekvienos poros skaičiai skiriasi tik pirmuoju skaitmeniu, bent vienas iš skaitmenų A ir B lygus 1, 2 arba 3). Todėl tinkamų skaičių kiekis yra lyginis, o atsakymai **A–D** netinka.

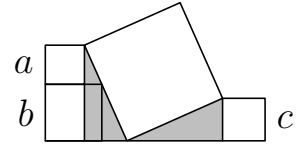
Renkamės atsakymą **E**.

! Galima greitai nustatyti, kiek yra natūraliųjų triženklių skaičių, kurie **netenkina** uždavinio sąlygos. Tai triženkliai skaičiai, kurių joks skaitmuo nėra lygus 1, 2 arba 3. Visus tokius skaičius gausime, laisvai pasirinkdami pirmąjį skaitmenį iš 6 elementų aibės $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, o antrąjį ir trečiąjį skaitmenis – iš 7 elementų aibės $\{0, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Taigi tokių skaičių yra $6 \cdot 7 \cdot 7 = 42 \cdot 7 = 294$.

Nuo 1 iki 999 yra $999 - 99 = 900$ natūraliųjų triženklių skaičių. Vadinasi, triženklių skaičių, kurie tenkina uždavinio sąlygą, yra $900 - 294 = 606$.

22. (D) $\sqrt{(a+b)^2 + c^2}$

? Didžiojo kvadrato kraštinės ilgį pažymėkime x . Kvadrato, kurio kraštinės ilgis yra a , vieną kraštinę pratęskime, kaip parodyta paveikslėlyje. Ši pratęsta kraštinė yra statmena dviem apatinio kvadrato kraštinėms. Galima nuspėti, kad du užtušuoti statieji trikampiai yra lygūs. Tada kiekvieno iš jų statinių ilgiai yra $a+b$ ir c , o įžambinės ilgis yra x . Remiantis Pitagoro teorema,

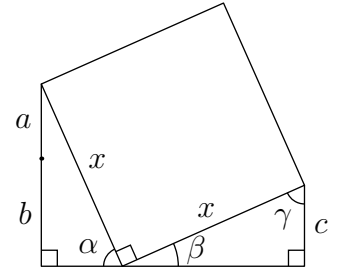


$$x^2 = (a+b)^2 + c^2, \quad x = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}.$$

! Užbaikime ? dalies sprendimą, įrodydami, kad du statieji trikampiai, užtušuoti ? dalies paveikslėlyje, yra lygūs. Pažymėkime jų kampus, kaip parodyta paveikslėlyje dešinėje. Tada

$$\alpha + 90^\circ + \beta = 180^\circ, \quad \alpha = 90^\circ - \beta = \gamma.$$

Statieji trikampiai panašūs, nes turi po to paties didumo α smailųjį kampą. Jų įžambinės lygios (kaip didžiojo kvadrato kraštinės), todėl šie trikampiai ne tik panašūs, bet ir lygūs. Tai ir reikėjo įrodyti.



Pastebėsime, kad ? dalyje gauta kraštinės ilgio x formulė nėra vienintelė. Pavyzdžiui, remiantis trikampių panašumu, galima įrodyti lygybę $ac = b^2 - a^2$, o tada ją panaudojant eliminuoti c įrodytoje formulėje. Kita vertus, joks iš reiškinių **A**, **B**, **C**, **E** negali nusakyti x net atskiroms a , b , c reikšmėms: galima įrodyti, kad šių reiškinių reikšmės visada mažesnės už x .

23. (D) 11

! Tarkime, kad kauliukų yra n . Paridenus kauliuką, jis atvirs skaičiumi 12 su tikimybe $\frac{1}{12}$ ir atvirs kitu skaičiumi su tikimybe $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$. Tad paridenus visus n kauliukų, tikimybė p_0 , kad nė vienas iš jų neatvirs skaičiumi 12, lygi $\left(\frac{11}{12}\right)^n = \frac{11^n}{12^n}$. Tuo tarpu tikimybė, kad vienas pasirinktas kauliukas atvirs skaičiumi 12, o kiti neatvirs, lygi $\frac{1}{12} \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{n-1} = \frac{11^{n-1}}{12^n}$. Tikimybė p_1 , kad lygiai vienas kauliukas (nesvarbu kuris) atvirs skaičiumi 12, lygi n tokių tikimybių sumai:

$$p_1 = \frac{11^{n-1}}{12^n} + \frac{11^{n-1}}{12^n} + \dots + \frac{11^{n-1}}{12^n} = n \cdot \frac{11^{n-1}}{12^n}, \quad \frac{11 \cdot 11^{n-1}}{12^n} = p_0 = p_1 = \frac{n 11^{n-1}}{12^n}, \quad n = 11.$$

!! Tarkime, kad Augustė turi n kauliukų. Juos sunumeruokime nuo pirmojo iki n -tojo.

Tarkime, kad Augustė parideno visus n kauliukų. Šio bandymo baigtis nusako skaičių rinkiniai $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, kur kiekvienas a_i parodo, koku skaičiumi atvirto i -tasis kauliukas. Įvykiui A_0 , kad joks kauliukas neatvirto skaičiumi 12, yra palankios baigtys $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, kur kiekvienas a_i yra vienas iš 11 skaičių 1, 2, ..., 11. Tokių baigčių yra 11^n . Įvykiui, kad k -tasis kauliukas atvirto skaičiumi 12, o joks kitas kauliukas šiuo skaičiumi neatvirto, yra palankios baigtys $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, kur $a_k = 12$ ir $a_i < 12$, kai $i \neq k$. Tokių baigčių yra 11^{n-1} . Įvykiui A_1 , kad lygiai vienas kauliukas (nesvarbu kuris) atvirto skaičiumi 12, palankių baigčių yra $11^{n-1} + 11^{n-1} + \dots + 11^{n-1} = n \cdot 11^{n-1}$.

Visos baigtys yra vienodai tikėtinos. Kadangi įvykių A_0 ir A_1 tikimybės lygios, tai jiems palankių baigčių yra po tiek pat: $11^n = n \cdot 11^{n-1}$ ir $n = 11$.

24. **D** –26

! Tarkime, jog kortelės langeliuose padėtos, kad reiškinių reikšmė būtų mažiausia.

$$\square + \square + \square - \square - \square - \square = ?$$

Tai įmanoma, nes galimybių skaičius tėra baigtinis. Tada trys kairiosios kortelės (kurių skaičiai sudedami) atverstos kiekviena savo mažesniuojų skaičiumi, o trys dešinėsios kortelės (kurių skaičiai atimami iš sumos) – kiekviena savo didesniuojų skaičiumi.

Nagrinėkime bet kurią iš trijų kairiųjų kortelių ir bet kurią iš trijų dešiniųjų. Jų atverstus skaičius atitinkamai pažymėkime x_1 ir x_2 , o jų nematomus skaičius – atitinkamai y_1 ir y_2 . Tada $x_1 < y_1$ ir $x_2 > y_2$. Jei kortelės sukeisime vietomis ir atversime skaičiais y_2 bei y_1 , tai reiškinių reikšmė nesumažės (pagal mūsų prielaidą, kad ji jau yra mažiausia galima). Todėl

$$y_2 - y_1 \geq x_1 - x_2, \quad x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2.$$

Vadinasi, bet kurios iš trijų kairiųjų kortelių skaičių suma yra ne didesnė nei bet kurios iš trijų dešiniųjų kortelių. Mažiausia galima reiškinių reikšmė gaunama, tris kortelės su mažiausiomis skaičių sumomis padėjus langeliuose kairėje nuo likusių trijų kortelių ir atvertus kiekvieną iš jų mažesniuojų skaičiumi, o kiekvieną iš likusių trijų kortelių atvertus didesniuojų skaičiumi. Kiekviename kortelių trejete jų tarpusavio tvarka nesvarbi.

Kortelių skaičių sumos lygios

$$3 + 11 = 14, \quad 7 + 8 = 15, \quad 0 + 16 = 16, \quad 5 + 12 = 17, \quad 4 + 14 = 18, \quad 9 + 10 = 19.$$

Taigi mažiausia galima reiškinių reikšmė lygi

$$3 + 7 + 0 - 12 - 14 - 10 = -26.$$

!! Tarkime, jog kortelės langeliuose padėtos, kad reiškinių reikšmė būtų mažiausia. Kaip ir ! dalyje, pastebėkime, kad tai įmanoma ir kad tada trys kairiosios kortelės atverstos kiekviena savo mažesniuojų skaičiumi, o trys dešinėsios kortelės – kiekviena savo didesniuojų skaičiumi.

Šešiuose langeliuose padėtų kortelių mažesnius skaičius iš eilės pažymėkime $a_1, a_2, \dots, a_6$. Kiekvienos kortelės dviejų skaičių sumą atitinkamai pažymėkime $s_1, s_2, \dots, s_6$. Tada a_i yra tam tikra tvarka surašyti skaičiai 5, 3, 0, 7, 4, 9, o s_i – tam tikra tvarka surašyti skaičiai

$$3 + 11 = 14, \quad 7 + 8 = 15, \quad 0 + 16 = 16, \quad 5 + 12 = 17, \quad 4 + 14 = 18, \quad 9 + 10 = 19.$$

Šešios kortelės atverstos skaičiais $a_1, a_2, a_3, s_4 - a_4, s_5 - a_5, s_6 - a_6$, o reiškinių reikšmė lygi

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 - (s_4 - a_4) - (s_5 - a_5) - (s_6 - a_6) &= \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_6) - s_4 - s_5 - s_6 = \\ &= (5 + 3 + 0 + 7 + 4 + 9) - s_4 - s_5 - s_6 = \\ &= 28 - s_4 - s_5 - s_6 \geq 28 - 17 - 18 - 19 = -26. \end{aligned}$$

Taigi reiškinių reikšmė ne mažesnė nei -26 . Kita vertus, šią reikšmę gausime, kai $s_4 = 17, s_5 = 18, s_6 = 19$, t. y. kai trys kortelės su tokiomis dviejų skaičių sumomis yra padėtos langeliuose dešinėje nuo kitų trijų kortelių. Vadinasi, -26 ir yra ieškoma reikšmė.

25. Ⓐ $\frac{40}{11}$ val.

! Tris kartus ilgesnė už kitą po kurio laiko taps lėčiau deganti žvakė, taigi toji, kuri sudegs per 5 val. Ieškomą laiką pažymėkime t (val.). Kokia kiekvienos žvakės dalis sudegs per šį laiką? Žvakei, kuri tolygiai sudega per 5 val., ji lygi $\frac{t}{5}$, o kitai žvakei ji analogiškai lygi $\frac{t}{4}$. Žvakių dalys, kurios liks po t val., atitinkamai lygios

$$1 - \frac{t}{5} \quad \text{ir} \quad 1 - \frac{t}{4}.$$

Kadangi pradiniai žvakių aukščiai lygūs, tai

$$\begin{aligned} 1 - \frac{t}{5} &= 3 \cdot \left(1 - \frac{t}{4}\right) = 3 - \frac{3t}{4}, \\ 2 &= 3 - 1 = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) \cdot t = \frac{11}{20}t, \\ t &= 2 : \frac{11}{20} = 2 \cdot \frac{20}{11} = \frac{40}{11} \text{ (val.)}. \end{aligned}$$

!! Tris kartus ilgesnė už kitą po kurio laiko taps antroji iš dviejų žvakių, kuri dega lėčiau ir sudega per 5 val. Žvakės dega tolygiai, greičių santykiui esant 4 : 5. Taigi tam tikrai pirmosios žvakės daliai sudegus, per tą patį laiką visada sudega penktadaliu trumpesnė antrosios žvakės dalis. Nagrinėkime žvakes tuo metu, kai antroji žvakė trisysk ilgesnė už pirmąją, bei jų aukščius l_1 ir $l_2 = 3l_1$. Kol pirmoji žvakė sudegs iki galo, antrosios žvakės aukštis sumažės per $\frac{4}{5}l_1 = \frac{4}{15}l_2$ ir taps lygus $\frac{11}{15}l_2$. Pirmajai žvakei sudegus iki galo, antroji žvakė sudega per valandą. Todėl antroji žvakė, kurios aukštis yra ne $\frac{11}{15}l_2$, bet l_2 , sudega per $\frac{15}{11}$ val. Vadinasi, nuo degimo pradžios ji sutrumpėja iki aukščio l_2 – trisysk didesnio nei pirmosios žvakės – per laiką, lygų

$$5 - \frac{15}{11} = \frac{40}{11} \text{ (val.)}.$$

26. Ⓒ -40

! Kai $x = 5$, tai $p(x + 1) = p(6)$. Tai pastebėjus, galima rasti $p(6)$ reikšmę. Įrašykime $x = 5$ duotojoje lygybėje:

$$\begin{aligned} p(6) &= p(5 + 1) = 5^2 - 5 + 2p(6) = 20 + 2p(6), \\ p(6) - 2p(6) &= 20, \quad p(6) = -20. \end{aligned}$$

Kad ir koks būtų daugianaris $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, jo visų koeficientų suma $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ lygi $p(1)$. Kad rastume ieškomą $p(1)$ reikšmę, duotojoje lygybėje įrašykime $x = 0$:

$$p(1) = p(0 + 1) = 0^2 - 0 + 2p(6) = 2p(6) = -40.$$

Atkreipkime dėmesį, kad paties daugianario $p(x)$ rasti nebūtina. Egzistuoja vienintelis tinkamas daugianaris:

$$p(x) = x^2 - 3x - 38.$$

Jis randamas, lygybėje $p(x + 1) = x^2 - x - 40$ atlikus keitinį $x = y - 1$.

27. (A) $z = \frac{y}{1+x}$

! Lygybėje $6^z = 7$ septynetą galime pakeisti dvejetainiu laipsniu 2^y . Jos kairiąją pusę galima užrašyti per dvejetą ir trejetą ($6 = 2 \cdot 3$), o trejetą vėlgi pakeisti dvejetainiu laipsniu 2^x . Taip gauname lygybę tik su dvejetainiais laipsniais $2^{\dots} = 2^{\dots}$:

$$2^y = 7 = 6^z = (2 \cdot 3)^z = (2 \cdot 2^x)^z = (2^{x+1})^z = 2^{(x+1)z}$$

$$2^{(x+1)z} = 2^y, \quad (x+1)z = y, \quad z = \frac{y}{1+x}.$$

!! Uždavinį galima išspręsti, logaritmuojant duotąsias lygybes:

$$x \ln 2 = \ln 3, \quad y \ln 2 = \ln 7, \quad z \ln 6 = \ln 7,$$

$$y \ln 2 = \ln 7 = z \ln 6 = z(\ln 2 + \ln 3) = z(\ln 2 + x \ln 2) = z(1+x) \ln 2,$$

$$y = z(1+x), \quad z = \frac{y}{1+x}.$$

28. (E) 42

! Lygybė $f(20-x) = f(22+x)$ reiškia, kad funkcijos $y = f(x)$ grafikas (įprastoje stačiakampėje koordinatų sistemoje Oxy) yra simetriškas (vertikalios) tiesės $x = 21$ atžvilgiu. Tai lengviau pastebėti, lygybėje atlikus keitinį $x = u - 1$ ir gavus ekvivalenčią lygybę $f(21-u) = f(21+u)$, galiojančią kiekvienam realiajam u . Čia skaičiai $x_1 = 21 - u$ ir $x_2 = 21 + u$ yra bet kokie du skaičiai, kuriuos pažymėjus Ox ašyje, skaičius 21 atsidurs tiksliai per vidurį tarp jų. Kadangi $f(x_1) = f(x_2)$, tai taškai $(x_1, f(x_1))$ ir $(x_2, f(x_2))$ visada yra simetriški tiesės $x = 21$ atžvilgiu.

Tai pastebėjus, lengva sugalvoti tinkamą funkciją f . Tinka bet kuri funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kurios grafikas yra simetriškas tiesės $x = 21$ atžvilgiu ir kerta Ox ašį lygiai dviejuose taškuose X_1 ir X_2 . Skaičiai X_1 ir X_2 būtų tos dvi x reikšmės, kurioms $f(x) = 0$. Pavyzdžiui, tinka bet kuri kvadratinė funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$, kuriai atitinkamos parabolės viršūnė yra tiesėje $x = 21$ ir kurios diskriminantas yra teigiamas. Kokios bebūtų X_1 ir X_2 reikšmės, Ox ašyje jos yra simetriškos taško 21 atžvilgiu. Tada tam tikram realiajam u turime

$$X_1 = 21 - u, \quad X_2 = 21 + u, \quad X_1 + X_2 = (21 - u) + (21 + u) = 42.$$

!! Tarkime, kad $f(X_1) = f(X_2) = 0$ ir $X_1 \neq X_2$. Tada $f(x) \neq 0$, kai $x \neq X_1$, $x \neq X_2$. Lygybėje $f(20-x) = f(22+x)$ įrašykime $x = 20 - X_1$:

$$f(X_1) = f(20 - (20 - X_1)) = f(22 + (20 - X_1)) = f(42 - X_1),$$

Kadangi $f(42 - X_1) = f(X_1) = 0$, tai skaičius $42 - X_1$ sutampa su X_1 arba su X_2 . Analogiškai skaičius $42 - X_2$ sutampa vienu iš skaičių X_1 ir X_2 . Jei $X_1 + X_2 \neq 42$, tai $42 - X_1 \neq X_2$ ir $42 - X_2 \neq X_1$. Tada

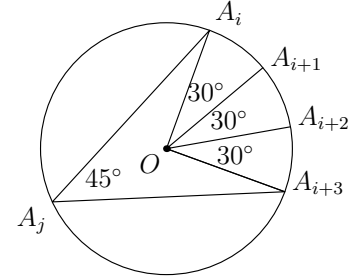
$$42 - X_1 = X_1, \quad 42 - X_2 = X_2, \quad X_1 = X_2 = 21.$$

Taip būti negali, nes $X_1 \neq X_2$. Vadinasi, $X_1 + X_2 = 42$.

29. **D** 84

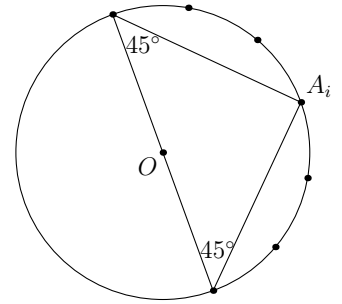
! Duotojo apskritimo centrą pažymėkime O , o 12 apskritimo taškų iš eilės pagal laikrodžio rodyklę pažymėkime $A_1, A_2, \dots, A_{12}$. Dėl patogumo laikykime, kad $A_{13} = A_1, A_{14} = A_2$ ir t. t. Turime taisyklingąjį 12-kampį $A_1 A_2 \dots A_{12}$. Apskritimo spinduliai $OA_1, OA_2, \dots, OA_{12}$ pilnąjį kampą dalija į 12 lygių kampų. Taigi $\angle A_i O A_{i+1} = 360^\circ : 12 = 30^\circ$ kiekvienam i .

Liepa turi pasirinkti skirtingus apskritimo taškus A_i, A_j, A_k , kuriems įbrėžtinis kampas $A_i A_j A_k$ lygus 45° . Taip bus tada ir tik tada, kai atitinkamas centrinis kampas $A_i O A_k$ lygus $2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$, o taškas A_j nėra šio stačiojo kampo viduje. Centrinį statųjį kampą $A_i O A_k$ turi sudaryti trys centriniai kampai po 30° . Todėl viena iš taisyklingojo 12-kampio viršūnių A_i ir A_k turi būti trečioji, skaičiuojant pagal laikrodžio rodyklę nuo kitos. Šių viršūnių tarpusavio tvarka nesvarbi, todėl galime laikyti, kad $A_k = A_{i+3}$.



Kiekvienam $i = 1, 2, \dots, 12$ pasirinkus taškus A_i ir $A_k = A_{i+3}$, likęs taškas A_j gali būti bet kuri 12-kampio viršūnė, išskyrus keturias viršūnes A_i, A_{i+1}, A_{i+2} ir A_{i+3} (žr. pav. viršuje). Kiekvienai iš 20 galimų i reikšmių turime po $12 - 4 = 8$ galimybes, kaip pasirinkti A_j .

Gauname $12 \cdot 8 = 96$ trejetus A_i, A_j, A_k , kuriems $\angle A_i A_j A_k = 45^\circ$. Tačiau tinkamų trikampių yra mažiau nei tokių 45° kampų, nes kai kurie iš 96 kampų priklauso tiems patiems trikampiams. Kiekvieną tokį trikampį, turintį du 45° kampus (taigi statųjį lygiašonį), gausime, pasirinkę bet kurį tašką A_i kaip to trikampo stačiojo kampo viršūnę bei pasirinkę dar dvi 12-kampio viršūnes, kurių kiekviena yra trečioji, skaičiuojant nuo A_i prieš arba pagal laikrodžio rodyklę (tai bus duotojo apskritimo skersmens galai; žr. pav. dešinėje). Tokių trikampių yra 12 ($A_1 A_4 A_7, A_2 A_5 A_8, \dots$). Juose yra $12 \cdot 2 = 24$ iš 96 gautųjų 45° kampų. Taigi yra $96 - 24 = 72$ tinkami trikampiai, turintys po vieną 45° kampą, ir dar 12 tinkamų trikampių, turinčių po du tokius kampus. Iš viso gauname $72 + 12 = 84$ tinkamus trikampius.

30. **B** 3

! Naudodamiesi lygybe $\overline{ABCD} = A^A + B^B + C^C + D^D$, mėginkime įvertinti, kiek dideli ar maži gali būti skaitmenys A, B, C, D .

Jei bent vienas iš skaitmenų yra ne mažesnis už 6, tai $\overline{ABCD} > 6^6 = 36^3 > 30^3 > 9\,999$. Todėl skaitmenys A, B, C, D priklauso aibei $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Kita vertus, jei jie visi mažesni už 5, tai

$$1\,111 \leq \overline{ABCD} \leq 4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4 = 4^5 = 1\,024 < 1\,111.$$

Todėl bent vienas iš skaitmenų A, B, C, D lygus 5.

Kadangi $5^5 = 125 \cdot 5 \cdot 5 > (120 \cdot 5) \cdot 5 = 3\,000$, tai $\overline{ABCD} > 3\,000$. Be to, jei skaičiaus $\overline{ABCD}$ bent du skaitmenys lygūs 5, tai $5\,555 \geq \overline{ABCD} > 5^5 + 5^5 > 6\,000$. Taigi lygiai vienas iš keturių skaitmenų lygus 5, o kiti trys yra ne didesni už 4. Vadinasi,

$$3\,000 < \overline{ABCD} \leq 5^5 + 4^4 + 4^4 + 4^4 = 625 \cdot 5 + 256 \cdot 3 < 4\,000, \quad A = 3.$$

Skaitmenų B, C, D reikšmių nustatyti nebūtina. Perrenkant likusias galimybes, gaunamas vienintelis tinkamas skaičius $\overline{ABCD}$, lygus $3435 = 3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5$.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	C
2	C
3	E
4	D
5	B
6	A
7	D
8	B
9	B
10	C
11	C
12	B
13	D
14	C
15	E
16	A
17	A
18	B
19	E
20	C
21	E
22	D
23	D
24	D
25	A
26	C
27	A
28	E
29	D
30	B