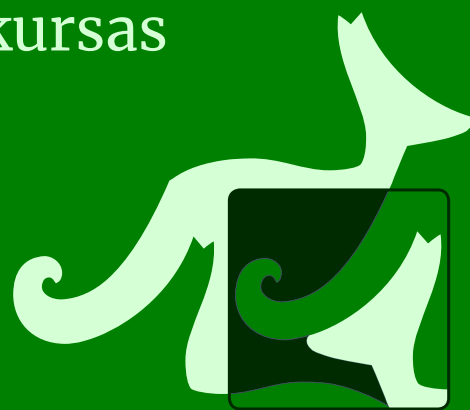
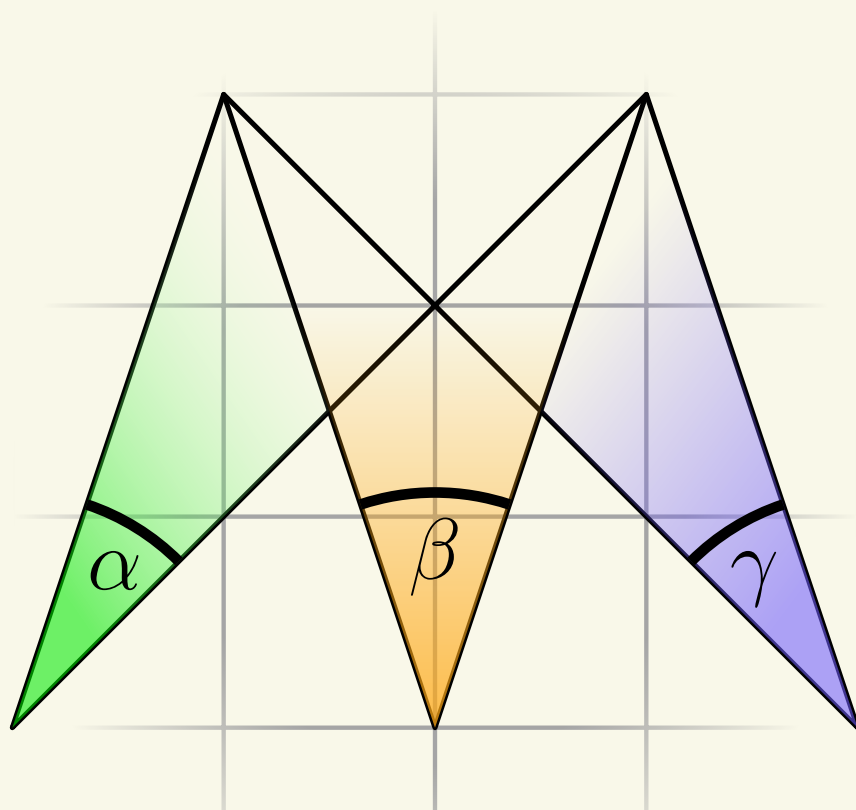


Tarptautinis matematikos konkursas
KENGŪRA



Kadetas

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI



2024

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA



KENGŪRA 2024. Kadetas

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Paulius Drungilas

Redaktorius
Juožas Juvencijus Mačys

Maketavo
Ugnė Gudžinskaitė

Turiny

Pratarmė	3
Sąlygos	5
Užduočių sprendimai	9
Atsakymai	18

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdienišku) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopian į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadyneje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spęsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 30300 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2024 metais.

Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamas, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis sprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrantančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto rinktis labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė skliti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pra-

dininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Matematikos ir informatikos institutas bei Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pas-tangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuo-liavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sporti-niuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažinę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai atečiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2024 metų kovo 21 dieną keliavo ir gausiai sprendė 7–8 klasių (*Kadeto* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu !), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu ?). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais ??, !!, !!! ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

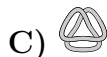
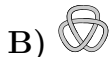
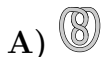
Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojai, šitiek daug turite!

Organizatoriai

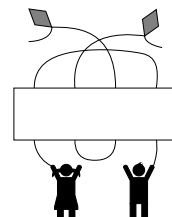
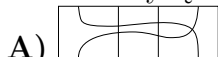
2024 m. *Kadeto* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Kurios iš žemiau pavaizduotų virvių neįmanoma gauti, lankstant paveikslėlyje dešinėje pavaizduotą virvę? Virvės kirpti negalima.

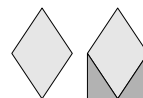


2. Kurį paveikslėlį reikia įklijuoti šalia pavaizduotame tuščiame stačiakampyje, kad vaikai laikytų skirtingus aitvarus?



3. Paveikslėlyje pavaizduotas rombas ir penkiakampis, gautas prie rombo pridėjus du stačiuosius trikampius. Kiek procentų penkiakampio plotas yra didesnis už rombo plotą?

A) 20% B) 25% C) 30% D) 40% E) 50%

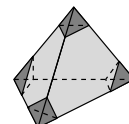


4.
$$\frac{20 \times 24}{2 \cdot 0 + 2 \cdot 4} =$$

A) 12 B) 30 C) 48 D) 60 E) 120

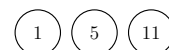
5. Adomas nupjovė keturis tetraedro kampus, kaip parodyta paveikslėlyje. Kiek viršūnių turi gautas briaunainis?

A) 8 B) 9 C) 11 D) 12 E) 15



6. Ema turi tris žetonus, ant kurių parašyti skaičiai 1, 5 ir 11 (žr. pav.). Ji nori juos sudėti paeiliui, kad susidarytų keturženklis skaičius. Kiek skirtingų keturženklių skaičių Ema gali gauti tokiu būdu?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9



7. Ant stalo gulėjo penki skanėstai: , , , ir . Elena mėgsta . Ema mėgsta , , ir . Austėja mėgsta , , ir . Gerda mėgsta , ir . Adomas mėgsta ir . Kiekvienas vaikas gavo tokį skanėstą, kokį mėgsta. Kas gavo ?

A) Elena B) Ema C) Austėja D) Gerda E) Adomas

8. Statinės tūris yra lygus bendram 12 vienodų didelių butelių tūriui. Jis taip pat lygus bendram 20 vienodų mažų butelių tūriui. Į tuščią statinę supiltas 9 didelių pilnų butelių turinys. Kiek daugiausiai mažų pilnų butelių turinys dar tilps į šią statinę?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

9. Į kiekvieną lentelės langelį Agota įrašė po vieną natūralųjį skaičių, o paskui juos uždengė. Keturi įrašytieji skaičiai yra skirtingi. Kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio skaičių sandaugos nurodytos paveikslėlyje. Kam lygi keturių lentelėje įrašytųjų skaičių suma?

		6
		8
4	12	

A) 10 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

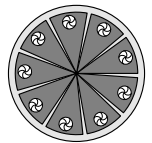
10. Prekybos centre keturių vienodų vežimėlių, maksimaliai įstumtų vienas į kitą, ilgis yra 108 cm. Dešimties tokių vežimėlių, maksimaliai įstumtų vienas į kitą, ilgis yra 168 cm. Kam lygus vieno vežimėlio ilgis centimetrais?



A) 60 B) 68 C) 78 D) 88 E) 90

Klausimai po 4 taškus

11. Kotryna iškepė pyragą ir supjaustė jį į dešimt vienodų dalių (tiesiomis linijomis nuo pyrago centro). Ji suvalgė vieną dalį, o likusias devynias išdėliojo vienodais tarpais, kaip parodyta paveikslėlyje. Koks yra kampas tarp gretimų pyrago dalių?



A) 5° B) 4° C) 3° D) 2° E) 1°

12. Evelina nori sudėti 4×4 lentelę, kurioje kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio keturių skaičių sumos būtų vienodos. Ji turi tris lentelės dalis

2	2
1	
2	

2	1	3	1
			1

	2	
3	1	2

ir reikia dar vienos. Kuria dalį Evelina turi panaudoti, kad sudėtų tokią lentelę?

A)

1	1	3
---	---	---

B)

2	1	0
---	---	---

C)

1	2	1
---	---	---

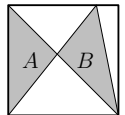
D)

2	2	2
---	---	---

E)

2	2	3
---	---	---

13. Kvadrato, kurio kraštinės ilgis lygus 10, nubrėžtos trys atkarpos. Dviejų užtušėtų trikampių plotai lygūs atitinkamai A ir B , kaip parodyta paveikslėlyje. Kam lygus skirtumas $A - B$?

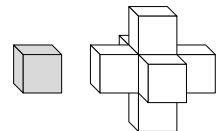


A) 0 B) 1 C) 2 D) 5 E) 10

14. Pingvinė Pipa kasdien eina žvejoti ir visada parneša 12 žuvų dviem savo pingviniukams. Kiekvieną dieną pirmajam sutiktam pingviniukui ji duoda 7 žuvis, o antrajam – 5 žuvis. Pingviniukai iš karto suėda visas gautas žuvis. Per kelias pastarąsias dienas vienas pingviniukas suėdė 44 žuvis. Kiek žuvų per tas dienas suėdė kitas pingviniukas?

A) 34 B) 40 C) 46 D) 52 E) 58

15. Dominykas turi daug vienodų kubelių. Dominykas prie vieno kubelio kiekvienos sienos priklijavo po kubelį (žr. pav.). Prie gautojo briaunainio kiekvienos sienos jis nori priklijuoti dar po vieną kubelį. Kiek dar kubelių prireiks Dominykui?



A) 18 B) 16 C) 14 D) 12 E) 10

16. Kengūra nušuoliavo į kalno viršūnę, o tada tuo pačiu keliu nušuoliavo žemyn ir grįžo į tą pačią vietą. Kiekvienas kengūros šuolis kelyje į kalno viršūnę yra 1 metro ilgio. Kiekvienas jos šuolis žemyn nuo kalno yra tris kartus ilgesnis už kiekvieną šuolį į kalno viršūnę. Kengūra iš viso atliko 2024 šuolius. Kokį atstumą metrais ji įveikė?

A) 506 B) 1012 C) 2024 D) 3036 E) 4048

17. Sofija padalijo stačiakampį į keturis mažesnius. Trijų gautųjų stačiakampių perimetrai yra 16, 18 ir 24, kaip parodyta paveikslėlyje. Kam lygus ketvirtąjo stačiakampio perimetras?
- | | |
|----|----|
| 18 | ? |
| 24 | 16 |
- A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16
18. Vanduo sudaro 80% šviežių grybų (pagal masę). Vanduo taip pat sudaro 20% džiovintų grybų (pagal masę). Kiek procentų sumažėja grybų masė džiovinimo metu?
- A) 60 B) 70 C) 75 D) 80 E) 85
19. Kiek skaitmenų turi mažiausias natūralusis skaičius, kurio skaitmenų sandauga yra lygi 2^{2024} ?
- A) 506 B) 674 C) 675 D) 1012 E) 2024
20. Ant stalo gulėjo devynios kortelės. Kiekvienoje kortelėje užrašytas vienas iš natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 9. Užrašytieji skaičiai yra skirtingi. Elena, Elžbieta, Gerda ir Simonas paėmė po dvi korteles. Paaiškėjo, kad Elenos skaičių suma lygi 6, Elžbietos skaičių skirtumas lygus 5, Gerdos skaičių sandauga lygi 18, o Simono vienas skaičius yra dvigubai didesnis už kitą jo skaičių. Kuris skaičius liko ant stalo?
- A) 1 B) 3 C) 6 D) 8 E) 9

Klausimai po 5 taškus

21. Skaitmenis nuo 0 iki 9 galima sudaryti iš horizontalių ir vertikalų brūkšnelių, kaip parodyta paveikslėlyje.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

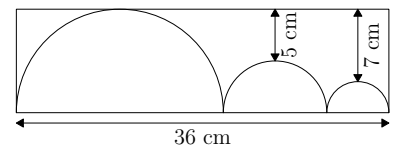
Elzė pasirinko tris skirtingus tokius skaitmenis. Šiuos skaitmenis iš viso sudaro 5 horizontalūs ir 10 vertikalų brūkšnelių. Kam lygi Elzės išsirinktų skaitmenų suma?

A) 9 B) 10 C) 14 D) 18 E) 19

22. Didžiausias pirminis skaičius, mažesnis už 50 ir lygus dviejų pirminių skaičių sumai, yra
- A) 37 B) 39 C) 41 D) 43 E) 47

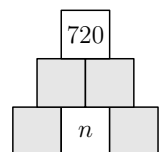
23. Į stačiakampį įbrėžti trys pusapskritimiai, kaip parodyta paveikslėlyje. Kam lygus šio stačiakampio perimetras centimetrais?

A) 82 B) 92 C) 96 D) 108 E) 120



24. Kiek yra keturženklų natūraliųjų skaičių, kurie dalijasi iš 8, 10 ir 12, bet nesidalija iš 9?
- A) 6 B) 8 C) 50 D) 52 E) 66

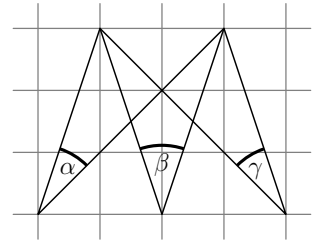
25. Elena ketina į lentelės kiekvieną langelį taip įrašyti po vieną natūralųjį skaičių, kad kiekviename vidurinės ir viršutinės eilutės langelyje įrašytas skaičius būtų lygus po juo esančiuose dviejuose gretimuose langeliuose įrašytų skaičių sandaugai. Ji jau įrašė skaičių 720 (žr. pav.). Keliais būdais Elena gali įrašyti skaičių n ?



A) 8 B) 6 C) 5 D) 4 E) 1

26. Raminta lentoje užrašė skaičius 4, 6, 12, 13, 22 ir 29 ir kiekvieną iš jų nuspalvino mėlynai arba geltonai. Julija vieną iš šių skaičių nutrynė. Paaiškėjo, kad lentoje likusių geltonųjų skaičių suma yra du kartus didesnė už lentoje likusių mėlynųjų skaičių sumą. Kurį skaičių Julija nutrynė?
- A) 4 B) 12 C) 13 D) 22 E) 29

27. Paveikslėlyje pavaizduoti trys kampai α , β ir γ . Kam lygi suma $\alpha + \beta + \gamma$?
- A) 60° B) 70° C) 75° D) 90° E) 120°

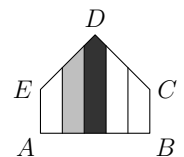


28. Kapitonas Flintas paprašė keturių piratų pasakyti, kiek aukso, sidabro ir vario monetų yra slėptuvėje. Jų atsakymai buvo užrašyti popieriaus lape, kuris, deja, buvo apgadintas (žr. pav.). Tik vienas piratas pasakė tiesą, kiti melavo, kiekvieną monetų skaičių nurodydami neteisingai. Kuris piratas sakė tiesą, jei žinoma, kad slėptuvėje iš viso buvo 30 monetų?
- A) Tomas B) Simas C) Jonas D) Lukas E) Neįmanoma nustatyti

	Monetos		
	auksinės	sidabrinės	varinės
Tomas		9	11
Simas	7		12
Jonas	10		10
Lukas	9	10	

29. Elzė važiuoja iš taško A į tašką B ir iš karto grįžta į tašką A. Gerda važiuoja iš taško B į tašką A ir iš karto grįžta į tašką B. Abi jos važiuoja tuo pačiu keliu, pradeda važiuoti tuo pačiu metu ir kiekviena abiem kryptimis važiuoja pastoviu greičiu. Elzės greitis yra tris kartus didesnis už Gerdos greitį. Pirmą kartą jos susitinka praėjus 15 minučių po starto. Po kiek minučių nuo starto jos susitiks antrą kartą?
- A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 45

30. Paveikslėlyje pavaizduotas penkiakampis $ABCDE$, kuriame $\angle A = \angle B = 90^\circ$, $AE = BC$ ir $ED = DC$. Atkarpoje AB pažymėti keturi taškai, dalijantys šią atkarpą į penkias lygias dalis. Iš šių keturių taškų nubrėžtos atkarpos, statmenos kraštinei AB (žr. pav.). Juodosios dalies plotas lygus 13, o pilkosios dalies plotas lygus 10. Kam lygus penkiakampio $ABCDE$ plotas?
- A) 45 B) 47 C) 49 D) 58 E) 60



Kadeto užduočių sprendimai

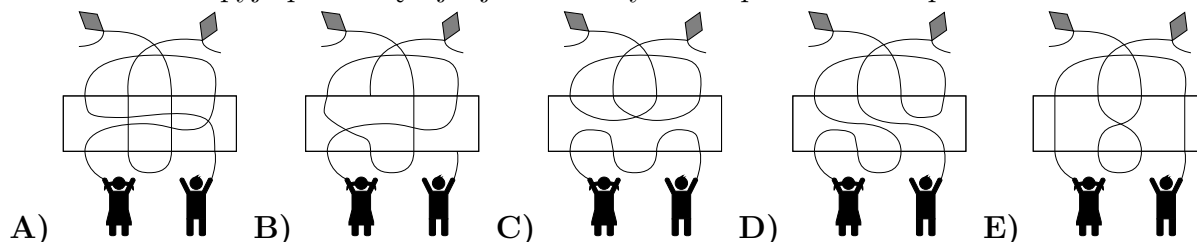
1. (B) 

! Akivaizdu, kad atsakymo variante **B** pavaizduotos virvės neįmanoma gauti, lankstant uždavinio sąlygoje pavaizduotą virvę.

Teisingas atsakymas **B**.

2. (D) 

! Tuščiam stačiakampyje paeiliui įklijuojame atsakymuose pavaizduotus paveikslėlius:

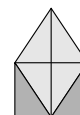


Dabar aišku, kad reikia įklijuoti atsakyme **D** pavaizduotą paveikslėlį.

Teisingas atsakymas **D**.

3. (E) 50%

! Nubrėžkime rombo įstrižaines (žr. pav. dešinėje). Dabar aišku, kad prie rombo pridėtų dviejų stačiųjų trikampių plotų suma lygi pusei rombo ploto. Taigi penkiakampio plotas yra 50% didesnis už rombo plotą.



Teisingas atsakymas **E**.

4. (D) 60

! Skaičiuojame:

$$\frac{20 \times 24}{2 \cdot 0 + 2 \cdot 4} = \frac{20 \times 3 \times 8}{8} = 20 \times 3 = 60.$$

Teisingas atsakymas **D**.

5. (D) 12

! Vietoje kiekvienos nupjautos tetraedro viršūnės atsirado trys naujos viršūnės. Kadangi tetraedras turi lygiai keturias viršūnes, tai Adomo gautasis briaunainis turi lygiai $4 \cdot 3 = 12$ viršūnių.

Teisingas atsakymas **D**.

6. **(B)** 4

! Tarkime, kad Ema iš žetonų sudėjo keturženklį skaičių n . Jei skaičius n prasideda skaitmeniu 5, tai $n = 5111$. Jei skaičius n baigiasi skaitmeniu 5, tai $n = 1115$. Jei skaičius n prasideda ir baigiasi skaitmeniu 1, tai $n = 1511$ arba 1151 . Vadinasi, Ema gali gauti lygiai keturis keturženklus skaičius.

Teisingas atsakymas **B**.

7. **(E)** Adomas

! Kadangi Elena mėgsta obuolius, o Adomas mėgsta obuolius arba vyšnias, tai Adomas gavo vyšnias. Lieka įsitikinti, kad tikrai kiekvienas vaikas galėjo gauti po mėgstamą skanėstą. Pavyzdžiui, vaikai galėjo gauti po skanėstą taip: Elena gavo obuolį, Ema – braškę, Austėja – bananą, Gerda – vynuogės, o Adomas – vyšnias.

Teisingas atsakymas **E**.

8. **(C)** 5

! Bendras 9 didelių pilnų butelių tūris sudaro $\frac{9}{13} = \frac{3}{4}$ statinės tūrio. Taigi į tuščią statinę supylus 9 didelių pilnų butelių turinį, $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ jos tūrio dar galima užpildyti mažų butelių turiniu. Vadinasi, į statinę dar tilps $\frac{1}{4} \cdot 20 = 5$ mažų pilnų butelių turinys.

Teisingas atsakymas **C**.

9. **(C)** 13

! Į lentelės langelius įrašytus skaičius pažymėkime a , b , c ir d (žr. pav.).

a	b	6
c	d	8
4	12	

Kadangi $ac = 4$, tai $c = 1, 2$ arba 4 . Jei $c = 1$, tai $a = 4$. Tačiau $ab = 6$ ir skaičius 6 nesidalija iš 4. Todėl $c = 2$ arba 4 . Jei $c = 2$, tai iš lygybės $ac = 4$ gauname, kad $a = 2$. Tačiau visi keturi skaičiai a , b , c ir d yra skirtingi. Vadinasi, $c = 4$ ir $a = 1$. Dabar iš lygybių $ab = 6$, $bd = 12$ randame likusius skaičius: $b = 6$ ir $d = 2$. Nesunku įsitikinti, kad skaičiai $a = 1$, $b = 6$, $c = 4$ ir $d = 2$ tenkina uždavinio sąlygas. Taigi keturių lentelėje įrašytų skaičių suma lygi $4 + 1 + 6 + 2 = 13$.

Teisingas atsakymas **C**.

10. **(C)** 78

! Dešimties maksimaliai įstumtų vienas į kitą vežimėlių eilės ir keturių maksimaliai įstumtų vienas į kitą vežimėlių eilės ilgių skirtumas lygus $168 - 108 = 60$ cm. Vadinasi, kiekvienas papildomas vežimėlis, maksimaliai įstumtas į jau esančią vežimėlių eilę, jos ilgį padidina $\frac{60}{6} = 10$ cm. Kadangi keturių maksimaliai įstumtų vienas į kitą vežimėlių eilės ilgis lygus 108 cm, tai vieno vežimėlio ilgis lygus $108 - 3 \cdot 10 = 78$ cm.

Teisingas atsakymas **C**.

11. (B) 4°

! Bet kuri iš dešimties Kotrynos gautų pyrago dalių sudarys kampą, kurio didumas lygus $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$. Tarp likusių devynių pyrago dalių yra devyni vienodi tarpai. Taigi kampas tarp gretimų pyrago dalių lygus $\frac{36^\circ}{9} = 4^\circ$.

Teisingas atsakymas B.

12. (A)

1	1	3
---	---	---

! Detalės

2	1	3	1
			1

 pirmoji eilutė bus 4×4 lentelės viena iš eilučių arba vienas iš stulpelių. Vadinasi, 4×4 lentelės kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio keturių skaičių suma lygi $2 + 1 + 3 + 1 = 7$, o visų lentelės skaičių suma lygi $4 \cdot 7 = 28$. Kadangi trijų detalių

2	2
1	
2	

2	1	3	1
			1

	2	
3	1	2

 visų skaičių suma lygi 23, tai Evelina turi panaudoti detalę, kurios skaičių suma lygi $28 - 23 = 5$. Lieka pastebėti, kad tik atsakymo variante A nurodytos detalės visų skaičių suma lygi 5.

Nesunku įsitikinti, kad Evelina gali sudėti 4×4 lentelę, tenkinančią uždavinio sąlygas:

2	1	3	1
2	2	2	1
1	3	1	2
2	1	1	3

Teisingas atsakymas A.

13. (A) 0

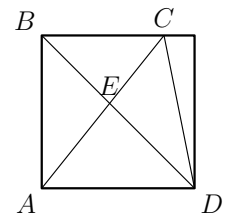
! Brėžinyje pažymėkime taškus A, B, C, D ir E (žr. pav. dešinėje).

Trikampių ABD ir ACD plotai lygūs, nes jie turi bendrą kraštinę AD ir jų aukštinių, nuleistų į šią kraštinę, ilgiai yra lygūs kvadrato kraštinei. Todėl

$$S_{BEA} = S_{ABD} - S_{AED} = S_{ACD} - S_{AED} = S_{CED}.$$

Vadinasi, $S_{BEA} - S_{CED} = 0$.

Teisingas atsakymas A.



14. (D) 52

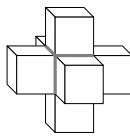
! Per kelias pastarąsias dienas vienas iš pingviniukų suėdė 44 žuvis. Tarkime, kad lygiai n dienų šis pingviniukas gavo po 7 žuvis ir lygiai m dienų jis gavo po 5 žuvis. Tada $7n + 5m = 44$. (Tada kitas pingviniukas per šias $n + m$ dienų suėdė $5n + 7m$ žuvų.) Iš čia gauname, kad $n \leq 6$. Be to, $44 - 7n = 5m$, todėl skaičius $44 - 7n$ turi dalintis iš 5. Patikrinę reikšmes $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, gauname, kad tik su reikšme $n = 2$ skaičius $44 - 7n$ dalijasi iš 5. Tuomet $m = \frac{44-7n}{5} = \frac{44-7 \cdot 2}{5} = 6$. Taigi per $n + m = 2 + 6 = 8$ dienas kitas pingviniukas suėdė lygiai $5n + 7m = 5 \cdot 2 + 7 \cdot 6 = 52$ žuvis.

Teisingas atsakymas D.

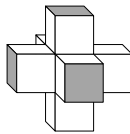
!! Kalbamų dienų buvo < 9 (kitaip pingvinukas būtų suėdęs $\geq 9 \cdot 5 = 45$ žuvis), bet > 7 (kitaip jis būtų suėdęs $\leq 6 \cdot 7 = 42$ žuvis). Vadinasi, vienas pingvinukas suėdė 44 žuvis per 8 dienas. Kitam teko $8 \cdot 12 - 44 = 52$ žuvys.

15. **(A)** 18

! Dominykas prie pirmojo kubelio kiekvienos sienos priklijavo po vieną kubelį. Iš viso Dominykas priklijavo 6 kubelius. Gautasis briaunainis turi lygiai 12 briaunų, kiekviena iš kurių priklauso dviem priklijuotiems kubeliams (žr. pav.).



Išilgai tokios briaunos priklijuotas kubelis uždengia dvi briaunainio sienas, kurioms priklauso ši briauna. Tokiu būdu priklijuosime 12 kubelių. Galiausiai lieka 6 briaunainio sienos, kurios neturi bendrų taškų su pačiu pirmuoju kubeliu (žr. pav.).



Prie kiekvienos iš jų reikia priklijuoti dar po vieną kubelį. Taigi Dominykui prireiks $12 + 6 = 18$ kubelių.

Teisingas atsakymas **A**.

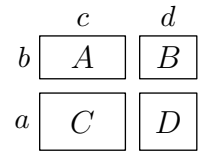
16. **(D)** 3036

! Kengūra, šuoliuodama iš pradinės vietos į kalno viršūnę, padarė tris kartus daugiau šuolių negu šuoliuodama nuo kalno viršūnės iki pradinės vietos. Taigi Kengūra, šuoliuodama nuo kalno viršūnės iki pradinės vietos, padarė lygiai $\frac{2024}{4} = 506$ šuolius. Vadinasi, atstumas, kurį įveikė Kengūra, lygus $2 \cdot 506 \cdot 3 = 3036$ m.

Teisingas atsakymas **D**.

17. **(B)** 10

! Keturis mažesnius stačiakampius pažymėkime raidėmis A , B , C ir D , o jų kraštinių ilgius – raidėmis a , b , c ir d (žr. pav. dešinėje).



Nesunku įsitikinti, kad stačiakampių A ir D perimetrų suma lygi stačiakampių B ir C perimetrų sumai ir lygi pradinio stačiakampio perimetrui. Iš tikrųjų, stačiakampių A , B , C ir D perimetrai atitinkamai lygūs $2(b+c)$, $2(b+d)$, $2(a+c)$ ir $2(a+d)$. Todėl stačiakampių A ir D perimetrų suma lygi $2(b+c) + 2(a+d) = 2(a+b+c+d)$. Taip pat ir stačiakampių B ir C perimetrų sumai lygi $2(b+d) + 2(a+c) = 2(a+b+c+d)$. Lieka pastebėti, kad pradinio stačiakampio perimetras lygus $2(a+b+c+d)$.

Taigi ketvirtąjo stačiakampio perimetras lygus $18 + 16 - 24 = 10$.

Teisingas atsakymas **B**.

18. **(C)** 75

! Grybai (be vandens) sudaro $100\% - 80\% = 20\%$ šviežių grybų (pagal masę). Vanduo sudaro penktadalį džiovintų grybų. Taigi vanduo sudaro ketvirtadalį grybų (be vandens). Kadangi džiovinant, grybų masė nesikeičia, tai džiovintuose grybuose likęs vanduo sudaro $\frac{1}{4} \cdot 20\% = 5\%$ šviežių grybų. Vadinasi, džiovinti grybai sudaro 25% šviežių grybų. Todėl džiovinimo metu grybų (kartu su vandeniu) masė sumažėja $100\% - 25\% = 75\%$.

Teisingas atsakymas **C**.

!! Patogu skaičiuoti masę, o ne procentus. Sakykime, džioviname A (kg) šviežių grybų. Juose yra $0,8A$ vandens ir $0,2A$ grybienos. Grybienos $0,2A$ liks ir džiovintuose grybuose, o kadangi grybiena sudaro $0,8$ džiovintų grybų masės, tai džiovintų grybų bus $0,2 : 0,8 = 0,25A$. Grybų masė džiovinant sumažėjo $A - 0,25A = 0,75A$, o tai yra 75% .

19. **(C)** 675

! Tegul n yra mažiausias natūralusis skaičius, kurio skaitmenų sandauga lygi 2^{2024} . Tuomet kiekvienas jo skaitmuo yra 1, 2, 4 arba 8. Joks skaičiaus n skaitmuo nelygus 1, nes išbraukę šį skaitmenį nepakeistume skaitmenų sandaugos ir gautume mažesnį skaičių už n . Taigi kiekvienas skaičiaus n skaitmuo lygus 2, 4 arba 8. Pažymėkime $n = \overline{s_1 s_2 \dots s_t}$, kur $s_1, s_2, \dots, s_t$ yra skaičiaus n skaitmenys. Tada $2^{2024} = s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_t \leq 8 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 8 = 8^t$. Iš čia gauname, kad $2^{3t} \geq 2^{2024}$ ir atitinkamai $t \geq \frac{2024}{3} = 674,666\dots$. Taigi skaičius n turi mažiausiai 675 skaitmenis. Jei skaičius n turi lygiai 675 skaitmenis, tuomet 674 jo skaitmenys lygūs 8 (kitaip jo skaitmenų suma būtų ne didesnė už $8^{673} \cdot 4 \cdot 4 = 2^{2023}$) ir vienas skaitmuo lygus $2^{2024} - 8^{674} = 4$. Vadinasi, $n = \overline{488\dots 8}$, kur skaitmuo 8 pasikartoja lygiai 674 kartus.

Teisingas atsakymas **C**.

20. **E** 9

! Surašykime visus galimus dviejų skaičių variantus:

Elena: 1 ir 5 arba 2 ir 4;

Elžbieta: 1 ir 6 arba 2 ir 7 arba 3 ir 8 arba 4 ir 9;

Gerda: 2 ir 9 arba 3 ir 6;

Simonas: 1 ir 2 arba 2 ir 4 arba 3 ir 6 arba 4 ir 8.

Tarkime, kad Elenos skaičiai yra 2 ir 4. Tada Gerdos skaičiai yra 3 ir 6, o Elžbietos skaičiai yra 1 ir 6. Tačiau dabar netinka jokie Simono galimi skaičiai.

Taigi Elenos skaičiai yra 1 ir 5. Jei Gerdos skaičiai būtų 2 ir 9, tai Elžbietos skaičiai būtų 3 ir 8. Vėl netinka jokie Simono galimi skaičiai. Vadinasi, Gerdos skaičiai yra 3 ir 6. Surašykime visus galimus variantus:

Elena: 1 ir 5;

Elžbieta: 2 ir 7 arba 4 ir 9;

Gerda: 3 ir 6;

Simonas: 2 ir 4 arba 4 ir 8.

Dabar aišku, kad jei Elžbietos skaičiai būtų 4 ir 9, tai Simonui vėl netiktų nė vienas iš jam likusių variantų. Vadinasi, Elžbietos skaičiai yra 2 ir 7. Tada Simono skaičiai yra 4 ir 8.

Gavome, kad ant stalo liko skaičius 9. Be to, nustatėme, kad galėjo būti tik toks skaičių pasiskirstymas:

Elena: 1 ir 5;

Elžbieta: 2 ir 7;

Gerda: 3 ir 6;

Simonas: 4 ir 8.

Nesunku įsitikinti, kad šis skaičių pasiskirstymas tenkina uždavinio sąlygą.

Teisingas atsakymas **E**.

21. **A** 9

! Kiekviename skaitmenyje yra 2, 3 arba 4 vertikalūs brūkšneliai. Nesunku įsitikinti, kad vienas iš Elzės pasirinktų skaitmenų turi lygiai 4 vertikalius brūkšnelius, o kiti du atitinkamai 3 ir 3 arba 4 ir 2 vertikalius brūkšnelius. Kita vertus, kiekviename skaitmenyje yra 0, 1, 2 arba 3 horizontalūs brūkšneliai. Jei bent vienas iš Elzės pasirinktų skaitmenų turi lygiai 0 horizontalių brūkšnelių, tai tas skaitmuo yra 1 ir jis turi lygiai du vertikalius brūkšnelius. Todėl likę du Elzės pasirinkti skaitmenys turi po 4 vertikalius brūkšnelius. Šie du skaitmenys yra 0 ir 8. Nesunku įsitikinti, kad skaitmenys 0, 1 ir 8 tenkina uždavinio sąlygas.

Toliau laikysime, kad kiekvienas Elzės pasirinktas skaitmuo turi bent vieną horizontalų brūkšnelį. Tada vienas iš Elzės pasirinktų skaitmenų turi lygiai 1 horizontalų brūkšnelį, o kiti du atitinkamai 1 ir 3 arba 2 ir 2 horizontalius brūkšnelius. Kadangi vienintelis skaitmuo 0 turi lygiai du horizontalius brūkšnelius, tai paskutinis atvejis neįmanomas.

Jei du Elzės pasirinkti skaitmenys turi po 1 horizontalų brūkšnelį, tai šie skaitmenys yra 4 ir 7. Trečiasis Elzės pasirinktas skaitmuo turi $5 - 2 = 3$ horizontalius ir $10 - 3 - 2 = 5$ vertikalius brūkšnelius. Tačiau tokio skaitmens nėra.

Taigi Elzė pasirinko skaitmenis 0, 1 ir 8, ir jų suma lygi 9.

Teisingas atsakymas **A**.

22. **D** 43

! Tegul n – didžiausias pirminis skaičius, mažesnis už 50 ir lygus dviejų pirminių skaičių sumai. Kadangi $43 = 41 + 2$ ir skaičiai 2, 41 ir 43 yra pirminiai, tai $n \geq 43$. Jei $n > 43$, tai $n = 47$ – nelyginis skaičius, išreiškiamas dviejų pirminių suma. Tada vienas iš šių dėmenų yra lyginis pirminis skaičius. Vienintelis lyginis pirminis skaičius yra 2. Tačiau $47 - 2 = 45$ nėra pirminis skaičius. Vadinas, $n = 43$.

Teisingas atsakymas **D**.

!! Skaičius 49 ne pirminis, 48 – ne pirminis. 47 – pirminis, bet turėtų lyginį pirminį dėmenį 2, t.y. būtų $2 + 45$, o 45 – ne pirminis. Sekantis pirminis 43. Jis vėl lyginio ir nelyginio suma, taigi $43 = 2 + 41$. Vadinas, 43 yra didžiausias neperžengiantis 50 pirminis skaičius, lygus kitų dviejų pirminių sumai.

23. **B** 92

! Didžiausio pusapskritimo spindulio ilgį centimetrais pažymėkime r . Tada vidurinio pusapskritimo spindulio ilgis centimetrais lygus $r - 5$, o mažiausio pusapskritimo $r - 7$. Stačiakampio ilgesnioji kraštinė lygi visų trijų pusapskritimų skersmenų sumai. Taigi $2r + 2(r - 5) + 2(r - 7) = 36$. Iš čia gauname, kad $r = 10$. Vadinas, stačiakampio perimetras lygus $2(10 + 36) = 92$ cm.

Teisingas atsakymas **B**.

24. © 50

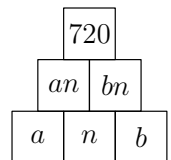
! Kadangi $8 = 2^3$, $10 = 2 \cdot 5$ ir $12 = 2^2 \cdot 3$, tai reikia rasti visus keturženklus skaičius, kurie dalijasi iš $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$, bet nesidalija iš 9. Bet kurį natūralųjį skaičių, kuris dalijasi iš 120, galima užrašyti pavidalu $120n$, kur n yra natūralusis skaičius. Šis skaičius bus keturženklis tada ir tik tada, kai $1000 \leq 120n \leq 9999$. Iš čia gauname, kad $9 \leq n \leq 83$. Vadinasi, yra lygiai $83 - 9 + 1 = 75$ keturženkliai skaičiai, kurie dalijasi iš 120. Lieka suskaičiuoti, kiek iš jų dalijasi iš 9. Taigi reikia suskaičiuoti, kiek yra keturženklių skaičių, kurie dalijasi iš $3 \cdot 120 = 360$. Kiekvieną tokių skaičių galima užrašyti pavidalu $360m$, kur m – natūralusis skaičius. Be to, skaičius $360m$ bus keturženklis tada ir tik tada, kai $1000 \leq 360m \leq 9999$. Iš čia gauname, kad $3 \leq m \leq 27$. Vadinasi, yra lygiai $27 - 3 + 1 = 25$ keturženkliai skaičiai, kurie dalijasi iš 360.

Taigi yra lygiai $75 - 25 = 50$ keturženklių natūraliųjų skaičių, kurie dalijasi iš 8, 10, 12, bet nesidalija iš 9.

Teisingas atsakymas C.

25. Ⓑ 6

! Elenos apatiniuose kraštiniuose langeliuose įrašytus skaičius pažymėkime a ir b (žr. pav.).



Tuomet $720 = abn^2$. Išskaidykime skaičių 720 pirminiais dauginamaisiais: $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Kadangi skaičius 720 nesidalija iš 5^2 , tai skaičius n nesidalija iš 5. Todėl skaičių n galima išreikšti pavidalu $n = 2^x \cdot 3^y$, kur x ir y yra neneigiami sveikieji skaičiai. Be to, skaičius 720 dalijasi iš $n^2 = 2^{2x} \cdot 3^{2y}$. Todėl $2x \leq 4$ ir $2y \leq 2$. Taigi $x = 0, 1$ arba 2 ir $y = 0$ arba 1 . Kita vertus, su bet kuria skaičiaus x reikšme 0, 1 arba 2 ir su bet kuria skaičiaus y reikšme 0 arba 1, skaičiai $n = 2^x \cdot 3^y$, $a = 1$ ir $b = \frac{720}{n^2}$ tenkina uždavinio sąlygas. Vadinasi, Elena skaičių n gali įrašyti $3 \cdot 2 = 6$ būdais.

Teisingas atsakymas B.

26. Ⓔ 29

! Julijai nutrynus vieną iš skaičių, paaiškėjo, kad lentoje likusių geltonųjų skaičių suma yra du kartus didesnė už lentoje likusių mėlynųjų skaičių sumą. Vadinasi, lentoje likusių geltonųjų ir mėlynųjų skaičių suma dalijasi iš 3. Kadangi Ramintos užrašytų skaičių 4, 6, 12, 13, 22 ir 29 sumos 86 dalybos iš 3 liekana lygi 2, tai Julijos nutrinto skaičiaus dalybos iš 3 liekana taip pat lygi 2. Lieka pastebėti, kad vienintelio Ramintos užrašyto skaičiaus 29 dalybos iš 3 liekana lygi 2. Vadinasi, Julija nutrynė skaičių 29. Nesunku įsitikinti, kad Raminta galėjo taip nuspelvinti skaičius 4, 6, 12, 13 ir 22, kad būtų tenkinamos uždavinio sąlygos. Pavyzdžiui, Raminta galėjo skaičius 6 ir 13 nuspelvinti mėlynai, o skaičius 4, 12 ir 22 – geltonai; tada $4 + 12 + 22 = 38 = 2 \cdot 19 = 2 \cdot (6 + 13)$.

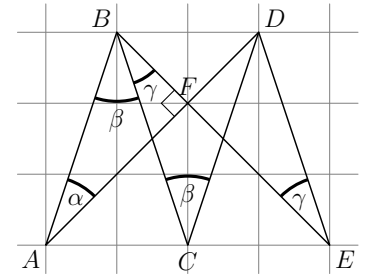
Teisingas atsakymas E.

27. **(D)** 90°

! Šešis paveikslėlyje pavaizduotų tiesių sankirtos taškus pažymėkime A, B, C, D, E ir F (žr. pav.).

Kadangi tiesės AB ir CD yra lygiagrečios, tai $\angle ABC = \angle BCD = \beta$. Panašiai gauname, kad $\angle CBE = \angle DEB = \gamma$, nes tiesės BC ir DE taip pat yra lygiagrečios. Lieka pastebėti, kad stačiojo trikampio ABF smailiųjų kampų FAB ir ABF suma lygi 90° . Taigi $\angle FAB + \angle ABF = \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

Teisingas atsakymas **D**.



28. **(B)** Simas

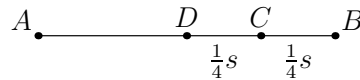
! Tomas melavo, nes jei jo atsakymas būtų tiesa, tai jo nurodytas auksinių monetų skaičius $30 - 9 - 11 = 10$ sutaptų su Jono nurodytu auksinių monetų skaičiumi. Panašiai gauname, kad Jonas ir Lukas melavo. Iš tikrųjų, jei Jono atsakymas būtų tiesa, tai jo nurodytas sidabrinių monetų skaičius $30 - 10 - 10 = 10$ sutaptų su Luko nurodytu sidabrinių monetų skaičiumi. Jei Luko atsakymas būtų tiesa, tai jo nurodytas varinių monetų skaičius $30 - 9 - 10 = 11$ sutaptų su Tomo nurodytu varinių monetų skaičiumi. Vadinasi, Simas sakė tiesą. Keturių piratų atsakymai galėjo būti, pavyzdžiui, tokie:

	auksinės	sidabrinės	varinės
Tomas	6	9	11
Simas	7	11	12
Jonas	10	12	10
Lukas	9	10	9

Teisingas atsakymas **B**.

29. **(C)** 30

! Kelio tarp A ir B ilgį pažymėkime s , o vietą, kurioje Elzė ir Gerda pirmą kartą susitiko, pažymėkime C :



Kadangi Elzės greitis tris kartus didesnis už Gerdos greitį, tai kelio nuo A iki C ilgis $AC = \frac{3}{4}s$, o kelio nuo C iki B ilgis $CB = \frac{1}{4}s$. Per 15 minučių nuo pirmojo susitikimo Gerda nuo taško C nuvažiuos dar $\frac{1}{4}s$ kelio iki taško D (žr. pav.). Kita vertus, Elzė per 15 minučių nuo pirmojo susitikimo nuvažiuos tris kartus ilgesnį kelią – nuo C iki B ($\frac{1}{4}s$ kelio), nuo B iki C ($\frac{1}{4}s$ kelio) ir nuo C iki D ($\frac{1}{4}s$ kelio). Vadinasi, Elzė ir Gerda antrą kartą susitiks po $15 + 15 = 30$ minučių.

Teisingas atsakymas **C**.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	B
2	C
3	E
4	D
5	D
6	B
7	E
8	C
9	C
10	C
11	B
12	A
13	A
14	D
15	A
16	D
17	B
18	C
19	D
20	E
21	A
22	E
23	B
24	D
25	D
26	E
27	D
28	B
29	C
30	A