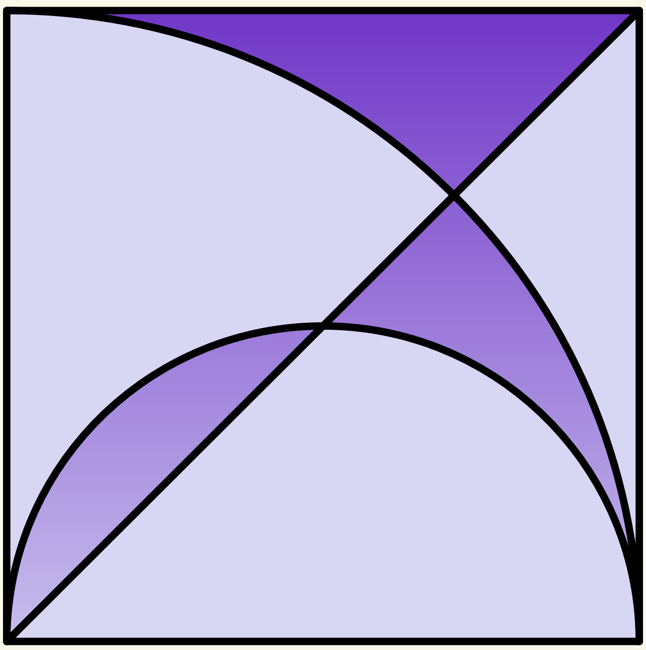
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA

Ekspertas

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI



2024

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2024. Ekspertas

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autoriai ir sudarytojai
Paulius Drungilas, Ugnė Gudžinskaitė,
Juozas Juvencijus Mačys, Aivaras Novikas,
Marytė Skakauskienė, Jonas Šiurys

Redaktorius
Juozas Juvencijus Mačys

Maketavo
Ugnė Gudžinskaitė

Turinys

Pratarmė

Matematikas mokytojas Peter O'Halloran iš Sidnėjaus aštuntajame praėjusio amžiaus dešimtmetyje pradėjo organizuoti matematikos konkursą australų mokiniams, kuris sulaukė stulbinančio pasisekimo. Konkurso užduotys buvo testinės (reikėjo pasirinkti vieną iš keleto pateiktų atsakymų), o dalyvių atsakymai tikrinami kompiuteriais.

1991 m. prancūzų pedagogų Deledicq šeima, įkvėpti australų sėkmės, suorganizavo panašų matematikos konkursą *Kengūra*, kuriame pirmaisiais metais dalyvavo per 120 tūkstančių mokinių iš Prancūzijos. 1994 m. šis konkursas prasiplėtė į dar 7 šalis: Baltarusiją, Ispaniją, Lenkiją, Olandiją, Rumuniją, Rusiją ir Vengriją. 1994 m. įsteigta asociacija „Kengūra be sienų“ vienija konkurso *Kengūra* šalis-nares. Kasmet vykstančiame asociacijai priklausančių šalių atstovų suvažiavime parenkamos konkurso užduotys ir sprendžiami organizaciniai klausimai.

Nuo 2011 m. konkurse visame pasaulyje kasmet dalyvauja per 6 milijonai mokinių, o asociacija „Kengūra be sienų“ vienija per 60 šalių. Daugiau informacijos apie matematikos konkursą *Kengūra* galima rasti čia:

`http://aksf.org/`

Lietuvoje konkursas *Kengūra* pradėtas rengti nuo 1995 m. Konkursas organizuojamas 6 amžiaus grupėms: *Nykštukas* (1–2 kl.), *Mažylis* (3–4 kl.), *Bičiulis* (5–6 kl.), *Kadetas* (7–8 kl.), *Junioras* (9–10 kl.) ir *Senjoras* (11–12 kl.).

Konkursas kasmet vyksta trečiąjį kovo ketvirtadienį. Kiekvienas konkurso dalyvis gauna užduočių lapą ir dalyvio kortelę, kurioje pažymi atsakymus. Visų dalyvių kortelės nuskenuojamos ir apdorojamos kompiuteriu. Kasmet (nuo 2000 m.) paruošiamos uždavinių sprendimo knygelės, kurias galima rasti čia:

`http://kengura.lt/`

2015 m. atsirado nauja *Kengūros* dalyvių grupė nebemokiniams – *Ekspertas.* Šiai grupei konkursas buvo organizuotas „online“ režimu.

Konkurso metu sprendžiama 30 uždavinių, kurių sprendimas vertinamas taip: jei uždavinio atsakymas yra teisingas, skiriami visi prie jo sąlygos nurodyti taškai (3, 4 arba 5); jei atsakymas neteisingas – atimamas ketvirtadalis uždaviniui numatytų taškų; už nepažymėtą atsakymą taškai neskiriami (0 taškų). Be to, kiekvienas dalyvis konkurso pradžioje turi 30 taškų (taigi net visų uždavinių atsakymus pažymėjus neteisingai, iš viso surenkama 0 taškų).

Šioje knygelėje ženklu **!** pažymėti griežti matematiniai sprendimai. Tačiau norint pasirinkti teisingą atsakymo variantą ne visada reikia griežto matematinio sprendimo. Kartais pakanka paaiškinti, kodėl kiti nurodyti atsakymo variantai netinka. Tokie sprendimai pažymėti ženklu **?**. Kai vienų ar kitų sprendimų pateikiama daugiau, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse pakanka net ir klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad skaitytojas nepatingės išsiaiškinti viską iki galo.

Daugiau informacijos apie *Eksperto* grupę galima rasti čia:

`http://www.ekspertas.kengura.lt/`

Viliamės, kad *Eksperto* grupė gausės – juk loginis mąstymas svarbus ne vien mokiniams, jis svarbus žmogui visą gyvenimą. Nestandartinių uždavinių sprendimas leidžia pasitikrinti ir pagilinti matematinius įgūdžius, ugdyti matematinę kultūrą.

Organizatoriai

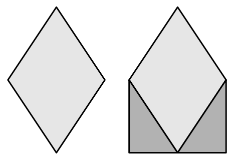
2024 m. *Eksperto* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Matas užrašė tris iš eilės einančius keturženklius skaičius. Tada kai kuriuos skaitmenis jis uždengė (žr. paveikslėlį). Kas buvo uždengta?

A) 389, 3, 99 **B)** 489, 3, 96 **C)** 489, 4, 98 **D)** 489, 4, 99 **E)** 488, 4, 99

2. Paveikslėlyje pavaizduotas rombas ir penkiakampis, gautas prie rombo pridėjus du stačiuosius trikampius. Kiek procentų penkiakampio plotas yra didesnis už rombo plotą?

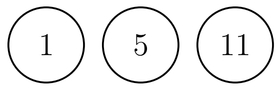


A) 20% **B)** 25% **C)** 30% **D)** 40% **E)** 50%

3. Ona sukūrė slaptą abėcėlę, kurioje kiekvieną lietuviškos abėcėlės raidę atitinka slaptas simbolis. Savo katės vardą PILKĖ ji užrašo taip: , o vardą ONA – taip: . Kaip ji užrašo žodį PONIA?

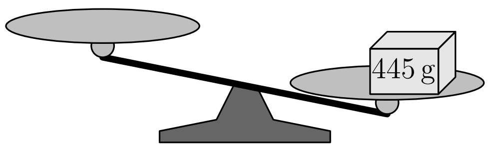
A)  B)  C)  D)  E) 

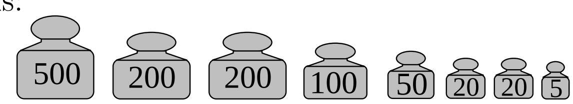
4. Ema turi tris žetonus, ant kurių parašyti skaičiai 1, 5 ir 11 (žr. pav.). Ji nori juos sudėti paeiliui, kad susidarytų keturženklis skaičius. Kiek skirtingų keturženklių skaičių Ema gali gauti tokiu būdu?



A) 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 9

5. Petras turi aštuonis svarelius, kurių masė nurodyta gramais:

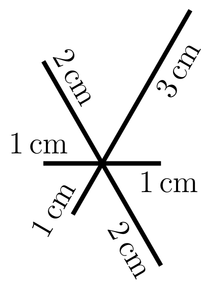




Jis padėjo 445 g sveriantį paketą ant lėkštinių svarstyklių. Kiek mažiausiai svarelių Petrui reikia padėti ant svarstyklių, kad jos taptų pusiausviros?

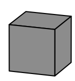
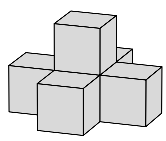
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

6. Neatitraukdamas pieštuko nuo popieriaus lapo, Tomas nubrėžė figūrą, kurią sudaro šešios atkarpos. Paveikslėlyje parodyta ši figūra ir visų atkarpų ilgiai. Kokį trumpiausią kelią galėjo popieriumi nueiti pieštukas, Tomui brėžiant figūrą?



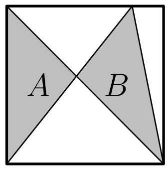
A) 14 cm **B)** 15 cm **C)** 16 cm **D)** 17 cm **E)** 18 cm

7. Ignas ant stalo padėjo kubą, o tada apdėjo jį dar penkiais kubais, pilnai uždengdamas visas penkias matomas pradinio kubo sienas (žr. pav.). Kiek mažiausiai kubų Ignui prireiks, kad jais apdėtų gautąją figūrą ir pilnai uždengtų visą jos matomą paviršių?

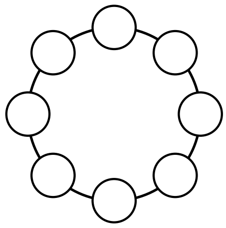
A) 9 **B)** 11 **C)** 13 **D)** 17 **E)** 21

8. Kvadrate, kurio kraštinės ilgis lygus 10, nubrėžtos trys atkarpos. Dviejų užtušuotų trikampių plotai lygūs atitinkamai A ir B, kaip parodyta paveikslėlyje. Kam lygus skirtumas $A - B$?



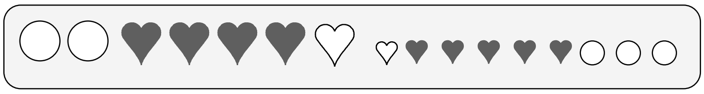
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 5 **E)** 10

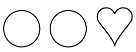
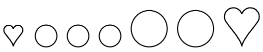
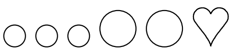
9. Į kiekvieną iš 8 skritulių įrašyta po skaičių. Bet kurie du gretimuose skrituliuose esantys skaičiai skiriasi vienetu. Į vieną iš skritulių įrašytas skaičius 5, o į kitą – skaičius 9. Kiek skirtingų skaičių įrašyta?



A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

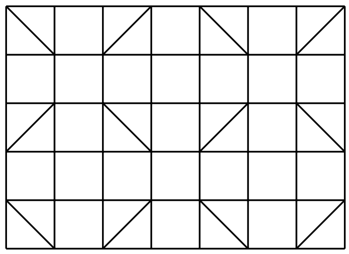
10. Ant padėklo buvo didesnių ir mažesnių sausainių (žr. paveikslėlį). Trys mergaitės viena po kitos ėjo prie padėklo ir rinkosi sausainius. Viena iš jų pasiėmė visas širdeles, gulėjusias tuo metu ant padėklo; viena pasiėmė visus baltus sausainius, gulėjusius tuo metu ant padėklo; viena pasiėmė visus didesniuosius sausainius, gulėjusius ant padėklo (mergaitės rinkosi sausainius nebūtinai ką tik surašyta tvarka). Viena mergaitė pasiėmė 3 sausainius, viena 6 sausainius, viena 7 sausainius (nežinia kuria tvarka). Kurį iš išvardytų rinkinių pasiėmė viena iš mergaičių?



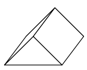
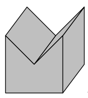
A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

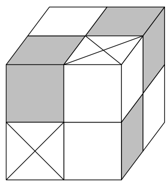
Klausimai po 4 taškus

11. Ema iš plytelių sudėjo stačiakampį (žr. pav.). Ji panaudojo kelių spalvų kvadratines ir trikampes plyteles. Kiekviena plytelė yra vienspalvė. Kiekvienos dvi plytelės, turinčios sąlyčio tašką (net jei vienintelį), yra skirtingų spalvų. Kiek mažiausiai spalvų gali turėti Emos sudėtas stačiakampis?



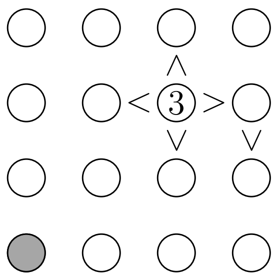
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

12. Stasys turi dviejų rūšių detales: baltas  ir pilkas . Mažą kubelį galima sudėti arba iš keturių baltųjų detalių, arba iš vienos baltosios ir vienos pilkosios. Iš mažųjų kubelių Stasys sudėjo didelį kubą (žr. paveikslėlį). Kiek mažiausiai jam reikėjo baltųjų detalių?



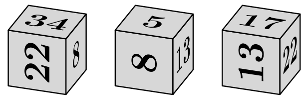
A) 8 **B)** 11 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 23

13. Vaiva ketina į kiekvieną skritulį (žr. pav.) įrašyti po skaičių taip, kad kiekviename stulpelyje ir kiekvienoje eilutėje skaičiai 1, 2, 3, 4 pasikartotų lygiai po vieną kartą ir būtų teisingos penkios nurodytos nelygybės ($>$, $<$, $\wedge$ ir $\vee$). Kokį skaičių Vaiva gali įrašyti į pilkąjį skritulį?



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 2 arba 3

14. Ant stalo guli trys vienodi kubeliai. Kokia yra trijų apatinių sienų skaičių suma?

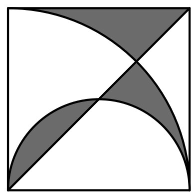


A) 26 **B)** 40 **C)** 43 **D)** 47 **E)** 56

15. Yra žinoma, kad lygiai vienas iš teiginių **A**–**E** apie tam tikrą natūralųjį skaičių n yra teisingas. Kuris?

A) Skaičius n dalijasi iš 3 **B)** Skaičius n dalijasi iš 6
C) Skaičius n yra nelyginis **D)** $n = 2$ **E)** Skaičius n yra pirminis

16. Kvadrato įstrižainė, pusapskritimis ir apskritimo ketvirtis dalija kvadratą į 6 dalis (žr. pav.). Koks yra užtušuotos srities plotas, jei kvadrato kraštinės ilgis lygus 6?



A) 9 **B)** 3π **C)** $6\pi - 9$ **D)** $\frac{10\pi}{3}$ **E)** 12

17. Kurios trupmenos reikšmė didžiausia, jei skaičiams p ir q galioja nelygybės $0 < p < q$?

A) $\frac{p+3q}{4}$ **B)** $\frac{p+2q}{3}$ **C)** $\frac{p+q}{2}$ **D)** $\frac{2p+q}{3}$ **E)** $\frac{3p+q}{4}$

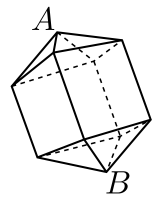
18. Mikė Melagėlis nusprendė visą laiką meluoti tik kas antrą dieną, o likusiomis dienomis sakyti tik tiesą. Vieną dieną Mikė pasakė lygiai keturis iš penkių teiginių **A**–**E**. Kurio teiginio jis nepasakė?

A) „Skaičius 2024 dalijasi iš 11.“ **B)** „Ir vakar melavau, ir rytoj meluosiu.“
C) „Šiandien ir rytoj kalbu tik tiesą.“ **D)** „Vakar buvo trečiadienis.“
E) „Rytoj bus šeštadienis.“

19. Nojus laiko saldainius keturiose striukės kišenėse. Jis užrašė, po kiek saldainių yra kiekvienoje kišenėje. Jo sesuo Lėja užrašė, keliose kišenėse yra lygiai vienas saldainis, keliose lygiai du, keliose lygiai trys, o keliose – nė vieno saldainio. Lėja užrašė tuos pačius keturis skaičius kaip ir Nojus. Kiek iš viso saldainių yra striukės kišenėse?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

20. Įterpus kubą tarp dviejų taisyklingųjų keturkampių piramidžių, gautas erdvinis kūnas, turintis 12 sienų (žr. pav.). Jo 8 sienos yra lygiakraščiai trikampiai, o kiekvienos briaunos ilgis lygus 1. Koks yra atstumas tarp šio kūno viršūnių A ir B?



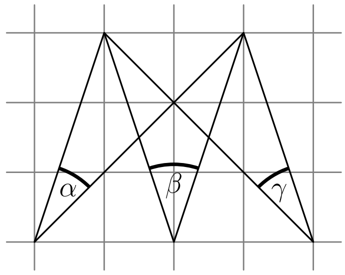
A) $1 + \sqrt{3}$ **B)** $2\sqrt{2}$ **C)** $\frac{5}{2}$ **D)** $\sqrt{5}$ **E)** $1 + \sqrt{2}$

Klausimai po 5 taškus

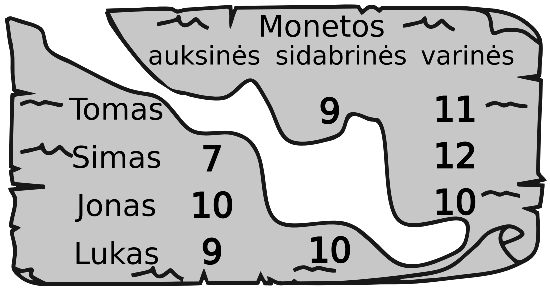
21. Raminta lentoje užrašė skaičius 4, 6, 12, 13, 22 ir 29 ir kiekvieną iš jų nuspalvino mėlynai arba geltonai. Julija vieną iš šių skaičių nutrynė. Paaiškėjo, kad lentoje likusių geltonųjų skaičių suma yra du kartus didesnė už lentoje likusių mėlynųjų skaičių sumą. Kurį skaičių Julija nutrynė?

A) 4 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 22 **E)** 29

22. Paveikslėlyje pavaizduoti trys kampai α, β ir γ. Kam lygi suma $\alpha + \beta + \gamma$?
A) 60° **B)** 70° **C)** 75° **D)** 90° **E)** 120°

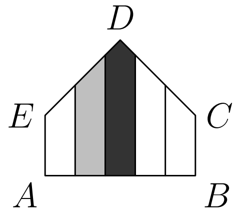


23. Kapitonas Flintas paprašė keturių piratų pasakyti, kiek aukso, sidabro ir vario monetų yra slėptuvėje. Jų atsakymai buvo užrašyti popieriaus lape, kuris, deja, buvo apgadintas (žr. pav.). Tik vienas piratas pasakė tiesą, kiti melavo, kiekvieną monetų skaičių nurodydami neteisingai. Kuris piratas sakė tiesą, jei žinoma, kad slėptuvėje iš viso buvo 30 monetų?



A) Tomas **B)** Simas **C)** Jonas **D)** Lukas **E)** Neįmanoma nustatyti

24. Paveikslėlyje pavaizduotas penkiakampis $ABCDE$, kuriame $\angle A = \angle B = 90°$, $AE = BC$ ir $ED = DC$. Atkarpoje AB pažymėti keturi taškai, dalijantys šią atkarpą į penkias lygias dalis. Iš šių keturių taškų nubrėžtos atkarpos, statmenos kraštinei AB (žr. pav.). Juodosios dalies plotas lygus 13, o pilkosios dalies plotas lygus 10. Kam lygus penkiakampio $ABCDE$ plotas?
A) 45 **B)** 47 **C)** 49 **D)** 58 **E)** 60



25. Domas turi šešias korteles. Kiekvienos kortelės abiejose pusėse yra po skaičių. Skaičių poros, esančios kortelėse, yra tokios: $(5, 12)$, $(3, 11)$, $(0, 16)$, $(7, 8)$, $(4, 14)$ ir $(9, 10)$. Domas tam tikra tvarka sudėjo korteles langeliuose (žr. pav.), atvertęs kiekvieną iš jų vienu iš dviejų atitinkamų skaičių, ir apskaičiavo gautojo reiškinio reikšmę.

$$\square + \square + \square - \square - \square - \square = ?$$

Kokią mažiausią reikšmę galėjo gauti Domas?
A) -23 **B)** -24 **C)** -25 **D)** -26 **E)** -27

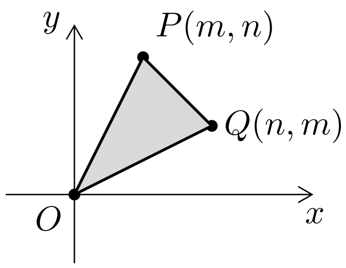
26. Lukas pažymėjo 20 apskritimo taškų, kad atstumai tarp gretimų taškų būtų lygūs. Kiekvieną pažymėtųjų taškų porą jis sujungė atkarpa. Kiek atkarpų, ilgesnių nei apskritimo spindulys, bet trumpesnių nei jo skersmuo, nubrėžė Lukas?
A) 90 **B)** 100 **C)** 120 **D)** 140 **E)** 160

27. Kuri lygybė sieja skaičius x, y, z, jei $2^x = 3$, $2^y = 7$ ir $6^z = 7$?
A) $z = \dfrac{y}{1+x}$ **B)** $z = \dfrac{x}{y} + 1$ **C)** $z = \dfrac{y}{x} - 1$ **D)** $z = \dfrac{x}{y-1}$ **E)** $z = y - \dfrac{1}{x}$

28. Liepa pažymėjo 12 apskritimo taškų, kad atstumai tarp gretimų taškų būtų lygūs. Ji nori sujungti tris iš pažymėtųjų taškų, kad gautasis trikampis turėtų 45° kampą. Kiek tokių trikampių ji gali gauti?
A) 48 **B)** 60 **C)** 72 **D)** 84 **E)** Kitas atsakymas

29. Keturženklis skaičius $\overline{ABCD}$, neturintis skaitmens 0, lygus $A^A + B^B + C^C + D^D$. Tada $A =$
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

30. Koordinačių plokštumoje duoti taškai $P = (m, n)$, $Q = (n, m)$, $O = (0, 0)$, kur skaičiai m ir $n > m$ yra natūralieji (žr. pav.). Trikampio OPQ plotas lygus 54. Kiek skirtingų reikšmių gali įgyti suma $m + n$?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** Kitas atsakymas



Eksperto užduočių sprendimai

1. (D) 489, 4, 99

! Užrašykime skaičius taip:

...7, .898, 48..

Prie antro skaičiaus pridėjus 1, pirmieji trys skaitmenys nepakis. Iš trečio skaičiaus aišku, kad pirmųjų skaičių pirmas skaitmuo 4. Vadinasi, antras skaičius yra 4898. Todėl Mato skaičiai yra

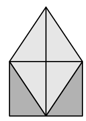
4897, 4898, 4899.

Taigi uždengta buvo 489, 4, 99.

Teisingas atsakymas **D**.

2. (E) 50%

! Nubrėžkime rombo įstrižaines (žr. pav. dešinėje). Dabar aišku, kad prie rombo pridėtų dviejų stačiųjų trikampių plotų suma lygi pusei rombo ploto. Taigi penkiakampio plotas yra 50% didesnis už rombo plotą.



Teisingas atsakymas **E**.

3. (C)

? Žodis PONIA prasideda tokia pačia raide kaip ir žodis PILKĖ. Taigi žodis PONIA, užrašytas slapta abėcėle, prasideda simboliu ⊙. Vienintelis tinkamas atsakymas yra **C**.

! Kaip jau išsiaiškinome, žodis PONIA prasideda simboliu ⊙. Taip pat šiame žodyje bus visi simboliai iš žodžio ONA – , tik dar reikia įterpti raidę I, kurią atitinka antras simbolis iš žodžio PILKĖ – . Taigi žodis PONIA slapta abėcėle užrašomas taip: . Renkamės atsakymą **C**.

4. (B) 4

! Tarkime, kad Ema iš žetonų sudėjo keturženklį skaičių n. Jei skaičius n prasideda skaitmeniu 5, tai $n = 5111$. Jei skaičius n baigiasi skaitmeniu 5, tai $n = 1115$. Jei skaičius n prasideda ir baigiasi skaitmeniu 1, tai $n = 1511$ arba 1151. Vadinasi, Ema gali gauti lygiai keturis keturženklius skaičius.

Teisingas atsakymas **B**.

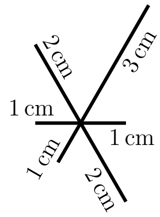
5. Ⓑ 3

! Pirma mintis – atsverti paketą dedant svarelius ant kairiosios lėkštės. Kadangi 500 g svarelis per didelis, tektų imti 200 g, 200 g, 20 g, 20 g ir 5 g svarelius – iš viso 5. Daugoka. Pabandykime pasiekti pusiausvyrą su mažiau svarelių.

Artimiausias paketo svoriui yra 500 g svarelis. Jį padėjus ant kairiosios lėkštės, ant dešiniosios reikia dar uždėti $500 - 445 = 55$ g. Tą galima padaryti dviem svareliais – 50 g ir 5 g. Iš viso panaudojome tris svarelius.

Apsieiti su dviem svareliais nepavyksta – jau matėme, kad jokių dviejų svarelių nei suma, nei skirtumas nėra 445 g. Teisingas atsakymas **B**.

6. Ⓑ 15 cm



? Galima nuspėti, kad pieštuko kelias būtų trumpiausias, jei jis brėžtų atkarpas, keliaudamas tiesiomis linijomis tarp taškų tokia tvarka:

$$A_1 \to O \to A_2 \to O \to A_3 \to O \to A_4 \to O \to A_5 \to O \to A_6.$$

Čia O yra bendras visų šešių atkarpų galas, o taškai A_1, A_2, …, A_6 – tam tikra tvarka pasirinkti antrieji atkarpų galai. Tada pieštuko kelias s lygus

$$OA_1 + 2OA_2 + 2OA_3 + 2OA_4 + 2OA_5 + OA_6,$$

kur šešių atkarpų ilgiai OA_1, OA_2, …, OA_6 tam tikra (kol kas bet kokia) tvarka yra 1, 1, 1, 2, 2 ir 3 centimetrai. Kad gautume kuo mažesnę s reikšmę, natūralu imti kuo trumpesnes atkarpas, kurių ilgiai skaičiuojant s dauginami iš 2, taigi kuo ilgesnes likusias dvi atkarpas OA_1 ir OA_6:

$$OA_1 = 3 \text{ cm}, \quad OA_6 = 2 \text{ cm}, \quad s = 3 + 2 \cdot (1 + 1 + 1 + 2) + 2 = 15 \text{ (cm)}.$$

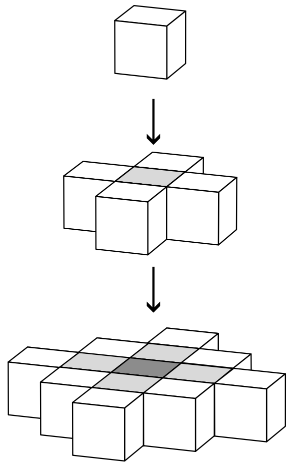
Renkamės atsakymą **B**.

! Pieštukas turėjo nueiti bent jau viengubą kiekvienos atkarpos ilgį, kad jas nubrėžtų. Nagrinėkime bet kurią iš šešių atkarpų, kuri nėra nei pirmoji, kurią Tomas pradėjo brėžti, nei paskutinė, kurią Tomas baigė brėžti. Kad ją pilnai nubrėžtų, pieštukas turėjo kada nors iš visų atkarpų bendro galo O pasiekti kitą tos atkarpos galą bei grįžti atgal į tašką O, taigi turėjo nueiti mažiausiai dvigubą atkarpos ilgį. Taip turėjo nutikti, brėžiant mažiausiai keturias atkarpas. Tokių keturių atkarpų ilgius centimetrais pažymėkime x_1, x_2, x_3, x_4, o likusių dviejų atkarpų ilgius centimetrais pažymėkime x_5 ir x_6. Tada pieštuko nueitas kelias centimetrais yra ne trumpesnis nei

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 = 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_6) - x_5 - x_6 \geqslant \\ \geqslant 2(1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3) - 3 - 2 = 15. \end{aligned}$$

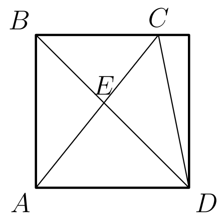
Kita vertus, pieštuko kelias gali būti lygus 15 cm: pieštukas nubrėžia 3 cm atkarpą, eidamas į tašką O iš kito jos galo, tada iš eilės nueina keturiomis atkarpomis, kurių ilgiai yra 1, 1, 1 ir 2 centimetrai, brėždamas kiekvieną atkarpą iš O ir grįždamas ja atgal, bei pabaigoje nubrėžia 2 cm atkarpą iš taško O.

7. (C) 13



! Igno gautoje dviaukštėje figūroje prie kiekvienos neuždengtos kubo sienos reikia priglausti dar po vieną kubą. Apatiniame aukšte šonines sienas uždengia 8 kubai (keturi iš jų uždengia po dvi sienas), viršutiniame aukšte pakanka keturių kubų, ir reikia dar vieno kubo, dėl kurio figūra tampa triaukštė (žr. pav.). Vadinasi, Ignui iš viso prireiks $8 + 4 + 1 = 13$ kubų.

8. (A) 0



! Brėžinyje pažymėkime taškus A, B, C, D ir E (žr. pav. dešinėje).

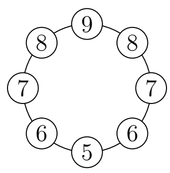
Trikampių ABD ir ACD plotai lygūs, nes jie turi bendrą kraštinę AD ir jų aukštinių, nuleistų į šią kraštinę, ilgiai yra lygūs kvadrato kraštinei. Todėl

$$S_{BEA} = S_{ABD} - S_{AED} = S_{ACD} - S_{AED} = S_{CED}.$$

Vadinasi, $S_{BEA} - S_{CED} = 0$.

Teisingas atsakymas **A**.

9. (B) 5

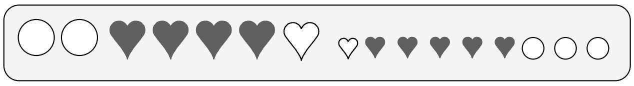


! Tarp 5 ir 9 yra 3 natūralieji skaičiai – 6, 7 ir 8. Tai reiškia, kad einant, tarkime, laikrodžio rodyklės kryptimi nuo skritulio su 5 iki skritulio su 9, tarp jų turi būti mažiausiai trys skrituliai – su skaičiais 6, 7 ir 8, o toliau einant nuo 9 iki 5 – dar bent trys skrituliai, iš viso – bent šeši tarpiniai skrituliai. Iš viso figūroje yra 8 skrituliai, vadinasi, daugiau skaičių į skritulius įrašyti nebegalime (žr. pav. dešinėje).

Į skritulius įrašėme visus skaičius nuo 5 iki 9, iš viso – penkis skirtingus skaičius. Teisingas atsakymas **B**.

10. Ⓔ ○○○

? Žymėkime mergaites taip: Š – ėmusi visas širdeles, G (gigantomanė) – ėmusi didesnius sausainius, W (*white, weiss*) – ėmusi baltus sausainius.



Š negalėjo imti pirma – jai būtų tekę paimti 11 širdžių (o ne 3, 6 ar 7 sausainius). Vadinasi, pirma ėmė G arba W.

Sakykime, kad pirma sausainius ėmė G. Tada ji paėmė 7 didelius sausainius, ir liko 6 mažos širdys ir 3 skrituliukai. Matome, kad galime antrąją statyti Š, ji paims 6 širdis, o trečiajai W liks 3 balti skrituliukai (beje, negalėjome antrąja statyti W – jai tektų imti 4 baltus sausainius: 1 širdelę ir 3 skrituliukus).

Renkamės atsakymą **E**.

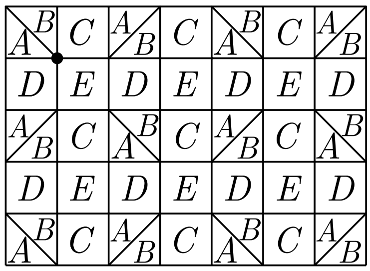
! Liko patikrinti, ar nėra kitų sprendinių, t. y. ar negalima pirmąja statyti W. Tada W paimtų 7 baltus sausainius, liktų 4 didelės juodos širdys ir 5 mažos juodos širdys. Dabar antra negali būti Š (jai tektų imti 9 širdis), nei G (jai tektų imti 4 dideles širdis).

Teisingas atsakymas **E**.

!! Sąlygos, kad mergaitės ėmė 3, 6 ir 7 sausainius, atmesti negalima: tada dar tiktų ir atsakymas **B**. Iš tikrųjų, pirma W pasiimtų rinkinį **B**, antra G pasiimtų 4 dideles juodas širdis, trečiai Š liktų 5 mažos juodos širdys.

11. Ⓒ 5

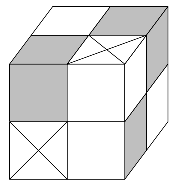
! Pažymėtame sudėtojo stačiakampio taške sueina 5 plytelės (žr. pav.). Kiekvienos dvi iš jų turi būti skirtingų spalvų, todėl stačiakampis negali turėti mažiau nei 5 spalvas.



Kita vertus, 5 spalvų pakanka. Paveikslėlyje parodytas tinkamo stačiakampio, kuriame plytelės yra 5 spalvų A, B, C, D, E, pavyzdys. Čia trijose stačiakampio eilutėse pakaitomis iš eilės eina spalvos A, B ir C, o kitose dviejose eilutėse – likusios dvi spalvos D ir E. Tos pačios spalvos plytelės šiame stačiakampyje visada yra arba dviejose eilutėse, kurias skiria dar bent viena eilutė, arba toje pačioje eilutėje, kur jas skiria kitos plytelės.

Vadinasi, mažiausias galimas stačiakampio spalvų skaičius yra 5.

12. (D) 14

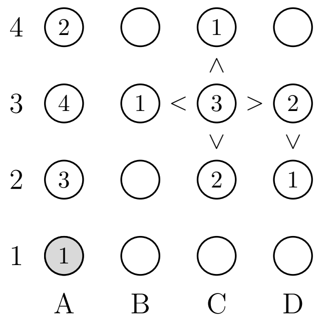


! Kiekvienas kubelis turi bent vieną baltą detalę. Du kubeliai, kaip matome iš paveikslėlio, sudėti iš 4 baltų detalių. Vadinasi, mažiausiai statiniui reikėjo $2 \cdot 4 + 6 \cdot 1 = 14$ baltų detalių.

Bet 14 detalių užtenka: dviem „baltiems“ kubeliams reikia 8 baltų detalių, o kiekvieną iš likusių 6 kubelių galima sudėti „margą“ iš 1 baltos ir 1 juodos detalės.

Teisingas atsakymas **D**.

13. (A) 1



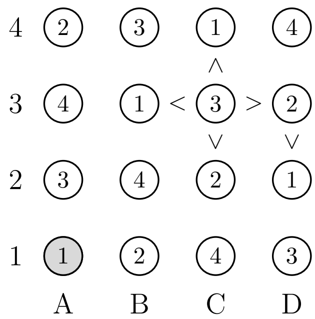
! Sužymėkime skrituliukus kaip šachmatų lentoje – raidės ir skaičiaus kombinacija. Pvz., skrituliuke C3 įrašytas skaičius 3 (žr. pirmą paveikslėlį).

Pastebėkime, kad $D2 < D3 < 3$, vadinasi, $D2 = 1$, o $D3 = 2$. Tada vadovaudamiesi likusiais nelygybių ženklais nustatome, kad $C2 = 2$ (nes 2-oje eilutėje jau yra 1), $B3 = 1$ (nes 3-ioje eilutėje jau yra 2), o $C4 = 1$ (nes C stulpelyje jau yra 2).

Likęs 3-ios eilutės skrituliukas $A3 = 4$, o į A2 vietą galime įrašyti tik 3 (nes 2-oje eilutėje jau yra 1 ir 2, o stulpelyje A – 4).

Tuomet į A4 galime įrašyti tik 1 arba 2, tačiau 4-oje eilutėje jau yra 1, todėl $A4 = 2$, o $A1 = 1$.

Tam, kad galėtume užtikrintai rinktis atsakymą **A**, reikia įsitikinti, kad galime užpildyti ir likusią lentelę. Šis užpildymas pateiktas antrajame paveikslėlyje dešinėje (patikrinkite!).



14. (C) 43

! Pirmajame kubelyje apatinė siena yra po skaičiumi 8. Antrajame kubelyje matome, kad po skaičiumi 8 yra skaičius 13.

Antrajame kubelyje apatinė siena yra po skaičiumi 13, o trečiajame kubelyje matome, kad po skaičiumi 13 yra skaičius 22.

Galiausiais, trečiajame kubelyje apatinė siena yra po skaičiumi 22, o pirmame kubelyje matome, kad po skaičiumi 22 yra skaičius 8. Taigi apatinių sienų skaičių suma yra $8+13+22 = 43$. Teisingas atsakymas yra **C**.

15. (C) Skaičius n yra nelyginis

? Norint pasirinkti teisingą atsakymą, pakanka sugalvoti bent vieną n reikšmę, kuri tenkina uždavinio sąlygą. Pavyzdžiui, tinka $n = 1$: tada teiginys **C** teisingas, o kiti keturi teiginiai klaidingi. Šią mažiausią galimą reikšmę praleidus (pavyzdžiui, nežinant, kad skaičius 1 nėra pirminis) ir tiesiog iš eilės tikrinant n reikšmes, paieškos gali užtrukti: kita mažiausia tinkama n reikšmė lygi 25.

Renkamės atsakymą **C**.

! Kiekvienas pirminis skaičius yra arba nelyginis, arba lygus 2. Taigi jei teiginys **E** būtų teisingas, tai būtų teisingas vienas iš teiginių **C** ir **D**. Kadangi teisingas tik vienas iš penkių teiginių, tai teiginys **E** klaidingas, o skaičius n nėra pirminis. Tada $n \neq 2$, todėl klaidingas ir teiginys **D**.

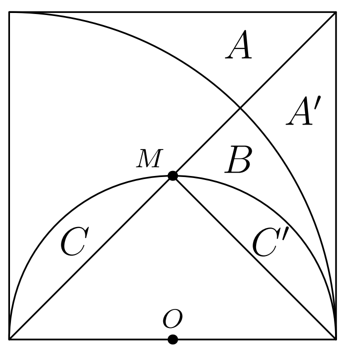
Panašiai galima atmesti ir teiginį **A**. Kiekvienas natūralusis skaičius, kuris dalijasi iš 3, arba yra nelyginis, arba dalijasi iš 2, taigi ir iš $2 \cdot 3 = 6$. Todėl kartu su teiginiu **A** būtų teisingas ir vienas iš teiginių **B** ir **C**. Kadangi teisingas tik vienas iš penkių teiginių, tai teiginys **A** klaidingas, o skaičius n nesidalija iš 3. Tada n nesidalija iš 6, todėl klaidingas ir teiginys **B**.

Liko vienintelė galimybė: teiginys **C** teisingas, o kiti keturi teiginiai klaidingi. Taip iš tiesų gali būti, jei natūralusis skaičius n yra bet koks nelyginis nepirminis skaičius, nesidalijantis iš 3. Pavyzdžiui, tinka reikšmės

$$n = 1,\ 25,\ 35,\ 49,\ 55,\ 65,\ 77,\ \ldots$$

16. (A) 9

? Kvadrato įstrižainės ir pusapskritimio sankirtos tašką pažymėkime M, o pusapskritimio centrą pažymėkime O. Taškas O yra pusapskritimio skersmens, taigi kvadrato kraštinės vidurio taškas. Kvadrato sritis pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje. Užtušuotąją sritį sudaro sritys A, B ir C.



Galima nuspėti, kad taškas M yra kvadrato centras (įstrižainių sankirtos taškas), kad sritys A ir A' yra simetriškos kvadrato įstrižainės atžvilgiu, o sritys C ir C' – tiesės OM atžvilgiu. Todėl užtušuotos srities plotas lygus sričių A', B ir C' plotų sumai. Šios trys sritys sudaro vieną iš keturių lygių trikampių, į kuriuos kvadratą dalija jo įstrižainės. Taigi ieškomas plotas lygus kvadrato ploto $6^2 = 36$ ketvirtadaliui $36 : 4 = 9$.

Renkamės atsakymą **A**.

! Užbaikime **?** dalies sprendimą, pagrįsdami tai, ką joje tik nuspėjome.

Apskritimo bet kokio lanko simetrijos ašis yra to lanko galus jungiančios atkarpos (apskritimo stygos) vidurio statmuo. Mūsų atveju apskritimo ketvirčio styga yra kvadrato įstrižainė, o jos vidurio statmuo eina per kvadrato kitą įstrižainę. Taigi šios antrosios įstrižainės atžvilgiu yra simetriškas ne tik pats kvadratas, bet ir apskritimo ketvirtis. Tai pagrindžia pastebėjimą, kad jos atžvilgiu yra simetriškos sritys A ir A'.

Kvadrato centrą pažymėjus M' ir sujungus su kvadrato apatinės kraštinės vidurio tašku O, gaunama atkarpa OM', dusyk trumpesnė už kvadrato kraštinę. Išvesta iš pusapskritimio centro O ir lygi pusei jo skersmens, ji yra pusapskritimio spindulys, o jos galo taškas M' priklauso pusapskritimiui. Jis priklauso ir kvadrato įstrižainėms, todėl $M' = M$. Kvadrato apatinė kraštinė jungia pusapskritimio galus, todėl jos vidurio statmuo $OM = OM'$ yra ne tik kvadrato su nubrėžtomis įstrižainėmis, bet ir pusapskritimio simetrijos ašis. Tai pagrindžia pastebėjimą, kad šios ašies atžvilgiu yra simetriškos sritys C ir C', bei užbaigia uždavinio sprendimą.

17. **A** $\dfrac{p+3q}{4}$

? Pasirinkime tinkamas konkrečias p ir q reikšmes, pavyzdžiui, $p = 1,\ q = 2$, bei patikrinkime atsakymuose pateiktų penkių reiškinių reikšmes. Didžiausia visada bus reiškinio $\frac{p+3q}{4}$ reikšmė.

Renkamės atsakymą **A**.

! Penkis duotuosius reiškinius subendravardiklinkime:

$$\textbf{A)}\ \frac{3p+9q}{12},\qquad \textbf{B)}\ \frac{4p+8q}{12},\qquad \textbf{C)}\ \frac{6p+6q}{12},\qquad \textbf{D)}\ \frac{8p+4q}{12},\qquad \textbf{E)}\ \frac{9p+3q}{12}.$$

Kiekvienas skaitiklis lygus 12 skaičių, lygių p arba q, sumai. Pavyzdžiui, $4p+8q = p+p+p+$ $+p+q+q+\ldots+q$. Kadangi $p < q$, tai tokia suma yra tuo didesnė, kuo joje daugiau dėmenų, lygių q, o ne p. Vadinasi, didžiausias iš penkių skaitiklių yra $3p+9q$, o didžiausią reikšmę iš penkių duotųjų reiškinių turi $\frac{p+3q}{4}$ (bet kuriems tinkamiems p ir q).

!! Kiekvienas iš penkių duotųjų reiškinių turi pavidalą $\frac{\alpha p+\beta q}{\alpha+\beta}$, kur $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Nagrinėkime bet kokį šio pavidalo reiškinį. Pažymėkime $\gamma = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$. Tada $1-\gamma = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Reiškinį pertvarkykime:

$$\frac{\alpha p+\beta q}{\alpha+\beta} = p\cdot\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + q\cdot\frac{\beta}{\alpha+\beta} = (1-\gamma)p+\gamma q = p+\gamma(q-p).$$

Čia $q-p > 0$. Kuo didesnė $\gamma > 0$ reikšmė, tuo didesnė yra $p+\gamma(q-p)$ reikšmė. Jei α ir β suvoksime kaip skaičiams p ir q suteiktus „svorius“, tai reiškinys $\frac{\alpha p+\beta q}{\alpha+\beta}$ įgyja tuo didesnę reikšmę, kuo didesnę „svorių“ sumos $\alpha+\beta$ dalį sudaro didesniojo skaičiaus q „svoris“ β. Penkiuose atsakymuose ši dalis didžiausia reiškiniui $\frac{p+3q}{4}$: skaičiaus q „svoriui“ tenka 3 iš 4 bendro „svorio“ dalių. Vadinasi, šio reiškinio reikšmė yra didesnė nei likusių keturių (bet kuriems tinkamiems p ir q).

18. Ⓐ „Skaičius 2024 dalijasi iš 11."

! Keturi Mikės teiginiai turi būti arba visi teisingi, arba visi klaidingi. Teiginys „skaičius 2024 dalijasi iš 11" yra teisingas, nes

$$2024 = 1000 + 1000 + 24 = 990 + 10 + 990 + 10 + 22 + 2 = 990 + 990 + 22 + 22.$$

O teiginys „šiandien ir rytoj kalbu tik tiesą" garantuotai klaidingas, nes Mikė niekada nekalba tiesos dvi dienas iš eilės. Taigi Mikė šių teiginių negalėjo pasakyti tą pačią dieną, ir vieno iš jų jis nepasakė. Tada jis tikrai pasakė likusius tris teiginius **B**, **D** ir **E**. Kadangi pastaraisiais dviem teiginiais Mikė pasakė, kad „vakar buvo trečiadienis" ir tuo pačiu metu „rytoj bus šeštadienis", tai jis sumelavo. Vadinasi, toji diena buvo Mikės melo diena, ir jis negalėjo pasakyti teisingo teiginio **A** (bet galėjo pasakyti klaidingus teiginius **B**–**E**, jei melo diena nebuvo nei ketvirtadienis, nei penktadienis).

19. Ⓒ 4

? Tarkime, kad Lėja iš eilės užrašė keturis skaičius x_1, x_2, x_3 ir x_0. Kiekvienas x_i parodo, keli Nojaus skaičiai lygūs i (čia $i = 1$, 2, 3, 0). Nojaus skaičiai tie patys kaip Lėjos. Taigi pakanka atspėti arba išmąstyti konkretų neneigiamų sveikųjų skaičių ketvertą (x_1, x_2, x_3, x_0), kur kiekvienas x_i parodo, keli skaičiai šiame rinkinyje lygūs i (čia $i = 1$, 2, 3, 0). Tokio rinkinio du tinkami pavyzdžiai yra $(2, 1, 0, 1)$ ir $(0, 2, 0, 2)$. Taigi saldainių keturiose kišenėse gali būti 2, 1, 0 ir 1 arba 0, 2, 0 ir 2. Bet kuriuo iš dviejų atvejų matome, kad saldainių iš viso gali būti 4.

Renkamės atsakymą **C**.

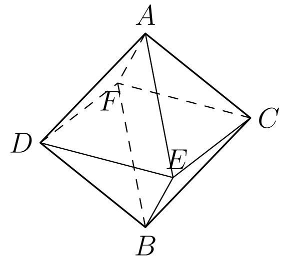
! Nojaus keturių skaičių suma s_1 parodo, kiek iš viso saldainių yra kišenėse. Šį skaičių ir turime nustatyti. Jis sutampa su Lėjos keturių skaičių suma s_2, parodančia, kiek yra kišenių, kuriose yra 1, 2, 3 arba 0 saldainių. Kadangi tėra keturios kišenės, tai $s_2 \leqslant 4$. Be to, jei $s_2 < 4$, tai bent vienoje kišenėje turi būti ne mažiau nei 4 saldainiai ir tada $s_1 \geqslant 4$. Gauname prieštarą: $4 \leqslant s_1 = s_2 < 4$. Vadinasi, $s_2 = 4$. Kadangi $s_1 = s_2 = 4$, tai striukės kišenėse yra iš viso 4 saldainiai.

Pastebėsime, kad uždavinio situacija yra galima: du skaičių ketverto (x_1, x_2, x_3, x_0) pavyzdžiai pateikti **?** dalyje. Nustačius, kad

$$4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_0 = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 0 \cdot x_0,$$

ir atlikus atvejų perranką, galima įrodyti, kad kitų tinkamų ketvertų nėra.

20. (E) $1 + \sqrt{2}$



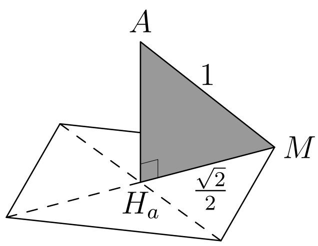
? Galima nuspėti, kad pašalinus kubą, skiriantį piramides, ir jas suglaudus, atstumas tarp piramidžių viršūnių A ir B sumažėja per kubo briaunos ilgį 1. Taip gauname naują erdvinį kūną $ABCDEF$ (žr. pav.). Kadangi šio kūno visos 8 sienos yra lygūs lygiakraščiai trikampiai, tai galima nuspėti, kad ir pats kūnas yra tam tikra prasme taisyklingas: toks pats, žiūrint iš jo bet kurios viršūnės.

Kūną $ABCDEF$ sudaro taisyklingosios piramidės $ACEDF$ ir $BCEDF$, kurių bendras pagrindas yra kvadratas $CEDF$. Tačiau dėl kūno taisyklingumo jį taip pat sudaro suglaustos dvi tokios pačios piramidės $CAEBF$ ir $DAEBF$, kurių bendras pagrindas $AEBF$ vėlgi yra kvadratas. Atkarpa AB yra šio kvadrato, kuriame $AE = 1$, įstrižainė. Taigi čia $AB = \sqrt{2}$, o duotajame kūne (prieš pašalinant kubą) atstumas AB lygus $1 + \sqrt{2}$.

! Nagrinėkime tą iš dviejų taisyklingųjų piramidžių, kurios viršūnė yra A. Jos pagrindas yra kvadratas, su kurio centru sutampa piramidės aukštinės AH_a pagrindas H_a. Taisyklingosios piramidės, kurios viršūnė yra B, aukštinės BH_b pagrindas H_b taip pat yra piramidės pagrindo (kvadrato) centras. Atkarpa H_aH_b jungia kubo priešingų sienų centrus bei yra šioms sienoms statmena. Kadangi atkarpos AH_a ir BH_b taip pat yra statmenos atitinkamoms kubo sienoms, tai taškai A, H_a, H_b ir B yra vienoje tiesėje,

$$AB = AH_a + H_aH_b + BH_b.$$

Čia $H_aH_b = 1$: atstumas tarp priešingų kubo sienų lygus jo briaunos ilgiui.



Kvadrato centrą H_a sujunkime su bet kuria iš to kvadrato viršūnių. Ją pažymėkime M (žr. pav.). Kvadrato įstrižainių ilgiai lygūs $\sqrt{2}$. Jos kertasi kvadrato centre ir dalija viena kitą pusiau, todėl $MH_a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Kadangi piramidės aukštinė AH_a yra statmena jos pagrindui – kvadratui, tai ji statmena atkarpai MH_a. Stačiajam trikampiui AMH_a pritaikykime Pitagoro teoremą:

$$1^2 = AM^2 = AH_a^2 + MH_a^2 = AH_a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2, \qquad AH_a = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Analogiškai $BH_b = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Vadinasi,

$$AB = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

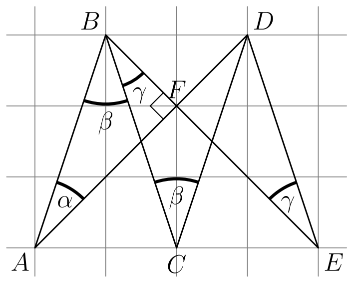
21. (E) 29

! Julijai nutrynus vieną iš skaičių, paaiškėjo, kad lentoje likusių geltonųjų skaičių suma yra du kartus didesnė už lentoje likusių mėlynųjų skaičių sumą. Vadinasi, lentoje likusių geltonųjų ir mėlynųjų skaičių suma dalijasi iš 3. Kadangi Ramintos užrašytų skaičių 4, 6, 12, 13, 22 ir 29 sumos 86 dalybos iš 3 liekana lygi 2, tai Julijos nutrinto skaičiaus dalybos iš 3 liekana taip pat lygi 2. Lieka pastebėti, kad vienintelio Ramintos užrašyto skaičiaus 29 dalybos iš 3 liekana lygi 2. Vadinasi, Julija nutrynė skaičių 29. Nesunku įsitikinti, kad Raminta galėjo taip nuspalvinti skaičius 4, 6, 12, 13 ir 22, kad būtų tenkinamos uždavinio sąlygos. Pavyzdžiui, Raminta galėjo skaičius 6 ir 13 nuspalvinti mėlynai, o skaičius 4, 12 ir 22 – geltonai; tada $4 + 12 + 22 = 38 = 2 \cdot 19 = 2 \cdot (6 + 13)$.

Teisingas atsakymas **E**.

22. (D) 90°

! Šešis paveikslėlyje pavaizduotų tiesių sankirtos taškus pažymėkime A, B, C, D, E ir F (žr. pav.).



Kadangi tiesės AB ir CD yra lygiagrečios, tai $\angle ABC = \angle BCD = \beta$. Panašiai gauname, kad $\angle CBE = \angle DEB = \gamma$, nes tiesės BC ir DE taip pat yra lygiagrečios. Lieka pastebėti, kad stačiojo trikampio ABF smailiųjų kampų FAB ir ABF suma lygi 90°. Taigi $\angle FAB + \angle ABF = \alpha + \beta + \gamma = 90°$.

Teisingas atsakymas **D**.

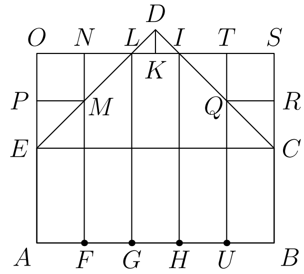
23. (B) Simas

! Tomas melavo, nes jei jo atsakymas būtų tiesa, tai jo nurodytas auksinių monetų skaičius $30-9-11 = 10$ sutaptų su Jono nurodytu auksinių monetų skaičiumi. Panašiai gauname, kad Jonas ir Lukas melavo. Iš tikrųjų, jei Jono atsakymas būtų tiesa, tai jo nurodytas sidabrinių monetų skaičius $30 - 10 - 10 = 10$ sutaptų su Luko nurodytu sidabrinių monetų skaičiumi. Jei Luko atsakymas būtų tiesa, tai jo nurodytas varinių monetų skaičius $30 - 9 - 10 = 11$ sutaptų su Tomo nurodytu varinių monetų skaičiumi. Vadinasi, Simas sakė tiesą. Keturių piratų atsakymai galėjo būti, pavyzdžiui, tokie:

	auksinės	sidabrinės	varinės
Tomas	6	9	11
Simas	7	11	12
Jonas	10	12	10
Lukas	9	10	9

Teisingas atsakymas **B**.

24. (A) 45



! Brėžinyje pažymėkime taškus F, G, H, Q, I, L, M ir U (žr. pav.).

Iš taško L nuleiskime statmenį į kraštinės AE tęsinį ir jo pagrindą pažymėkime O. Iš taško M nuleiskime statmenis į atkarpas EO ir LO ir jų pagrindus pažymėkime atitinkamai P ir N. Panašiai, iš taško I nuleiskime statmenį į kraštinės BC tęsinį ir jo pagrindą pažymėkime S. Iš taško Q nuleiskime statmenis į atkarpas CS ir IS ir jų pagrindus pažymėkime atitinkamai R ir T.

Kadangi $OL \parallel EC$, tai $\angle OLE = \angle LEC$. Panašiai gauname, kad $\angle SIC = \angle ICE$, nes $IS \parallel CE$. Kadangi trikampis EDC yra lygiašonis, tai $\angle LEC = \angle ICE$. Taigi $\angle OLE = \angle SIC$. Be to, $OL = IS$. Todėl statietji trikampiai LOE ir ISC yra lygūs. Kadangi $LE = IC$, tai trikampis LDI yra lygiašonis. Tada $\angle DLI = \angle OLE = \angle SIC = \angle DIL$. Vadinasi, taškai O, L, I ir S yra vienoje tiesėje.

Lygiašonio trikampio LDI aukštinės, nuleistos iš taško D, pagrindą pažymėkime K. Tada $LK = KI = \frac{LI}{2} = \frac{NL}{2}$. Be to, $\angle DLK = \angle NLM$. Todėl statieji trikampiai DLK ir MLN yra panašūs, o panašumo koeficientas lygus 2. Trikampio DLK plotą pažymėkime x. Tada trikampio MLN plotas lygus $4x$. Skaičiuojame:

$$S_{GLIH} = S_{GLDIH} - S_{LDI} = 13 - 2x,$$

$$S_{FNLG} = S_{FMLG} + S_{NLM} = 10 + 4x.$$

Stačiakampių $GLIH$ ir $FNLG$ plotai lygūs, todėl $13 - 2x = 10 + 4x$. Iš čia randame $x = \frac{1}{2}$. Tada $S_{NLM} = 4x = 2$ ir $S_{FNLG} = 10 + 4x = 12$.

Kadangi $OE \parallel NM$, tai $\angle PEM = \angle NML$. Todėl statieji trikampiai PEM ir NML yra panašūs. Be to, $PM = NL$, todėl šie trikampiai yra lygūs. Kadangi $ON = NL$, tai $S_{PONM} = 2 \cdot S_{NLM} = 2 \cdot 2 = 4$. Dabar galime rasti keturkampio $AEMF$ plotą:

$$S_{AEMF} = S_{AONF} - S_{PONM} - S_{PME} = S_{FNLG} - 4 - 2 = 6.$$

Taigi

$$S_{ABCDE} = S_{AEMF} + S_{FMLG} + S_{GLDIH} + S_{HIQU} + S_{UQCB} =$$

$$= 6 + 10 + 13 + 10 + 6 = 45.$$

Teisingas atsakymas **A**.

25. (D) -26

! Tarkime, jog kortelės langeliuose padėtos, kad reiškinio reikšmė būtų mažiausia.

$$\square + \square + \square - \square - \square - \square = ?$$

Tai įmanoma, nes galimybių skaičius tėra baigtinis. Tada trys kairiosios kortelės (kurių skaičiai sudedami) atverstos kiekviena savo mažesniuoju skaičiumi, o trys dešiniosios kortelės (kurių skaičiai atimami iš sumos) – kiekviena savo didesniuoju skaičiumi.

Nagrinėkime bet kurią iš trijų kairiųjų kortelių ir bet kurią iš trijų dešiniųjų. Jų atverstus skaičius atitinkamai pažymėkime x_1 ir x_2, o jų nematomus skaičius – atitinkamai y_1 ir y_2. Tada $x_1 < y_1$ ir $x_2 > y_2$. Jei korteles sukeisime vietomis ir atversime skaičiais y_2 bei y_1, tai reiškinio reikšmė nesumažės (pagal mūsų prielaidą, kad ji jau yra mažiausia galima). Todėl

$$y_2 - y_1 \geqslant x_1 - x_2, \qquad x_1 + y_1 \leqslant x_2 + y_2.$$

Vadinasi, bet kurios iš trijų kairiųjų kortelių skaičių suma yra ne didesnė nei bet kurios iš trijų dešiniųjų kortelių. Mažiausia galima reiškinio reikšmė gaunama, tris korteles su mažiausiomis skaičių sumomis padėjus langeliuose kairėje nuo likusių trijų kortelių ir atvertus kiekvieną iš jų mažesniuoju skaičiumi, o kiekvieną iš likusių trijų kortelių atvertus didesniuoju skaičiumi. Kiekviename kortelių trejete jų tarpusavio tvarka nesvarbi.

Kortelių skaičių sumos lygios

$$3 + 11 = 14, \quad 7 + 8 = 15, \quad 0 + 16 = 16, \quad 5 + 12 = 17, \quad 4 + 14 = 18, \quad 9 + 10 = 19.$$

Taigi mažiausia galima reiškinio reikšmė lygi

$$3 + 7 + 0 - 12 - 14 - 10 = -26.$$

!! Tarkime, jog kortelės langeliuose padėtos, kad reiškinio reikšmė būtų mažiausia. Kaip ir **!** dalyje, pastebėkime, kad tai įmanoma ir kad tada trys kairiosios kortelės atverstos kiekviena savo mažesniuoju skaičiumi, o trys dešiniosios kortelės – kiekviena savo didesniuoju skaičiumi.

Šešiuose langeliuose padėtų kortelių mažesniuosius skaičius iš eilės pažymėkime a_1, a_2, …, a_6. Kiekvienos kortelės dviejų skaičių sumą atitinkamai pažymėkime s_1, s_2, …, s_6. Tada a_i yra tam tikra tvarka surašyti skaičiai 5, 3, 0, 7, 4, 9, o s_i – tam tikra tvarka surašyti skaičiai

$$3 + 11 = 14, \quad 7 + 8 = 15, \quad 0 + 16 = 16, \quad 5 + 12 = 17, \quad 4 + 14 = 18, \quad 9 + 10 = 19.$$

Šešios kortelės atverstos skaičiais a_1, a_2, a_3, $s_4 - a_4$, $s_5 - a_5$, $s_6 - a_6$, o reiškinio reikšmė lygi

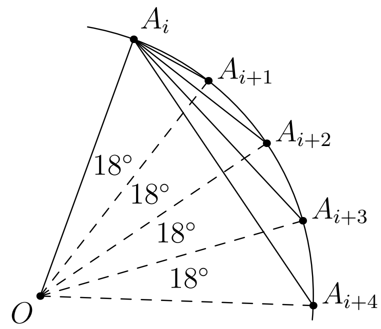
$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + a_3 - (s_4 - a_4) - (s_5 - a_5) - (s_6 - a_6) = \\ &= (a_1 + a_2 + \ldots + a_6) - s_4 - s_5 - s_6 = \\ &= (5 + 3 + 0 + 7 + 4 + 9) - s_4 - s_5 - s_6 = \\ &= 28 - s_4 - s_5 - s_6 \geqslant 28 - 17 - 18 - 19 = -26. \end{aligned}$$

Taigi reiškinio reikšmė ne mažesnė nei -26. Kita vertus, šią reikšmę gausime, kai $s_4 = 17$, $s_5 = 18$, $s_6 = 19$, t. y. kai trys kortelės su tokiomis dviejų skaičių sumomis yra padėtos langeliuose dešinėje nuo kitų trijų kortelių. Vadinasi, -26 ir yra ieškoma reikšmė.

26. **(C)** 120

! Nagrinėkime bet kokį apskritimą. Jo centrą pažymėkime C, o vieną jo tašką – A. Taškui B judant apskritimu, kad $\angle ACB$ didėtų nuo $0°$ iki $180°$, ilgėja (trumpesnysis) apskritimo lankas AB bei styga AB. Kai $\angle ACB = 60°$, tai lygiašonio trikampio ABC ($CA = CB$) kiti du kampai taip pat lygūs $60°$. Tada trikampis ABC lygiakraštis, o atkarpos AB ilgis lygus apskritimo spindulio CA ilgiui. Kai $\angle ACB = 180°$, tai apskritimo styga AB yra jo skersmuo. Taigi apskritimo styga AB ilgesnė už jo spindulį, bet trumpesnė už skersmenį, kai $60° < \angle ACB < 180°$.

Duotojo apskritimo centrą pažymėkime O, o 20 nagrinėjamų taškų iš eilės pagal laikrodžio rodyklę pažymėkime A_1, A_2, …, A_{20}. Dėl patogumo laikykime, kad $A_{21} = A_1$, $A_{22} = A_2$ ir t. t. Turime taisyklingąjį 20-kampį $A_1A_2 \ldots A_{20}$. Apskritimo spinduliai $OA_1, OA_2, \ldots, OA_{20}$ pilnąjį kampą dalija į 20 lygių kampų. Taigi $\angle A_iOA_{i+1} = 360° : 20 = 18°$ kiekvienam i.



Nagrinėkime Luko nubrėžtas atkarpas. Kiekviena iš jų jungia dvi taisyklingojo 20-kampio viršūnes. Kai šios viršūnės yra toliausiai viena nuo kitos (priešingos), tai viena iš jų yra 10-oji, skaičiuojant nuo kitos pagal laikrodžio rodyklę. Visais kitais atvejais viena iš dviejų viršūnių yra k-toji, kur $k < 10$, skaičiuojant pagal laikrodžio rodyklę nuo kitos. Todėl kiekvieną atkarpą galima užrašyti pavidalu A_iA_{i+k}, kur $k = 1, 2, 3, 4, \ldots, 10$. Kampas A_iOA_{i+k} lygus $k \cdot 18°$ (žr. pav.): atitinkamai $18°, 36°, 54°, 72°, \ldots, 180°$. Atkarpa A_iA_{i+k} yra ilgesnė už apskritimo spindulį, bet trumpesnė už skersmenį, kai $60° < k \cdot 18° < 180°$, taigi kai $4 \leqslant k \leqslant 9$.

Liko suskaičiuoti, kiek yra atkarpų A_iA_{i+k}, kai $k = 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Atkarpų A_iA_{i+4}, t. y. tokių, kurių galus apskritime skiria trys Luko pažymėti taškai, yra 20. Analogiškai yra po 20 atkarpų A_iA_{i+5}, A_iA_{i+6}, A_iA_{i+7}, A_iA_{i+8}, A_iA_{i+9}, o iš viso tinkamų atkarpų yra $20 \cdot 6 = 120$.

27. **(A)** $z = \dfrac{y}{1+x}$

! Lygybėje $6^z = 7$ septynetą galime pakeisti dvejeto laipsniu 2^y. Jos kairiąją pusę galima užrašyti per dvejetą ir trejetą ($6 = 2 \cdot 3$), o trejetą vėlgi pakeisti dvejeto laipsniu 2^x. Taip gauname lygybę tik su dvejeto laipsniais $2^{\cdots} = 2^{\cdots}$:

$$2^y = 7 = 6^z = (2 \cdot 3)^z = (2 \cdot 2^x)^z = (2^{x+1})^z = 2^{(x+1)z}$$

$$2^{(x+1)z} = 2^y, \qquad (x+1)z = y, \qquad z = \frac{y}{1+x}.$$

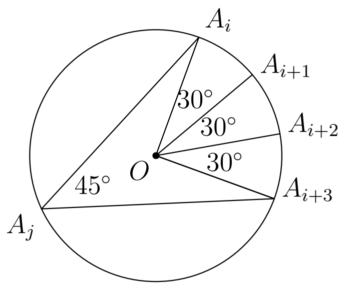
!! Uždavinį galima išspręsti, logaritmavus duotąsias lygybes:

$$x \ln 2 = \ln 3, \qquad y \ln 2 = \ln 7, \qquad z \ln 6 = \ln 7,$$
$$y \ln 2 = \ln 7 = z \ln 6 = z(\ln 2 + \ln 3) = z(\ln 2 + x \ln 2) = z(1+x)\ln 2,$$
$$y = z(1+x), \qquad z = \frac{y}{1+x}.$$

28. (D) 84

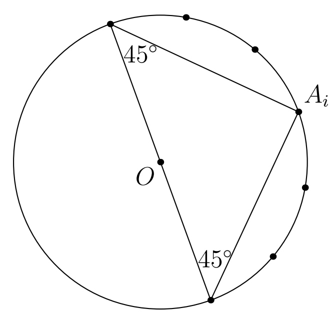
! Duotojo apskritimo centrą pažymėkime O, o 12 apskritimo taškų iš eilės pagal laikrodžio rodyklę pažymėkime A_1, A_2, …, A_{12}. Dėl patogumo laikykime, kad $A_{13} = A_1$, $A_{14} = A_2$ ir t. t. Turime taisyklingąjį 12-kampį $A_1A_2 \ldots A_{12}$. Apskritimo spinduliai OA_1, OA_2, …, OA_{12} pilnąjį kampą dalija į 12 lygių kampų. Taigi $\angle A_iOA_{i+1} = 360° : 12 = 30°$ kiekvienam i.

Liepa turi pasirinkti skirtingus apskritimo taškus A_i, A_j, A_k, kuriems įbrėžtinis kampas $A_iA_jA_k$ lygus 45°. Taip bus tada ir tik tada, kai atitinkamas centrinis kampas A_iOA_k lygus $2 \cdot 45° = 90°$, o taškas A_j nėra šio stačiojo kampo viduje. Centrinį statųjį kampą A_iOA_k turi sudaryti trys centriniai kampai po 30°. Todėl viena iš taisyklingojo 12-kampio viršūnių A_i ir A_k turi būti trečioji, skaičiuojant pagal laikrodžio rodyklę nuo kitos. Šių viršūnių tarpusavio tvarka nesvarbi, todėl galime laikyti, kad $A_k = A_{i+3}$.



Kiekvienam $i = 1, 2, \ldots, 12$ pasirinkus taškus A_i ir $A_k = A_{i+3}$, likęs taškas A_j gali būti bet kuri 12-kampio viršūnė, išskyrus keturias viršūnes A_i, A_{i+1}, A_{i+2} ir A_{i+3} (žr. pav. viršuje). Kiekvienai iš 20 galimų i reikšmių turime po $12 - 4 = 8$ galimybes, kaip pasirinkti A_j.

Gauname $12 \cdot 8 = 96$ trejetus A_i, A_j, A_k, kuriems $\angle A_iA_jA_k = 45°$. Tačiau tinkamų trikampių yra mažiau nei tokių 45° kampų, nes kai kurie iš 96 kampų priklauso tiems patiems trikampiams. Kiekvieną tokį trikampį, turintį du 45° kampus (taigi statųjį lygiašonį), gausime, pasirinkę bet kurį tašką A_i kaip to trikampio stačiojo kampo viršūnę bei pasirinkę dar dvi 12-kampio viršūnes, kurių kiekviena yra trečioji, skaičiuojant nuo A_i prieš arba pagal laikrodžio rodyklę (tai bus duotojo apskritimo skersmens galai; žr. pav. dešinėje). Tokių trikampių yra 12 ($A_1A_4A_7$, $A_2A_5A_8$, …). Juose yra $12 \cdot 2 = 24$ iš 96 gautųjų 45° kampų. Taigi yra $96 - 24 = 72$ tinkami trikampiai, turintys po vieną 45° kampą, ir dar 12 tinkamų trikampių, turinčių po du tokius kampus. Iš viso gauname $72 + 12 = 84$ tinkamus trikampius.



29. (B) 3

! Naudodamiesi lygybe $\overline{ABCD} = A^A + B^B + C^C + D^D$, mėginkime įvertinti, kiek dideli ar maži gali būti skaitmenys A, B, C, D.

Jei bent vienas iš skaitmenų yra ne mažesnis už 6, tai $\overline{ABCD} > 6^6 = 36^3 > 30^3 > 9\,999$. Todėl skaitmenys A, B, C, D priklauso aibei $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Kita vertus, jei jie visi mažesni už 5, tai

$$1\,111 \leqslant \overline{ABCD} \leqslant 4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4 = 4^5 = 1\,024 < 1\,111.$$

Todėl bent vienas iš skaitmenų A, B, C, D lygus 5.

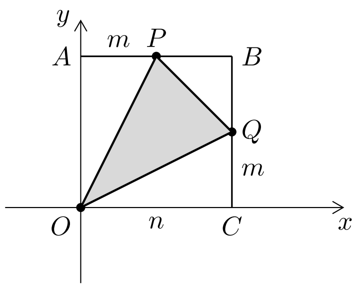
Kadangi $5^5 = 125 \cdot 5 \cdot 5 > (120 \cdot 5) \cdot 5 = 3\,000$, tai $\overline{ABCD} > 3\,000$. Be to, jei skaičiaus $\overline{ABCD}$ bent du skaitmenys lygūs 5, tai $5\,555 \geqslant \overline{ABCD} > 5^5 + 5^5 > 6\,000$. Taigi lygiai vienas iš keturių skaitmenų lygus 5, o kiti trys yra ne didesni už 4. Vadinasi,

$$3\,000 < \overline{ABCD} \leqslant 5^5 + 4^4 + 4^4 + 4^4 = 625 \cdot 5 + 256 \cdot 3 < 4\,000, \qquad A = 3.$$

Skaitmenų B, C, D reikšmių nustatyti nebūtina. Perrenkant likusias galimybes, gaunamas vienintelis tinkamas skaičius $\overline{ABCD}$, lygus $3435 = 3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5$.

30. (A) 2

! Tiesės $x = n$ ir $y = n$ bei koordinačių ašys riboja $n \times n$ kvadratą $OABC$, kurį sudaro trikampis OPQ ir statieji trikampiai OAP, PBQ, OCQ (žr. pav.).



Trikampio OPQ plotą S_{OPQ} išreikškime per kitų figūrų plotus:

$$\begin{aligned} S_{OPQ} &= S_{OABC} - S_{OAP} - S_{PBQ} - S_{OCQ} = \\ &= n^2 - \frac{mn}{2} - \frac{(n-m)^2}{2} - \frac{mn}{2} = \\ &= \frac{2n^2 - mn - (n^2 - 2mn + m^2) - mn}{2} = \frac{n^2 - m^2}{2} = \frac{(n+m)(n-m)}{2}. \end{aligned}$$

Taigi m ir n yra bet kokie natūralieji skaičiai, kuriems $n > m$ ir

$$(n+m)(n-m) = 2 \cdot 54 = 2^2 \cdot 3^3.$$

Natūraliųjų skaičių $n - m (> 0)$ ir $n + m$ sandauga dalijasi iš 2, todėl bent vienas iš jų lyginis. Skaičius $n + m = (n - m) + 2m$ yra to paties lyginumo kaip skaičius $n - m$, taigi abu šie skaičiai lyginiai. Natūraliųjų skaičių $\frac{n+m}{2}$ ir $\frac{n-m}{2}$ sandauga lygi 3^3. Be to, $\frac{n-m}{2} < \frac{n+m}{2}$, todėl tinka nebent tik $\frac{n-m}{2} = 1$ ir $\frac{n-m}{2} = 3$. Atitinkamai $\frac{n+m}{2} = 27$ ir $\frac{n+m}{2} = 9$. Pagal formules

$$m = \frac{n+m}{2} - \frac{n-m}{2}, \qquad n = \frac{n+m}{2} + \frac{n-m}{2}$$

lengvai gaunamos poros $(m, n) = (26, 28)$ ir $(m, n) = (6, 12)$, kurioms $(n+m)(n-m) = 2 \cdot 54$ ir $n > m$. Vadinasi, yra lygiai dvi tinkamos $m + n$ reikšmės: 54 ir 18.

Ekspertas

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	D
2	E
3	C
4	B
5	B
6	B
7	C
8	A
9	B
10	E
11	C
12	D
13	A
14	C
15	C
16	A
17	A
18	A
19	C
20	E
21	E
22	D
23	B
24	A
25	D
26	C
27	A
28	D
29	B
30	A