

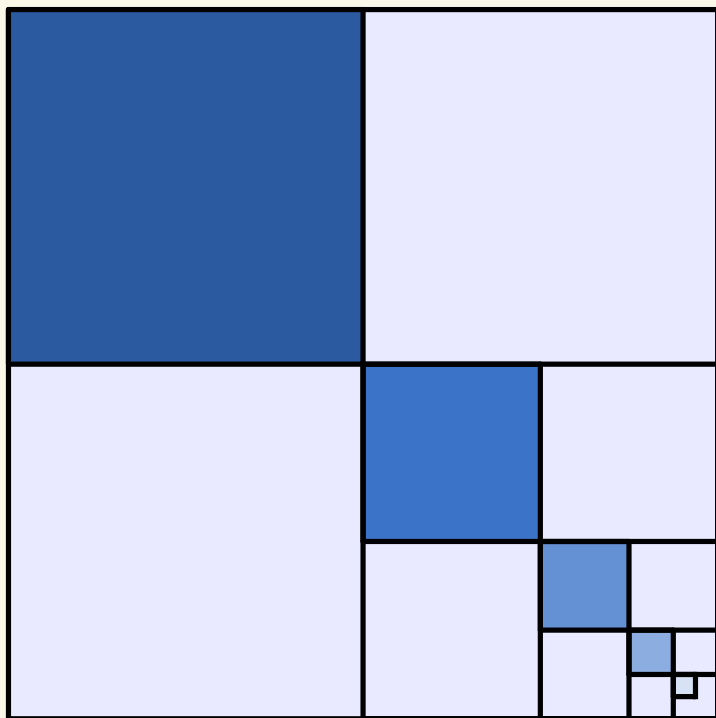
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA



Senjoras

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI



2023

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA



KENGŪRA 2023. Senjoras
TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Maketavo
Ugnė Gudžinskaitė

Turiny

Pratarmė	4
Sąlygos	6
Užduočių sprendimai	10
Atsakymai	25

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdienišku) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gdynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos sprendamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 27000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2023 metais. Nors, žinoma, šiais metais viskas dėl tos nelemtos pandemijos atrodė, pakrypo ir klostėsi visiškai kitaip negu iki šiol. Pasitvirtino visiems teoriškai gerai girdėta išmintis, kad karantininis gyvenimas yra pilnas staigmenų ir netikėtumų: konkursas iš trečiojo kovo ketvirtadienio nusikėlė į vėlesnę datą ir vyko nuotoliniu būdu.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamas, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos uždutis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrantančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo

ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšiuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažinę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnanti ateitis, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2023 metų kovo 16 dieną keliavo ir gausiai sprendė 11–12 klasių (*Senjoro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys patikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu !), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu ?). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais ??, !!, !!! ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

2023 m. *Senjoro* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. $\frac{7777^2}{5555 \cdot 2222} =$

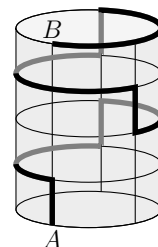
- A) $\frac{77}{110}$ B) 1 C) $\frac{7}{10}$ D) $\frac{49}{10}$ E) 49

2. Julijai paridenus 5 lošimo kauliukus, atvirtusių akučių skaičių suma lygi 19. Kiek daugiausiai kauliukų atvirto 6 akutėmis?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

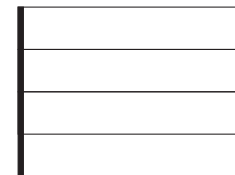
3. Skardinė yra ritinio formos. Jos aukštis lygus 15 cm, o jos pagrindo (skritulio) perimetras lygus 30 cm. Skruzdėlė, lipdama tik vertikaliomis atkarpomis ir horizontalių apskritimų lankais, iš apatinio pagrindo taško *A* nukeliavo į tiesiai virš jo esantį viršutinio pagrindo tašką *B*. Skruzdėlės trajektoriją paveikslėlyje rodo pariebinta linija. Koks yra skruzdėlės trajektorijos ilgis (centimetrais)?

- A) 45 B) 55 C) 60 D) 65 E) 75



4. Jurgis turi keturių spalvų flomasterius. Vėliavą, pavaizduotą paveikslėlyje, jis nori nuspalvinti šiomis spalvomis, kad kiekviena iš trijų vėliavos juostų būtų nuspalvinta viena spalva ir kad jokios dvi gretimos juostos nebūtų nuspalvintos ta pačia spalva. Kiek yra vėliavų, kurias galima gauti tokiu būdu?

- A) 24 B) 27 C) 32 D) 36 E) 64

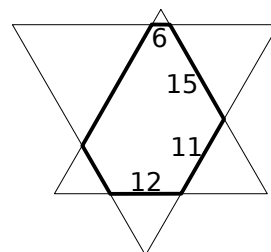


5. Koku skaitmeniu baigiasi skaičius $(5^5 + 1)(5^{10} + 1)(5^{15} + 1)$?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

6. Dviejų lygiakraščių trikampių, kurių atitinkamos kraštinės lygiagrečios, sankirta yra šešiakampis. Paveikslėlyje nurodyti keturių jo kraštinių ilgiai. Koks yra šio šešiakampio perimetras?

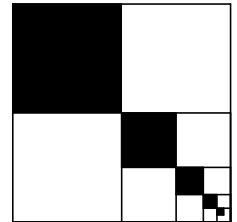
- A) 64 B) 66 C) 68 D) 70 E) 72



7. Natūralųjų skaičių n vadinkime **antriniu**, jei jis turi lygiai tris teigiamus daliklius ir šie dalikliai lygūs 1, 2, n . Kiek yra antrinių natūraliųjų skaičių?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8. Penkių skaičių a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 suma lygi S . Kiekvienam $k = 1, 2, 3, 4, 5$ yra teisinga lygybė $a_k = k + S$. Tada $S =$
 A) $\frac{15}{4}$ B) $-\frac{15}{4}$ C) -15 D) 15 E) -4
9. Kiek yra natūraliųjų skaičių porų (x, y) , kurioms teisinga lygybė $x + 2y = 2^{10}$?
 A) $2^9 - 1$ B) 2^9 C) $2^9 + 1$ D) $2^9 + 2$ E) 0
10. Duotas kvadratas, kurio plotas lygus 84. Jis padalytas į 2×2 lygius kvadratus. Turint kvadratą, padalytą į 2×2 lygius kvadratus, leidžiamas toks veiksmas: viršutinis kairysis iš keturių lygių kvadratų nuspalvinamas, o apatinis dešinysis pats padalijamas į 2×2 lygius kvadratus. Pradedant duotuoju kvadratu, šis veiksmas atliktas su kiekvienu nauju kvadratu, padalytu į 2×2 mažesnius (žr. pav.). Koks yra duotojo kvadrato nuspalvintos srities plotas?
 A) 24 B) 28 C) 31 D) 35 E) 42



Klausimai po 4 taškus

11. Natūraliojo skaičiaus n faktorialas $n!$ yra skaičius $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Kokia yra natūraliojo skaičiaus N skaitmenų suma, jei $N! = 6! \cdot 7!$?
 A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 9
12. Kiek yra sveikųjų skaičių porų (m, n) , kurioms $|2m - 2023| + |2n - m| \leq 1$?
 A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4
13. Visus natūraliuosius skaičius nuo 1 iki 9 reikia taip po vieną įrašyti į langelius (žr. pav.), kad kiekviena trijų gretimų skaičių suma dalytųsi iš 3. Du skaičiai jau įrašyti. Keliais būdais į langelius galima įrašyti likusius 7 skaičius?
 A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 24

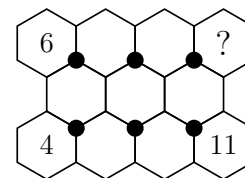


14. Jei $n^n = 5^{5^6}$, tai $n =$
 A) 5^5 B) 5^6 C) 5^{30} D) 11 E) 30
15. Dėžė turi stačiakampio gretasienio formą. Ant dėžės Liudas nubrėžė uždara liniją. Kuris paveikslėlis gali būti šios dėžės išklotinė?
 A) B) C) D) E)
16. Kiekvienam realiajam skaičiui a apibrėžkime funkciją $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$. Visų tokių funkcijų grafikai koordinačių plokštumoje Oxy eina per tą patį tašką $A(x_0; y_0)$. Tada $x_0 + y_0 =$
 A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) Kitas atsakymas

17. Kiemas iš vienos pusės atitvertas tvora. Tvorai panaudotos dviejų rūšių lentos: ilgosios, vertikalios stovinčios viena eile, ir trumposios, kurių kiekviena horizontaliai prikaltas prie dviejų gretimų ilgųjų lentų. Bet kurias dvi gretimas ilgąsias lentas jungia keturios trumposios. Kuris skaičius gali būti bendras panaudotų lentų skaičius?

A) 96 B) 97 C) 98 D) 99 E) 100

18. Skaičiai 1, 2, 3, ..., 11 taip po vieną įrašyti į šešiakampius, kad trijų skaičių, esančių ties kiekvienu iš juodų skrituliukų, sumos būtų lygios. Trys įrašytieji skaičiai parodyti paveikslėlyje. Koks skaičius įrašytas klaustuku pažymėtame šešiakampyje?



A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

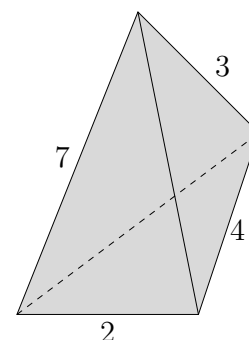
19. Bokštas sudėtas iš 90 detalių, dedant jas vieną ant kitos. Detalės iš eilės nuo apačios iki viršaus sunumeruotos skaičiais nuo 1 iki 90. Kąjus ėmė trijų detalių bokšteliu nuo bokšto viršaus ir, iš eilės dėdamas šiuos bokšteliu vieną ant kito, sudėjo iš jų naują 90 detalių bokštą (žr. pav.). Kiek detalių Kajaus bokšte skiria detalės 39 ir 40?

90	3
89	2
88	1
⋮	⋮
4	85
3	90
2	89
1	88

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

20. Keturi taškai erdvėje sujungti šešiomis atkarpomis (taip sudarant trikampę piramidę). Visų atkarpų ilgiai yra sveikieji skaičiai. Paveikslėlyje parodyti keturi iš jų. Kokia yra likusių dviejų ilgių suma?

A) 9 B) 10 C) 12 D) 14 E) Kitas atsakymas



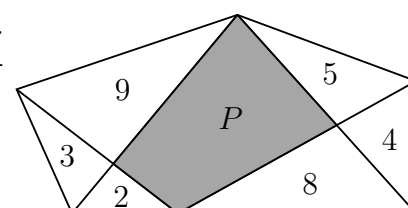
Klausimai po 5 taškus

21. Robotė Roma iš eilės garsiai ištara tokius keturis skaičius: 2, 0, 2, 3. Ji toliau taria skaičius: kiekvienas naujas skaičius yra mažiausias neneigiamas sveikasis skaičius, nelygus jokiam iš paskutinių keturių ištartųjų. Koks bus 2023-iasis Romos ištartas skaičius?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

22. Penkiakampis padalintas į 7 sritis, kaip parodyta paveikslėlyje. Kiekvienos srities viduje įrašytas jos plotas. Kam lygus nuspaltintos srities plotas P ?

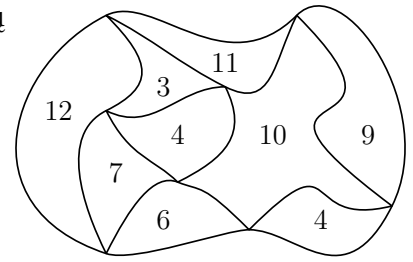
A) 15 B) 15,5 C) 16 D) 17 E) 18



23. Karnavalo metu kino teatre visą eilę, kurioje yra 23 vietos, užėmė persirengėliai – kengūros ir bebrai. Jie susėdo taip, kad šalia kiekvieno persirengėlio sėdėtų bent viena kengūra. Kiek daugiausiai bebrų galėjo būti tarp persirengėlių?

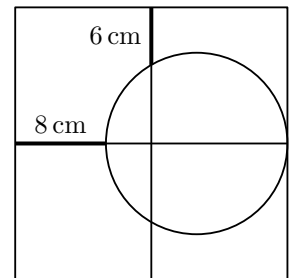
A) 7 B) 8 C) 10 D) 11 E) 12

24. Parkas padalytas į 9 poilsio zonas. Paveiksėlyje nurodyti šių zonų perimetrai (kilometrais). Koks yra šio parko perimetras?
 A) 22 km B) 26 km C) 28 km D) 32 km
 E) Kitas atsakymas



25. Kiek yra natūraliųjų skaičių, iš kurių dalijasi skaičius $2^{20} \cdot 3^{23}$, bet ne skaičius $2^{10} \cdot 3^{20}$?
 A) 13 B) 30 C) 273 D) 460 E) Kitas atsakymas

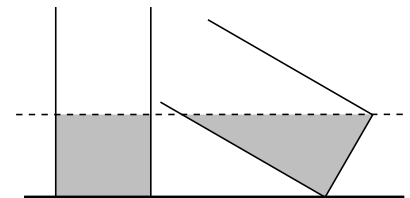
26. Didysis kvadratas padalytas į 2×2 mažesnius kvadratus. Jo viduje nubrėžtas apskritimas, liečiantis vieną iš didžiojo kvadrato kraštinių jos vidurio taške. Paveikslėlyje parodyti dviejų atkarpų ilgiai. Koks yra didžiojo kvadrato kraštinės ilgis (centimetrais)?
 A) 18 B) 20 C) 24 D) 28 E) Kitas atsakymas



27. Funkcijoms $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ir $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lygybės $f(x) + 2g(1-x) = x^2$ ir $f(1-x) - g(x) = x^2$ teisingos su kiekvienu realiuoju skaičiumi x . Kuri lygybė nusako funkciją f ?
 A) $f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ B) $f(x) = x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ C) $f(x) = -x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$
 D) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ E) Yra mažiausiai dvi tokios funkcijos

28. Koks yra visų skaičių $n^3(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3(n+4)^3$, kur n yra bet koks natūralusis skaičius, didžiausias bendras daliklis?
 A) $2^9 \cdot 3^3$ B) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ C) $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ D) $2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ E) $2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^3$

29. Dviejose vienodose ritinio formos talpyklose įpilta po tiek pat vandens. Vieną talpyklą atrėmus į kitą, vandens lygis jose liko vienodas (žr. pav.). Kiekvienos talpyklos pagrindas yra skritulys, kurio plotas lygus $3\pi \text{ m}^2$. Kiek vandens įpilta į vieną talpyklą?
 A) $3\sqrt{3}\pi \text{ m}^3$ B) $6\pi \text{ m}^3$ C) $\frac{3\pi}{4} \text{ m}^3$ D) $9\pi \text{ m}^3$
 E) Neįmanoma nustatyti



30. Šešių iš eilės einančių natūraliųjų skaičių sandauga yra dvylikos skaitmenų skaičius $\overline{ABBCDDCDDABB}$. Skaitmenis A, B, C, D užrašius tam tikra tvarka, vėlgi gaunami iš eilės einantys sveikieji skaičiai. Kuris skaitmuo yra D ?
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Senjoro užduočių sprendimai

1. (D) $\frac{49}{10}$

! Pertvarkykime reiškinį:

$$\frac{7777^2}{5555 \cdot 2222} = \frac{7777}{5555} \cdot \frac{7777}{2222} = \frac{7 \cdot 1111}{5 \cdot 1111} \cdot \frac{7 \cdot 1111}{2 \cdot 1111} = \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{10}.$$

2. (C) 2

! Lengva pastebėti, kad keturi ar tuo labiau visi penki kauliukai atvirsti 6 akutėmis negalėjo: $6 \cdot 4 > 19$. Nors $6 \cdot 3 < 19$, bet 6 akutėmis negalėjo atvirsti ir trys kauliukai. Iš tiesų, jei trys kauliukai būtų atvirtę 6 akutėmis, tai atvirtusių akučių visų penkių skaičių suma būtų ne mažesnė už $6 + 6 + 6 + 1 + 1 = 20 > 19$ – juk likę du kauliukai atvirto mažiausiai viena akute. Vadinasi, 6 akutėmis atvirto ne daugiau nei du kauliukai.

Kita vertus, du kauliukai 6 akutėmis galėjo atvirsti. Tada likusiems trim kauliukams tenkančių akučių skaičių $19 - 6 \cdot 2 = 7$ galima paskirstyti, pavyzdžiui, taip: 2, 2 ir 3.

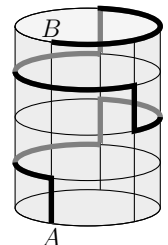
Vadinasi, didžiausias galimas 6 akutėmis atvirtusių kauliukų skaičius yra 2.

3. (E) 75

! Judėdama vertikaliai skruzdėlė užlipo nuo skardinės apačios iki viršaus, taigi nuėjo atstumą, lygų skardinės aukščiui 15 cm.

Toliau nagrinėkime skruzdėlės judėjimą horizontalių (vienodų) apskritimų lankais. Žiūrint į skardinę iš viršaus, skruzdėlė visą laiką judėjo ratu pagal laikrodžio rodyklę, tarsi taip judėtų vienu apskritimu (svarbu, kad ji pradėdavo judėti kiekvienu nauju lanku taške, kuris yra tiesiai virš ankstesnio lanko galo). Paveikslėlyje matome, kad skruzdėlė atliko du pilnus apsisukimus aplink ritinio ašį, tarsi judėdama vienu apskritimu apeitų jį pilnus du kartus. Taigi apskritimų lankais skruzdėlė nuėjo atstumą, lygų dvigubam kiekvieno apskritimo perimetrui 30 cm.

Vadinasi, skruzdėlės trajektorijos ilgis lygus $15 + 2 \cdot 30 = 75$ (cm).



4. (D) 36

! Visus tinkamus vėliavos nuspalvinimus galima gauti tokiu būdu. Viršutinė vėliavos juosta nuspalvinama bet kuria spalva – keturios galimybės. Tada vidurinė juosta nuspalvinama bet kuria iš likusių spalvų – trys galimybės. Tada apatinė juosta nuspalvinama bet kuria spalva, nesutampančia su vidurinės juostos spalva (nėra svarbu, ar ši paskutinė spalva sutaps su viršutinės juostos spalva) – trys galimybės. Vadinasi, taip galima gauti $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ skirtingas vėliavas.

5. (E) 6

! Dauginant natūraliuosius skaičius, sandaugos paskutinis skaitmuo priklauso tik nuo kiekvieno iš dauginamųjų paskutinio skaitmens. Dauginant du natūraliuosius skaičius, kurie baigiasi skaitmeniu 5, vėl gaunamas skaičius, kuris baigiasi skaitmeniu 5 (patikrinimas: $5 \cdot 5 = 25$). Iš eilės gauname, kad kiekvienas iš penketo laipsnių

$$5, \quad 5^2 = 5 \cdot 5, \quad 5^3 = 5^2 \cdot 5, \quad 5^4 = 5^3 \cdot 5, \quad \dots$$

baigiasi skaitmeniu 5.

Taigi kiekvienas iš skaičių $5^5 + 1$, $5^{10} + 1$ ir $5^{15} + 1$ baigiasi skaitmeniu $5 + 1 = 6$. Dauginant du natūraliuosius skaičius, kurie baigiasi skaitmeniu 6, vėl gaunamas skaičius, kuris baigiasi skaitmeniu 6 (patikrinimas: $6 \cdot 6 = 36$). Vadinasi, skaičius

$$(5^5 + 1)(5^{10} + 1)(5^{15} + 1) = (\dots 6 \cdot \dots 6) \cdot \dots 6 = \dots 6 \cdot \dots 6 = \dots 6$$

baigiasi skaitmeniu 6.

!! Kiekvienas penketo laipsnis 5^k su natūraliuoju rodikliu dalijasi iš 5, todėl baigiasi skaitmeniu 0 arba 5. Kadangi skaičius 5^k nelyginis, tai negali baigtis nuliu ir baigiasi skaitmeniu 5.

Pilnai atskliautus reiškinį $(5^5 + 1)(5^{10} + 1)(5^{15} + 1)$, gaunama 8 dėmenų suma, kurioje 7 dėmenys yra penketo laipsniai su natūraliaisiais rodikliais, o aštuntasis dėmuo lygus 1. Todėl

$$(5^5 + 1)(5^{10} + 1)(5^{15} + 1) = \dots 5 + \dots 5 + \dots 5 + \dots 5 + \dots 5 + \dots 5 + \dots 5 + 1.$$

Natūraliųjų skaičių sumos paskutinis skaitmuo priklauso tik nuo kiekvieno iš dėmenų paskutinio skaitmens, todėl duotojo skaičiaus paskutinis skaitmuo sutampa su skaičiaus

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 1 = 5 \cdot 7 + 1 = 36$$

paskutiniu skaitmeniu 6.

6. (D) 70

! Pažymėkime taškus ir atkarpų ilgius, kaip parodyta paveikslėlyje.

Galima nuspėti, kad trikampis AB_1C_1 lygiakraštis. Tuo nesunku ir įsitikinti: kadangi $BC \parallel B_1C_1$, tai $\angle AB_1C_1 = \angle ABC = 60^\circ$ ir $\angle AC_1B_1 = \angle ACB = 60^\circ$ (atitinkamieji kampai). Taigi $x = x' = 11$. Analogiškai $y = y' = 6$, $z = z' = a$. Vadinasi,

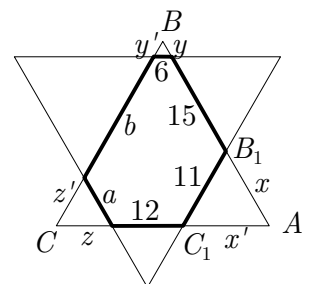
$$AB = x + 15 + y = 11 + 15 + 6 = 32,$$

$$32 = AB = CA = x' + 12 + z = 11 + 12 + z = 23 + z, \quad a = z' = z = 9,$$

$$32 = AB = BC = y' + b + z' = 6 + b + 9 = b + 15, \quad b = 17.$$

Ieškomas šešiakampio perimetras lygus

$$6 + 15 + 11 + 12 + a + b = 70.$$



7. (B) 1

! Antrinis skaičius turi daliklį 2, todėl turi būti lyginis. Tarkime, kad skaičius $n = 2k$ antrinis (čia $k = 1, 2, 3, \dots$). Jei $k = 1$, tai $n = 2$ turi tik du teigiamus daliklius (netinka). Jei $k = 2$, tai $n = 4$ turi lygiai tris teigiamus daliklius 1, 2 ir $4 = n$ (tinka). Jei $k > 2$, tai $n = 2k$ turi bent keturis skirtingus teigiamus daliklius 1, 2, k , $2k$, kur $1 < 2 < k < 2k$ (netinka). Vadinasi, tėra vienintelis antrinis skaičius $n = 4$.

8. (B) $-\frac{15}{4}$

! Ieškoti a_k reikšmių nebūtina. Sudėjus visas penkias lygybes $a_k = k + S$, kairėje pusėje gaunama suma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = S$:

$$S = (1 + S) + (2 + S) + (3 + S) + (4 + S) + (5 + S) = 15 + 5S,$$

$$15 = S - 5S = -4S, \quad S = -\frac{15}{4}.$$

!! Iš lygybės $a_2 = 2 + S$ atėmę lygybę $a_1 = 1 + S$, gauname $a_2 - a_1 = 1$. Analogiškai $a_3 - a_2 = 1$, $a_4 - a_3 = 1$, $a_5 - a_4 = 1$. Taigi

$$a_2 = a_3 - 1, \quad a_1 = a_3 - 2, \quad a_4 = a_3 + 1, \quad a_5 = a_3 + 2;$$

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_3, \quad a_3 = 3 + S = 3 + 5a_3, \quad a_3 = -\frac{3}{4}.$$

Vadinasi, $S = 5a_3 = -\frac{15}{4}$ (ir $a_1 = -2\frac{3}{4}$, $a_2 = -1\frac{3}{4}$, $a_4 = \frac{1}{4}$, $a_5 = 1\frac{1}{4}$).

9. (A) $2^9 - 1$

! Galima nagrinėti natūraliąsias x reikšmes 1, 2, 3, ... ir svarstyti, kurias iš jų įrašius duotojoje lygtyje gaunamas natūralusis y . Tada teks atsižvelgti į tai, kad skaičius $2y = 2^{10} - x$ turi būti lyginis.

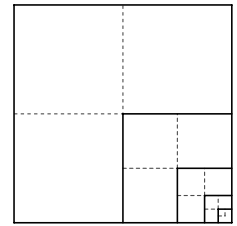
Patogiau daryti atvirkščiai: nagrinėkime reikšmes $y = 1, 2, 3, \dots$ ir nustatykime, su kuriomis iš jų sveikasis skaičius $x = 2^{10} - 2y$ yra natūralusis, taigi teigiamas. Atitinkama x reikšmių seka $2^{10} - 2, 2^{10} - 4, 2^{10} - 6, \dots$ yra mažėjanti. Gauname $2^{10} - 2y = 0$, kai $y = 2^9$. Vadinasi, $x > 0$, kai $y < 2^9$, ir $x \leq 0$, kai $y \geq 2^9$. Galime taip užrašyti duotosios lygties visus natūraliuosius sprendinius:

$$(2^{10} - 2y, y), \quad \text{kur } y = 1, 2, 3, \dots, 2^9 - 1.$$

Jų yra $2^9 - 1$.

10. **B** 28

? Kiekvieną kvadratą, padalytą į 2×2 kvadratus, įsivaizduokime sudarytą iš dviejų dalių – apatinio dešiniojo mažesniojo kvadrato ir *kampuko*, kurį sudaro likę trys mažesnieji kvadratai. Duotąjį (pradinį) kvadratą galima įsivaizduoti kaip sudarytą iš begalybės tokių vienas prie kito glaudžiamų mažėjančių trikvadračių kampukų (žr. pav.). Tėra vienintelis duotojo kvadrato taškas, nepriklausantis jokiame kampuke, – apatinė dešinioji viršūnė. Todėl duotojo kvadrato plotas lygus visų kampukų plotų (begalinei) sumai.

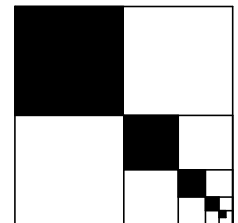


Kiekviename kampuke nuspelvintas vienas iš trijų vienodų jį sudarančių kvadratų. Taigi kiekvieno kampuko nuspelvintos srities plotas lygus trečdaliui kampuko ploto. Kadangi kampukai sudaro duotąjį kvadratą, o kiekvieno iš jų nuspelvintas trečdalis, tai ir viso kvadrato nuspelvintos srities plotas turėtų būti lygus trečdaliui kvadrato ploto: $\frac{1}{3} \cdot 84 = 28$.

Šie samprotavimai teisingi, bet jų matematiniu griežtumu galima būtų suabejoti, nežinant matematinių elgesio su begalinėmis sumomis taisyklių (tokios sumos matematikoje vadinamos *eilutėmis*). Net ir tada turėtų būti aišku: paėmus bet kokią baigtinį kiekį kampukų, jų plotų suma mažesnė už kvadrato plotą 84, o šių kampukų nuspelvintos srities plotas lygus trečdaliui jų plotų sumos bei yra mažesnis už $\frac{1}{3} \cdot 84 = 28$. Kadangi šis pastebėjimas teisingas **bet kokiam** baigtiniam kampukų kiekiui, tai ir paėmus visus kampukus, jų nuspelvintos srities plotas turėtų būti **ne didesnis** už 28. Tai pastebėjus, dar tektų atmesti atsakymą **A**. Jis netinka, nes jau dviejų didžiausių juodųjų kvadratų plotų 21 ir $\frac{21}{4}$ suma didesnė už 24.

Renkamės atsakymą **B**.

! Duotojo kvadrato nuspelvintą sritį sudaro be galo daug mažėjančių juodųjų kvadratų. Jų plotus mažėjimo tvarka pažymėkime $S_1, S_2, S_3, \dots$. Turime apskaičiuoti begalinę sumą $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots$.



Didžiausias juodasis kvadratas kartu su dar trimis to paties dydžio kvadratais sudaro duotąjį (pradinį) kvadratą, kurio plotas lygus 84. Todėl $4S_1 = 84$ ir $S_1 = 21$. Antrasis pagal didumą juodasis kvadratas kartu su dar trimis to paties dydžio kvadratais sudaro vieną iš keturių kvadratų, kurių plotas lygus S_1 . Todėl $4S_2 = S_1$ ir $S_2 = \frac{21}{4}$. Analogiškai $4S_3 = S_2$ ir $S_3 = \frac{21}{4^2}$, ir t. t.

Taigi seka $S_1, S_2, S_3, \dots$ yra geometrinė progresija su vardikliu $\frac{1}{4}$. Liko pritaikyti žinomą geometrinės progresijos sumos formulę:

$$S = 21 + \frac{21}{4} + \frac{21}{4^2} + \dots = 21 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) = 21 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 21 \cdot \frac{4}{3} = 28.$$

11. (A) 1

! Sandaugoje $6! \cdot 7!$ mažesniąją faktorialą $6!$ skaidykime dauginamaisiais ir juos mėginkime nuosekliai sudauginti su didesniuoju faktorialu $7!$, kad gautume $7! \cdot 8 = 8!$, $8! \cdot 9 = 9!$ ir t. t.:

$$\begin{aligned} N! &= 7! \cdot \underline{1} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{4} \cdot \underline{5} \cdot \underline{6} = (7! \cdot \underline{8}) \cdot \underline{3} \cdot \underline{5} \cdot \underline{6} = \\ &= 8! \cdot \underline{3} \cdot \underline{5} \cdot (2 \cdot \underline{3}) = (8! \cdot \underline{9}) \cdot \underline{5} \cdot \underline{2} = 9! \cdot \underline{10} = 10!. \end{aligned}$$

Kadangi $N! = 10!$, tai $N = 10$ (kitaip negali būti, nes faktorialų seka $1!, 2!, 3!, \dots$ yra didėjanti). Vadinasi, skaičiaus N skaitmenų suma lygi $1 + 0 = 1$.

!! Kadangi $6! > 4 \cdot 5 \cdot 6 > 8 \cdot 9$, tai

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot N = N! = 7! \cdot 6! > 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9, \quad N \geq 10.$$

Kita vertus, sandaugose $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 6$ ir $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 7$ joks dauginamasis nesidalija iš pirminio skaičiaus 11, todėl pačios šios sandaugos bei šių sandaugų sandauga $N! = 6! \cdot 7!$ iš 11 nesidalija. Sandaugoje $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot N$ negali būti dauginamojo 11, todėl $N \leq 10$.

Vadinasi, $N = 10$. Šio skaičiaus skaitmenų suma lygi $1 + 0 = 1$.

12. (B) 1

! Kiekvienai sveikųjų skaičių porai (m, n) skaičiai $a = 2m - 2023$ ir $b = 2n - m$ taip pat sveikieji, o skaičiai $|a|$ ir $|b|$ – neneigiami sveikieji. Turime nustatyti, kiek yra tokių porų (m, n) , kurioms $|a| + |b| \leq 1$. Ši nelygybė teisinga tada ir tik tada, kai sumoje $|a| + |b|$ arba abu neneigiami sveikieji dėmenys lygūs 0, arba vienas iš jų lygus 0, o kitas 1.

Atkreipkime dėmesį, kad skaičius a turi būti lyginio skaičiaus $2m$ ir nelyginio skaičiaus 2023 skirtumas. Tada skaičius a nelyginis, ir $|a| = 1$, $|b| = 0$. Taigi vietoj duotosios nelygybės pakanka nagrinėti lygybes

$$2n - m = 0 \quad \text{ir} \quad 2m - 2023 = \pm 1.$$

Pertvarkykime jas:

$$m = 2n \quad \text{ir} \quad 2m = 2023 \pm 1.$$

Skaičius $4n = 2m = 2023 \pm 1$ turi būti lygus 2022 arba 2024. Pirmuoju atveju skaičius $n = 2022 : 4$ nėra sveikasis. Vadinasi, $n = 2024 : 4 = 506$ ir $m = 2n = 1012$.

Gavome vienintelę sveikųjų skaičių porą $(m, n) = (1012, 506)$. Ji tenkina gautąsias lygybes, taigi ir uždavinio sąlygą.

13. **E** 24

! *Taip pat žr. panašų Junioro grupės 30 uždavinį.*

Tarkime, kad skaičiai 1, 2, 3, ..., 9 reikiamu būdu įrašyti langeliuose:

a_1	7	a_2	9	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
-------	---	-------	---	-------	-------	-------	-------	-------

Suma $7 + a_2 + 9$ dalijasi iš 3, kai $a_2 = 2, 5$ arba 8 (skaičius a_2 dalijasi iš 3 su liekana 2). Nepriklausomai nuo to, kurią iš šių trijų reikšmių įgyja a_2 , sumos $a_1 + 7 + a_2$ ir $a_2 + 9 + a_3$ dalijasi iš 3, kai $a_1 = 3$ arba 6 , o $a_3 = 1$ arba 4 . Panašiai nagrinėdami likusius gretimų skaičių trejetus, gauname tinkamas skaičių reikšmes

$$a_4 = 2, 5 \text{ arba } 8; \quad a_5 = 3 \text{ arba } 6; \quad a_6 = 1 \text{ arba } 4; \quad a_7 = 2, 5 \text{ arba } 8.$$

Su nustatytomis įrašytųjų skaičių $a_1, a_2, \dots, a_7$ reikšmėmis kiekviena trijų gretimų skaičių suma dalijasi iš 3.

Taigi visus tinkamus skaičių surašymus gausime, kai

a_2, a_4, a_7 yra bet kokia tvarka užrašyti skaičiai 2, 5 ir 8;

a_1, a_5 yra bet kokia tvarka užrašyti skaičiai 3 ir 6;

a_3, a_6 yra bet kokia tvarka užrašyti skaičiai 1 ir 4.

Yra 6 būdai surikiuoti skaičius 2, 5, 8 ir po du būdus surikiuoti skaičius 3, 6 bei skaičius 1, 4. Taip gauname $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ tinkamus skaičių surašymus langeliuose.

!! Tarkime, kad skaičiai 1, 2, 3, ..., 9 reikiamu būdu įrašyti langeliuose:

a_1	7	a_2	9	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
-------	---	-------	---	-------	-------	-------	-------	-------

Sumos $a_4 + a_5 + a_6$ ir $a_5 + a_6 + a_7$ dalijasi iš 3, todėl iš 3 dalijasi ir jų skirtumas $a_4 - a_7$. Taigi skaičiai a_4 ir a_7 dalijasi iš 3 su ta pačia liekana. Analogiškai gauname, kad bet kurie du skaičiai langeliuose, kuriuos skiria lygiai du langeliai, dalijasi iš 3 su ta pačia liekana. Vadinasi, su ta pačia liekana iš 3 dalijasi: skaičiai $a_1, 9, a_5$; skaičiai $7, a_3, a_6$; skaičiai a_2, a_4, a_7 .

Skaičiai a_1, a_5 dalijasi iš 3 su liekana 0, kaip ir skaičius 9, todėl tai tam tikra tvarka užrašyti skaičiai 3 ir 6. Skaičiai a_3, a_6 dalijasi iš 3 su liekana 1, kaip ir skaičius 7, todėl tai tam tikra tvarka užrašyti skaičiai 1 ir 4. Skaičiai a_2, a_4, a_7 tam tikra tvarka yra likę nepaminėti skaičiai 2, 5, 8 – jie dalijasi iš 3 su liekana 2. Kita vertus, taip paskirsčius skaičių reikšmes, langeliuose skaičiai bus surašyti, kad kiekviename gretimų skaičių trejete būtų po vieną skaičių, besidalijantį iš 3 su liekana 0, 1 ir 2. Tokių trijų skaičių suma visada dalijasi iš 3:

$$3k_1 + (3k_2 + 1) + (3k_3 + 2) = 3(k_1 + k_2 + k_3 + 1).$$

Vadinasi, būdų tinkamai langeliuose surašyti skaičius yra tiek, kiek yra būdų priskirti skaičiams a_1, a_5 reikšmes 3 ir 6 (dvi galimybės), skaičiams a_3, a_6 – reikšmes 1 ir 4 (dvi galimybės), o skaičiams a_2, a_4, a_7 – reikšmes 2, 5, 8 (šešios galimybės). Iš viso gauname $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$ būdus.

16. **C** 6

? Reiškinyje $x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$ imkime tokią x reikšmę, kad nariai ax ir $2a$ susiprastintų, taigi $x = -2$. Nepriklausomai nuo a reikšmės, gauname šio reiškinių reikšmę

$$(-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + a \cdot (-2) + 2a + 4 = -8 + 12 - 2a + 2a + 4 = 8.$$

Vadinasi, kiekvienam a funkcijos $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$ grafikas eina per tašką $(-2; 8)$ ir galime imti $x_0 = -2$, $y_0 = 8$. Tada $x_0 + y_0 = 6$.

Renkamės atsakymą **C**.

! Pasirinkime bet kokias dvi a reikšmes. Funkcijos $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$ grafikas eina per tašką $A(x_0; y_0)$, pavyzdžiui, kai $a = 0$ ir kai $a = 1$. Todėl

$$y_0 = x_0^3 + 3x_0^2 + 4, \quad y_0 = x_0^3 + 3x_0^2 + x_0 + 2 + 4,$$

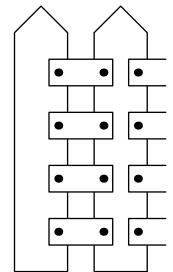
$$x_0^3 + 3x_0^2 + 4 = x_0^3 + 3x_0^2 + x_0 + 2 + 4.$$

Pastarojoje lygybėje išprastinę vienodus narius, gauname

$$0 = x_0 + 2, \quad x_0 = -2, \quad y_0 = x_0^3 + 3x_0^2 + 4 = -8 + 12 + 4 = 8, \quad x_0 + y_0 = 6.$$

17. **A** 96

? Tvorą yra ilgujų lentų eilė, kurioje tarp bet kurių dviejų gretimų lentų yra dar ir keturios trumposios lentos (žr. pav.). Įsivaizduokime, kad ilgosios lentos rikiuojasi iš kairės į dešinę, ir kiekvieną ilgąją lentą, išskyrus dešiniausiąją, sugrupuokime su keturiomis trumposiomis, kuriomis ji sujungta su kita ilgąja lenta iš dešinės. Taip visas tvoros lentas, išskyrus dešiniausiąją ilgąją, suskirstome į lentų penketus. Vadinasi, tvorą iš viso sudaro $5 + 5 + \dots + 5 + 5 + 1$ lentų. Nežinome, kiek dėmenų, lygių 5, yra šiame reiškinyje. Tačiau suma $5 + 5 + \dots + 5 + 5$ visada baigiasi skaitmeniu 5 arba skaitmeniu 0, todėl bendras tvoros lentų skaičius turi baigtis skaitmeniu 6 arba skaitmeniu 1. Taigi lentų tvoroje negali būti 97, 98, 99 arba 100.



Renkamės atsakymą **A**.

! Tarkime, kad tvoroje ilgujų lentų yra n . Tada turime $n - 1$ tarpą tarp gretimų ilgujų lentų, o šiuose tarpuose yra po keturias trumpąsias lentas. Vadinasi, tvorą sudaro iš viso

$$n + 4(n - 1) = 5n - 4 = 5(n - 1) + 1$$

lentų. Jų skaičius dalijasi iš 5 su liekana 1, tad tinka nebent atsakymas **A**. Jis iš tiesų yra galimas, kai $5n - 4 = 96$, taigi kai tvorą sudaro $n = 20$ ilgujų lentų, nurodytu būdu sujungtos trumposios.

18. (E) 9

! Ieškomą skaičių pažymėkime x , o kiekvieną trijų skaičių ties juodu skritulių sumą pažymėkime s .

Devynis šešiakampius langelius suskirstykime į tris trejetus, kaip parodyta paveikslėlyje. Kiekvieno trejeto skaičių suma lygi s . Todėl visų 11 įrašytųjų skaičių suma S lygi

$$s + s + s + 4 + 11 = 3s + 15.$$

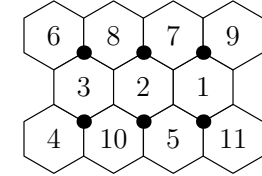
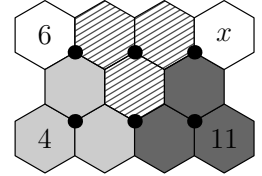
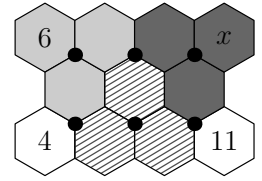
Kitaip pasirinkę devynis langelius ir juos suskirstę į trejetus (žr. pav.), analogiškai gauname, kad $S = 3s + 6 + x$. Vadinasi,

$$3s + 15 = 3s + 6 + x, \quad 15 = 6 + x, \quad x = 9.$$

Taigi, norint rasti x , visų langelių užpildyti nebūtina. Pastebėsime, kad apskaičiavus

$$3s + 15 = S = 1 + 2 + 3 + \dots + 11 = 66$$

galima rasti $s = 17$ ir toliau perrenkant galimybes įsitikinti, kad tėra vienintelis tinkamas būdas įrašyti skaičius langeliuose (žr. pav.).



19. (E) 4

! Bokštelių, iš kurių Kajus sudėjo naująjį bokštą, sudarė po tris detales. Juos Kajui vis nuimant nuo pradinio bokšto, viršutinė bokštelio detalė visada pažymėta skaičiaus 3 kartotiniu: 90, 87, 84, ..., 6, 3. Tarp šių skaičių yra skaičiai 39 ir 42. Kajus pirmiau perkėlė bokštelį, kurio detalės pažymėtos skaičiais 42, 41, 40, o tada tiesiai ant jo uždėjo bokštelį, kurio detalės pažymėtos skaičiais 39, 38, 37 (žr. pav.). Vadinasi, Kajaus sudėtame bokšte detales 39 ir 40 skiria **keturios** detalės 38, 37, 42, 41.

39
38
37
42
41
40

20. (E) Kitas atsakymas

! Piramidės dviejų briaunų nežinomus ilgius pažymėkime x ir y , kaip parodyta paveikslėlyje. Čia x ir y yra natūralieji skaičiai. Turime rasti $x + y$.

Prisiminkime Trikampio nelygybę: jei trikampio kraštinių ilgiai yra a , b , c , tai $a + b > c$, $b + c > a$ ir $c + a > b$. Duotosios piramidės keturios sienos yra trikampiai, ir jiems galioja po tris nelygybes. Taigi galėtume užrašyti $4 \cdot 3 = 12$ tokių nelygybių. Tačiau mums naudingos bus tik kai kurios iš jų.

Trikampio nelygybę pritaikykime dviem trikampiams, kurių kraštinių ilgiai atitinkamai yra 3, 4, x ir 2, 7, x :

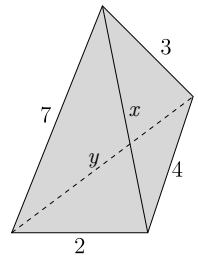
$$3 + 4 > x, \quad 2 + x > 7.$$

Taigi $3 + 4 > x > 7 - 2$ ir $7 > x > 5$. Kadangi skaičius x sveikasis, tai $x = 6$. Analogiškai galime rasti y , užrašę po nelygybę trikampiams, kurių kraštinių ilgiai atitinkamai yra 2, 4, y ir 3, 7, y :

$$2 + 4 > y, \quad 3 + y > 7.$$

Taigi $2 + 4 > y > 7 - 3$ ir $6 > y > 4$. Kadangi skaičius y sveikasis, tai $y = 5$.

Vadinasi, $x + y = 6 + 5 = 11$.



21. (C) 2

! Taisyklė, pagal kurią Roma taria skaičius, leidžia vienareikšmiškai nustatyti kiekvieną naują skaičių, turint ankstesnius. Tad pratęskime skaičių seką:

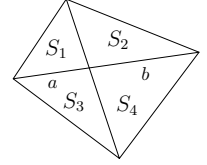
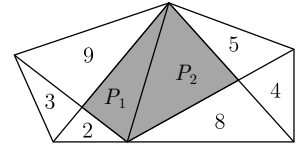
$$2, 0, 2, 3, 1, 4, 0, 2, 3, 1, \dots$$

Čia, pavyzdžiui, 6-asis skaičius yra mažiausias neneigiamas skaičius, nelygus 0, 2, 3, 1, taigi jis lygus 4. O 8-asis skaičius yra mažiausias neneigiamas skaičius, nelygus 3, 1, 4, 0, taigi jis lygus 2. Toliau sekos nebetęskime, bet pastebėkime, kad paskutiniai keturi gauti skaičiai atkartoja keturis ankstesnius: 7-asis sutampa su 2-uoju, 8-asis – su 3-uoju, 9-asis – su 4-uoju, o 10-asis – su 5-uoju. Kadangi 11-asis skaičius priklauso tik nuo šių keturių skaičių, tai jis sutampa su 6-uoju, toliau analogiškai 12-asis skaičius sutampa su 7-uoju, 13-asis – su 8-uoju, ir t. t. Kitaip tariant, Romos skaičių seka yra periodinė: skaičiai kartojasi kas penkis, nuo antrojo sekos nario vis pasikartojant sekos fragmentui 0, 2, 3, 1, 4.

Vadinasi, 2023-iasis sekos skaičius sutampa su sekos nariais, kurių eilės numeriai yra $2023 - 5 = 2018$, $2018 - 5 = 2013$ ir t. t. Vis atimdami po 5, iš 2023 galime atimti skaičiaus 5 kartotinį 2020 bei gauti sekos nario eilės numerį 3. Vadinasi, 2023-iasis sekos skaičius sutampa su jos 3-uoju skaičiumi 2.

22. © 16

! Padalykime nuspalvintą sritį į du trikampius, o jų plotus pažymėkime P_1 ir P_2 , kaip parodyta paveikslėlyje. Papildomai nubrėžta atkarpa dalija didįjį penkiakampį į du keturkampius. Viena iš jų įstrižainės dalija į trikampius, kurių plotai lygūs 2, 3, 9, P_1 , o kitą – į trikampius, kurių plotai lygūs 8, 4, 5, P_2 . Turime rasti $P = P_1 + P_2$.



Plotus P_1 ir P_2 rasime pasinaudodami tokiu pastebėjimu: jei įstrižainės dalija keturkampį į keturis trikampius, kurių plotai yra S_1, S_2, S_3, S_4 , kaip parodyta paveikslėlyje, tai $S_1 : S_2 = S_3 : S_4$. Pastebėjimas išplaukia iš to, kad trikampiai, kurių plotai yra S_1 ir S_2 , turi bendrą aukštinę, tad jų plotų santykis $S_1 : S_2$ lygus atitinkamų pagrindų, į kuriuos nuleista aukštinė, ilgių santykiui $a : b$, ir analogiškai $S_3 : S_4 = a : b$. Vadinasi,

$$P_1 : 2 = 9 : 3, \quad P_2 : 5 = 8 : 4,$$

$$P_1 = 6, \quad P_2 = 10, \quad P = 6 + 10 = 16.$$

23. © 11

! Kengūras ir bebrus atitinkamai žymėkime K ir B. Susėdę kino teatre, persirengėliai išsirikiavo tam tikra seka:

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_{23}.$$

Čia kiekvienas X_i lygus K arba B.

Nagrinėkime bet kuriuos keturis greta vienas kito sėdinčius persirengėlius $X_i, X_{i+1}, X_{i+2}, X_{i+3}$. Bent vienas iš persirengėlių X_i ir X_{i+2} , sėdinčių šalia X_{i+1} , turi būti kengūra. Taip pat bent vienas iš persirengėlių X_{i+1} ir X_{i+3} , sėdinčių šalia X_{i+2} , turi būti kengūra. Vadinasi, tarp bet kurių keturių tokių persirengėlių yra mažiausiai dvi kengūros.

Nagrinėkime persirengėlius X_1, X_2, X_3 . Šalia X_1 sėdi vienintelis persirengėlis X_2 , todėl $X_2 = K$. Be to, bent vienas iš persirengėlių X_1 ir X_3 , sėdinčių šalia X_2 , turi būti kengūra. Vadinasi, tarp šių trijų persirengėlių yra mažiausiai dvi kengūros.

Sugrupuokime persirengėlius į vieną trejetą (X_1, X_2, X_3) ir 5 ketvertus

$$(X_4, X_5, X_6, X_7), \quad (X_8, X_9, X_{10}, X_{11}), \quad \dots, \quad (X_{20}, X_{21}, X_{22}, X_{23}).$$

Turime 6 persirengėlių grupes, kuriose yra bent po dvi kengūras. Taigi kengūrų yra ne mažiau nei $2 \cdot 6 = 12$, o bebrų – ne daugiau nei $23 - 12 = 11$.

Kita vertus, tarp persirengėlių gali būti 11 bebrų. Tai galima pagrįsti pavyzdžiu, kurį sugalvoti padeda jau turimi pastebėjimai. Persirengėliai galėjo susėsti eilėje bebrų ir kengūrų poromis, kad šios poros kaitaliotųsi:

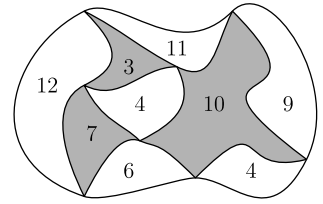
$$K \ K \ B \ B \ K \ K \ B \ B \ K \ K \ B \ B \ K \ K \ B \ B \ K \ K \ B \ B \ K \ K \ B$$

Čia visos kengūros sėdi poromis, todėl šalia kiekvienos kengūros sėdi kengūra. Bet kuri gretimų bebrų pora sėdi tarp dviejų kengūrų, tad kiekvienas iš šių bebrų sėdi šalia kengūros. Kengūra sėdi ir šalia vienintelio bebro, neturinčio poros. Taigi šis pavyzdys tenkina uždavinio sąlygą.

Vadinasi, didžiausias galimas persirengėlių bebrų skaičius lygus 11.

24. **(B)** 26 km

! Parko poilsio zonas riboja paveikslėlyje pavaizduotos linijos: vienos iš jų yra parko viduje, o likusios sudaro parko kraštą, kurio ilgį kilometrais – ieškomą parko perimetrą – pažymėkime x . Parko viduje esančių linijų bendrą ilgį kilometrais pažymėkime y .



Tris parko poilsio zonas nuspelvinkime (žr. pav.). Šias tris zonas ribojančios linijos – tai visos linijos, esančios parko viduje. Be to, jokias dvi iš nuspelvintų zonų ribojančios linijos neturi bendros atkarpos. Todėl visų šių linijų bendras ilgis y lygus trijų zonų perimetrų sumai $3 + 7 + 10 = 20$ (km).

Dabar nagrinėkime parko likusias 6 poilsio zonas. Jas ribojančios linijos – tai visos parko zonas ribojančios linijos, tiek parko viduje esančios, tiek parko kraštą sudarančios. Vėlgi, jokias dvi iš 6 zonų ribojančios linijos neturi bendros atkarpos. Todėl visų linijų – tiek esančių parko viduje, tiek sudarančių parko kraštą – bendras ilgis $x + y$ lygus 6 zonų perimetrų sumai $4 + 6 + 4 + 9 + 11 + 12 = 46$ (km).

Vadinasi, parko perimetras lygus $(x + y) - y = 46 - 20 = 26$ (km).

25. **(C)** 273

! Reikia nustatyti, kiek skaičius $a = 2^{20} \cdot 3^{23}$ turi teigiamų daliklių, kurie nėra skaičiaus $b = 2^{10} \cdot 3^{20}$ teigiami dalikliai.

Skaičiaus a teigiami dalikliai yra skaičiai

$$2^x \cdot 3^y, \text{ kur } x = 0, 1, 2, \dots, 20, \quad y = 0, 1, 2, \dots, 23.$$

Čia vieną iš skaičiaus x reikšmių ir vieną iš skaičiaus y reikšmių galima pasirinkti laisvai. Tų reikšmių yra atitinkamai 21 ir 24, todėl a turi $21 \cdot 24$ teigiamų daliklių.

Skaičiaus b teigiami dalikliai yra skaičiai

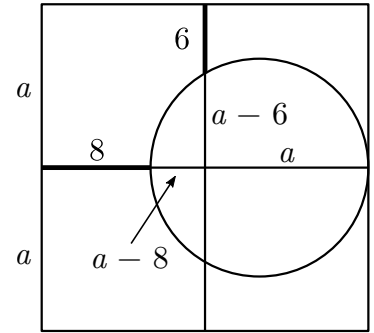
$$2^x \cdot 3^y, \text{ kur } x = 0, 1, 2, \dots, 10, \quad y = 0, 1, 2, \dots, 20.$$

Čia x ir y reikšmių yra atitinkamai po 11 ir 21, tad b turi $11 \cdot 21$ teigiamų daliklių. Kiekvienas iš jų yra ir skaičiaus a teigiamas daliklis. Vadinasi, skaičiaus a teigiamų daliklių, kurie nėra skaičiaus b teigiami dalikliai, yra

$$21 \cdot 24 - 11 \cdot 21 = 21 \cdot (24 - 11) = 21 \cdot 13 = 21 \cdot 10 + 21 \cdot 3 = 210 + 63 = 273.$$

26. **(A)** 18

! Kiekvieno iš keturių mažesniųjų kvadratų kraštinės ilgį pažymėkime a (cm). Paveikslėlyje parodyti atkarpų apskritimo viduje ilgiai (cm). Čia stačiu kampu susikerta dvi stygos – horizontalioji ir vertikalioji. Horizontalioji styga statmena apskritimo liestinei lietimosi taške (didžiojo kvadrato dešiniajai kraštinei), todėl eina per apskritimo centrą bei yra skersmuo. Dėl simetrijos šio skersmens atžvilgiu vertikalioji apskritimo styga padalyta į dvi lygias atkarpas – apatinės atkarpos ilgis sutampa su viršutinės atkarpos ilgiu ($a - 6$) cm. Liko pritaikyti Stygų savybę:



$$(a - 6)^2 = a(a - 8), \quad a^2 - 12a + 36 = a^2 - 8a, \quad 4a = 36.$$

Vadinasi, didžiojo kvadrato kraštinės ilgis lygus $2a = 18$ (cm).

27. **(A)** $f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$

? Pirmojoje iš dviejų duotųjų lygybių matome funkcijų reikšmes $f(x)$ ir $g(1 - x)$. Antrojoje lygybėje $f(1 - x) - g(x) = x^2$ turėsime tas pačias reikšmes, vietoj x įrašę $1 - x$ (čia x – bet koks realusis skaičius): $f(1 - (1 - x)) = f(x)$ ir tada

$$f(x) - g(1 - x) = (1 - x)^2.$$

Kiekvienam fiksuotam x gautąją lygybę galima apjungti į sistemą su lygybe $f(x) + 2g(1 - x) = x^2$ bei nagrinėti lygčių sistemą su dviem nežinomaisiais $f(x)$ ir $g(1 - x)$. Tokioje sistemoje nežinomas $f(x)$ randamas vienareikšmiškai: vieną lygtį padauginus iš 2 ir pridėjus prie kitos, $g(1 - x)$ išsiprastina, o $f(x)$ lieka. Todėl ir funkcija f nustatoma vienareikšmiškai, o atsakymas **E** klaidingas.

Jau žinome, kaip rasti $f(x)$ reikšmę kiekvienam x . Taip galime rasti bendrąją išraišką, kuri nusako funkciją f . Tačiau pastebėjus, kad atsakymuose **A–D** skaičiaus $f(1)$ reikšmės skirtingos, pakanka rasti vien tikrąją $f(x)$ reikšmę, kai $x = 1$. Turimose lygybėse su $f(x)$ ir $g(1 - x)$ įrašykime $x = 1$:

$$f(1) - g(0) = 0^2 = 0 \quad \text{ir} \quad f(1) + 2g(0) = 1^2 = 1.$$

Vadinasi,

$$1 = 2 \cdot 0 + 1 = 2(f(1) - g(0)) + (f(1) + 2g(0)) = 3f(1) \quad \text{ir} \quad f(1) = \frac{1}{3}.$$

Atmetame dar tris atsakymus: **B)** $f(1) > 1$; **C)** $f(1) < 0$; **D)** $f(1) = 2$.

Renkamės atsakymą **A**.

! Dalyje ? kiekvienam x gavome lygčių $f(x) - g(1 - x) = (1 - x)^2$ bei $f(x) + 2g(1 - x) = x^2$ sistemą su nežinomaisiais $f(x)$ ir $g(1 - x)$. Išspręskime ją $f(x)$ atžvilgiu bendruoju atveju:

$$3f(x) = 2(f(x) - g(1 - x)) + (f(x) + 2g(1 - x)) = 2(1 - x)^2 + x^2,$$

$$3f(x) = 2(1 - 2x + x^2) + x^2 = 3x^2 - 4x + 2, \quad f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Gautoji $f(x)$ formulė teisinga kiekvienam x , tad nusako funkciją f . (Ši funkcija iš tiesų tenkina uždavinio sąlygą kartu su $g(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.)

28. (E) $2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^3$

? Nagrinėkime bet kokį natūralųjį skaičių n ir skaičių

$$N = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4).$$

Pasinaudosime tokiu pastebėjimu: jei turime k iš eilės einančių natūraliųjų skaičių, tai lygiai vienas iš jų dalijasi iš k . Kadangi vienas iš skaičių $n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4$ dalijasi iš 5, tai ir N dalijasi iš 5. Vienas iš skaičių $n, n + 1, n + 2$ dalijasi iš 3, todėl N dalijasi iš 3. Samprotaudami apie dalumą iš 2 ir iš 4, būkime kiek atsargesni. Porose $(n, n + 1)$ ir $(n + 2, n + 3)$ yra po vieną skaičių, dalų iš 2. Vienas iš jų dalijasi ir iš 4, nes toks skaičius turi būti ketverte $(n, n + 1, n + 2, n + 3)$. Todėl N dalijasi iš $2 \cdot 4 = 8$.

Skaičius N dalijasi iš 3, 5 ir 8. Bet kurie du iš šių trijų daliklių yra tarpusavyje pirminiai, todėl N dalijasi iš $3 \cdot 5 \cdot 8 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, o

$$N^3 = n^3(n + 1)^3(n + 2)^3(n + 3)^3(n + 4)^3$$

dalijasi iš $d = (2^3 \cdot 3 \cdot 5)^3 = 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ kiekvienam natūraliajam n . Vadinas, visos galimos N^3 reikšmės turi bendrą daliklį d . Jis sutampa su atsakymu E – didžiausiu iš duotųjų, todėl tai ir turėtų būti ieškomas didžiausias bendrasis daliklis.

Renkamės atsakymą E.

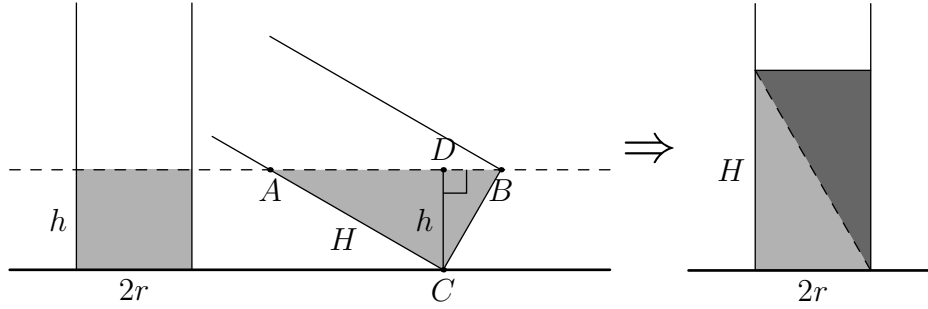
! Kad ? dalies sprendimas būtų pilnas, liko įsitikinti, kad reiškinių

$$N^3 = n^3(n + 1)^3(n + 2)^3(n + 3)^3(n + 4)^3$$

reikšmių bendras daliklis $d = 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ yra didžiausias. Iš tiesų, didesnio bendro daliklio negali būti, nes viena iš N^3 reikšmių lygi d (kai $n = 1$) ir neturi didesnio daliklio nei šis skaičius.

29. **(D)** $9\pi \text{ m}^3$

! Paveikslėlyje horizontali punktyrinė linija žymi horizontalią plokštumą p , kertančią du ritinius (vandens talpyklas). Žiūrint iš šono, vandens talpyklose vaizdai yra stačiakampis ir statusis trikampis ABC . Jų matmenis metrais pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje. Čia h yra atstumas tarp p ir paviršiaus, ant kurio stovi talpyklos; r yra kiekvienos talpyklos pagrindo spindulys, o $2r$ – skersmuo. Taigi pagrindo plotas $3\pi \text{ (m}^2\text{)}$ lygus πr^2 , ir $r = \sqrt{3}$.



Įsivaizduokime, jog dešinioji talpykla kartu su plokštuma p pakreipiamos taip, kad talpykla stovėtų stačiai. Jei vandens talpykloje būtų įpilta iki aukščio H , tai dėl simetrijos plokštuma p dalytų vandens stulpelį (ritinį) į dvi vienodas dalis (žr. pav.). Vadinasi, tokiu atveju vandens talpykloje būtų dvigubai daugiau, nei yra įpilta dabar. Talpyklose įpilta po tiek pat vandens, todėl ritinio, kurio aukštinės ilgis yra H m, tūris yra dvigubai didesnis nei ritinio su tokiu pačiu pagrindu, bet aukštinės ilgiu h m:

$$H \cdot 3\pi = 2h \cdot 3\pi, \quad H = 2h.$$

Stačiajame trikampyje ACD turime $AC = 2CD$, todėl $\angle CAD = 30^\circ$, o stačiajame trikampyje ABC turime $AB = 2BC$. Vadinasi,

$$\begin{aligned} AB &= 2BC = 4r \text{ (m)}, & AB^2 &= AC^2 + BC^2 \text{ (Pitagoro teorema)}, \\ (4r)^2 &= H^2 + (2r)^2, & (2h)^2 &= H^2 = (4r)^2 - (2r)^2 = 12r^2 = 36, \\ 2h &= \sqrt{36} = 6, & h &= 3. \end{aligned}$$

Šią h reikšmę galima gauti ir kitaip:

$$2h = H = AC = BC \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = 2r \cdot \sqrt{3} = 6.$$

Į vieną talpyklą įpilto vandens tūris lygus $h \cdot 3\pi = 9\pi \text{ (m}^3\text{)}$.

30. © 3

! Pažymėkime $n = \overline{ABB CDD CDD ABB}$. Nei paties skaičiaus n , nei šešių iš eilės einančių natūraliųjų skaičių $m, m+1, \dots, m+5$, kurių sandauga lygi n , nustatyti nebūtina.

Vienas iš penkių skaičių $m, m+1, \dots, m+4$ dalijasi iš 5, todėl $n = m \cdot (m+1) \cdot \dots \cdot (m+5)$ dalijasi iš 5. Vienas iš skaičių m ir $m+1$ yra lyginis, todėl n dalijasi ir iš 2. Kadangi n dalijasi iš 2 ir iš 5, tai dalijasi iš 10 ir baigiasi skaitmeniu $B = 0$.

Kadangi $B = 0$ yra vienas iš keturių iš eilės einančių sveikųjų (neneigiamų) skaičių, tai šie skaičiai yra 0, 1, 2, 3, t. y. skaitmenys A, C, D yra tam tikra tvarka surašyti skaitmenys 1, 2, 3.

Vienas iš trijų skaičių $m, m+1, m+2$ dalijasi iš 3, todėl n dalijasi iš 3. Tada ir skaičiaus n skaitmenų suma dalijasi iš 3. Ji lygi

$$\begin{aligned} 2A + 4B + 2C + 4D &= 2A + 2C + 4D = \\ &= 2(A + C + D) + 2D = 2(1 + 2 + 3) + 2D = 12 + 2D. \end{aligned}$$

Skaičius $12 + 2D = 3 \cdot 4 + 2D$ dalijasi iš 3, todėl iš 3 dalijasi ir skaičius $2D$. Kadangi $D = 1, 2$ arba 3 , tai $D = 3$.

Nors D reikšmę jau nustatėme, raskime ir patį skaičių n . Tarp keturių skaičių $m, m+1, m+2, m+3$ du yra lyginiai, o vienas iš jų dalijasi ne tik iš 2, bet ir iš 4. Todėl n dalijasi iš $2 \cdot 4$, o $n : (4 \cdot 25) = \overline{\dots A}$ dalijasi iš 2. Taigi skaitmuo A yra lyginis ir turi būti lygus 2. Tada $C = 1$ ir

$$n = 200\,133\,133\,200 = 74 \cdot 75 \cdot 76 \cdot 77 \cdot 78 \cdot 79.$$

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	D
2	C
3	E
4	D
5	E
6	D
7	B
8	B
9	A
10	B
11	A
12	B
13	E
14	A
15	D
16	C
17	A
18	E
19	E
20	E
21	C
22	C
23	D
24	B
25	C
26	A
27	A
28	E
29	D
30	C