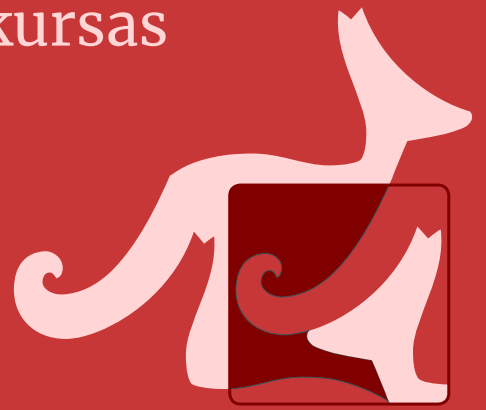


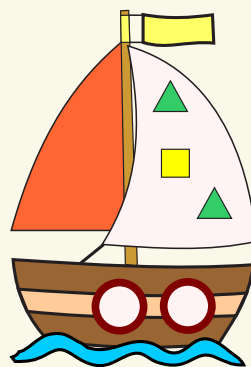
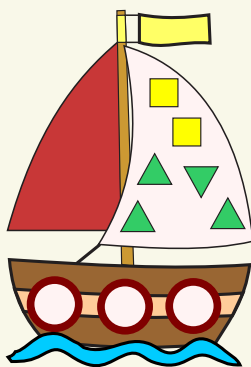
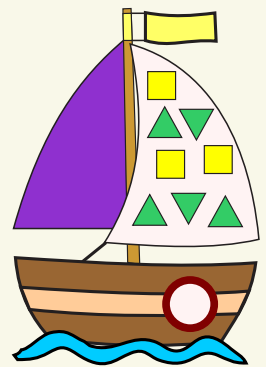
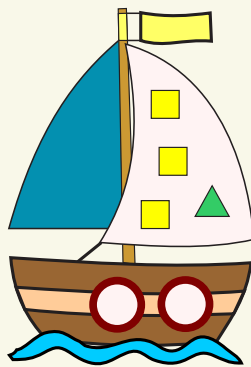
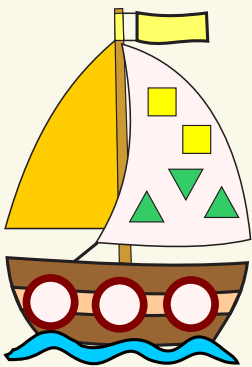
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA



Nykštukas

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI



2023

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA



KENGŪRA 2023. Nykštukas

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorė ir sudarytoja
Marytė Skakauskienė

Redaktorius
Juožas Juvencijus Mačys

Maketavo
Ugnė Gudžinskaitė

Turiny

Pratarmė	4
Sąlygos	6
Užduočių sprendimai	9
Atsakymai	12

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdienišku) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadyneje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos sprendamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 27000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2023 metais. Nors, žinoma, šiais metais viskas dėl tos nelemtos pandemijos atrodė, pakrypo ir klostėsi visiškai kitaip negu iki šiol. Pasitvirtino visiems teoriškai gerai girdėta išmintis, kad karantininis gyvenimas yra pilnas staigmenų ir netikėtumų: konkursas iš trečiojo kovo ketvirtadienio nusikėlė į vėlesnę datą ir vyko nuotoliniu būdu.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamas, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos uždutis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrantančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirksniui ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo

ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšiuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažinę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnanti ateitis, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2023 metų kovo 16 dieną keliavo ir gausiai sprendė 1–2 klasių (*Nykštuko* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys patikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu !), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu ?). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais ??, !!, !!! ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

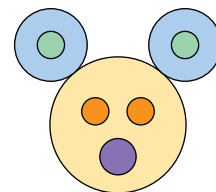
Organizatoriai

2023 m. *Nykštuko* užduočių sąlygos

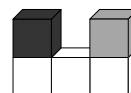
Klausimai po 3 taškus

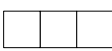
1. Kiek apskritimų yra paveikslėlyje?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

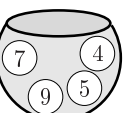


2. Šalia pavaizduotas statinys, sudarytas iš 5 kubelių. Kuriame iš žemiau esančių piešinių pavaizduotas šio statinio vaizdas iš viršaus?

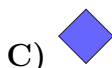


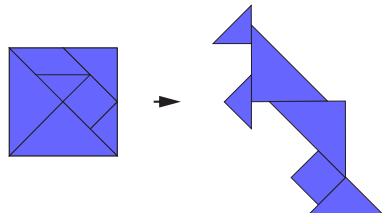
A)  B)  C)  D)  E) 

3. Penkiuose dubenėliuose yra po keturis rutuliukus su skaičiais (žr. piešinuką). Kuriame dubenėlyje ant visų rutuliukų užrašytų skaičių suma yra didžiausia?

A)  B)  C)  D)  E) 

4. Monika šalia pavaizduotą kvadratą sukarpė į septynias dalis. Iš šešių dalių ji sudėliojo kengūrą, o viena dalis liko nepanaudota. Kuri?

A)  B)  C)  D)  E) 



5. Ant Kristupo laivelio daugiau nei vienas apskritimas, o trikampių yra dviem daugiau nei kvadratų. Kuris laivelis yra Kristupo?

A)  B)  C)  D)  E) 

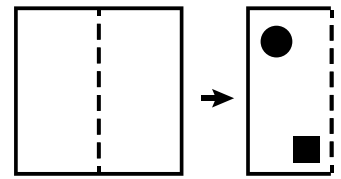
6. Piešinyje matote mano senelio gimtadienio tortą. Žvakutės ant torto rodo mano senelio amžių. Ilga žvakutė ant torto atitinka 10 metų, o trumpa 1 metus. Kiek metų mano seneliui?

A) 65 B) 66 C) 76 D) 77 E) 78



Klausimai po 5 taškus

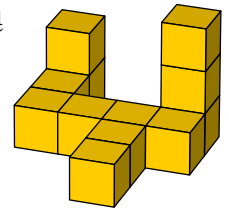
13. Kvadratinis popieriaus lapas sulenkiamas pusiau ir išmušamos kvadratinė ir apvali skylės (žr. piešinuką). Po to lapas vėl atlenkiamas. Kaip jis tada atrodo?



- A) B) C) D) E)

14. Simonas iš 12 kubinių blokelių suklijavo pavaizduotą statinį, įlašinęs tarp dviejų gretimų sienų po vieną lašą klijų. Kiek lašų klijų Simonas sunaudojo?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

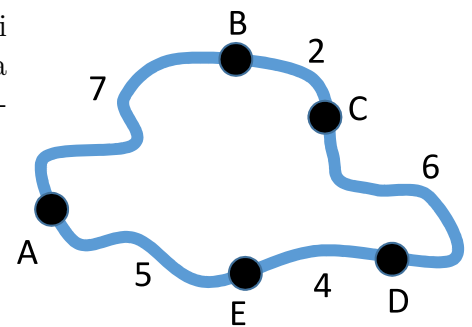


15. Piešiniuose pavaizduoti penkių vaikų, šiandien švenčiančių gimtadienį, tortai. Lina dvejetainis metais vyresnė už Jorį ir metais jaunesnė už Ingą. Onutė yra jauniausia. Kuris tortas priklauso Agnei?



16. Žemėlapyje pavaizduoti penki kaimai: A, B, C, D ir E bei nurodyti atstumai kilometrais tarp jų. Tik du kaimai yra vienodai nutolę vienas nuo kito, kurį iš dviejų maršrutų pasirinktume. Kurie tai kaimai?

- A) B ir E B) B ir D C) C ir E
D) A ir C E) A ir D



17. Dešinėje matome languotą lentelę su skaičiais. Ema nori ant lentelės uždėti vieną iš penkialangelių figūrų taip, kad uždengtų skaičių suma būtų didžiausia. Kurį figūrą ji turėtų pasirinkti? (Figūrų negalima nei pasukti, nei apversti.)

1	6	7
9	5	4
2	8	3

- A) B) C) D) E)

18. Trys varlės gyvena tvenkinyje. Kiekvieną vakarą viena iš varlių kurkia dainą kitoms dviem. Po 9 naktų paaiškėjo, kad viena iš varlių dainavo 2 kartus, o kita varlė girdėjo 5 dainas. Kelias dainas girdėjo trečioji varlė?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

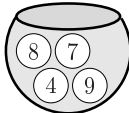
Nykštuko užduočių sprendimai

1. **(D)** 8

! Yra 3 išoriniai ir 5 vidiniai apskritimai, taigi iš viso 8 apskritimai. Teisingas atsakymas **D**.

2. **(B)** 

! Viršutinis kubelis kairėje yra juodas, o dešinėje – pilkas. Viduryje viršutinėje eilėje kubelio nėra, todėl matomas apatinės eilės baltas kubelis. Vaizde iš viršaus iš kairės pusės į dešinę matome juodą, baltą ir pilką kubelius. Teisingas atsakymas **B**.

3. **(A)** 

! Kiekviename dubenėlyje ant rutuliukų užrašytus skaičius sudedame:

A dubenėlyje $9 + 7 + 4 + 8 = 28$,

B dubenėlyje $9 + 7 + 4 + 6 = 26$,

C dubenėlyje $9 + 7 + 4 + 7 = 27$,

D dubenėlyje $9 + 7 + 4 + 4 = 24$ ir

E dubenėlyje $9 + 7 + 4 + 5 = 25$.

Įsitikinome, kad ant rutuliukų užrašytų skaičių suma didžiausia yra **A** dubenėlyje.

!! Pastebime, kad kiekviename dubenėlyje yra rutuliukai su skaičiais 9, 7 ir 4. Vadinasi, suma priklauso tik nuo ketvirtojo skaičiaus, o didžiausias skaičius 8 yra **A** dubenėlyje.

4. **(A)** 

! Kengūra sudaryta iš 5 trikampių ir 1 kvadrato. Monika nepanaudojo keturkampio, kuris nėra kvadratas (lygiagretainio). Teisingas atsakymas **A**.



5. (E)

! Kristupo laivelis turi daugiau nei 1 apskritimą, todėl atsakymą **C** atmetame. Dabar suskaičiuojame, kiek ant laivelio burių yra trikampių ir kvadratų.

Ant **A** laivelio burės yra 2 trikampiai ir 1 kvadratas (1 trikampiu daugiau nei kvadratų)

– **A** nėra teisingas atsakymas.

Ant **B** laivelio burės yra 3 trikampiai ir 2 kvadratai (vienu trikampiu daugiau nei kvadratų)

– **B** nėra teisingas atsakymas.

Ant **D** laivelio burės yra 1 trikampis ir 3 kvadratai (2 trikampaiais mažiau nei kvadratų)

– **D** nėra teisingas atsakymas.

Ant **E** laivelio burės yra 4 trikampiai ir 2 kvadratai (2 trikampaiais daugiau nei kvadratų), tai Kristupo laivelis. Teisingas atsakymas **E**.

6. (C) 76

! Ant torto yra 7 ilgos ir 6 trumpos žvakutės. Taigi, seneliui yra $7 \cdot 10 + 6 \cdot 1 = 76$ metai. Teisingas atsakymas **C**.

7. (B) 6

! Povilas išdėliojo 10 mašinyčių. Matome tik 4 mašinytes, vadinasi, kitos yra tunelyje. Randame, kiek mašinyčių atsidūrė tunelyje: $10 - 4 = 6$. Teisingas atsakymas **B**.

8. (D) 14

! Automobilis sustos kiekvieną kartą, kai pasieks perėją (raudoną tašką), o tada važiuos tiesiai. Visos perėjos bus pravažiuotos lygiai du kartus. Iš viso automobilis sustos $7 \cdot 2 = 14$ kartų. Teisingas atsakymas **D**.

9. (D) 7

! Julija užėmė trečią vietą. Po Julijos buvo dar 3 šokėjos ir paskutinę vietą užėmusi šokėja. Iš viso konkurse dalyvavo: $3 + 3 + 1 = 7$ šokėjos. Teisingas atsakymas **D**.

10. (C) 3

! Pusė stačiakampio kvadratukų skaičiaus yra $24 : 2 = 12$, o 9 kvadratukai jau yra nuspalvinti. Todėl reikia nuspalvinti dar 3 kvadratukus. Teisingas atsakymas **C**.

11. (C) 3

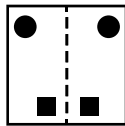
! Kairėje lygybės pusėje apskritimuose esančius skaičius sudedame, $10 + 2 = 12$. Apskaičiuojame kituose dviejuose apskritimuose esančių skaičių sumą, ji lygi: $18 - 12 = 6$. Kadangi abu tie skaičiai vienodi, tai kiekvienas jų lygus $6 : 2 = 3$. Teisingas atsakymas C.

12. (C) 12

! Spalviname Jonės langelius ir matome, kad nenuspalvintų liko 12. Teisingas atsakymas C.

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					
6					

13. (B)



! Atlenkus popieriaus lapą, dvi kvadratinės skylės bus arčiau viena kitos nei dvi apvalios. Teisingas atsakymas B.

14. (D) 11

! Atidžiai suskaičiuojame, kiek yra gretimų sienų porų. Jų yra 11, tiek reikės ir lašų klijų. Teisingas atsakymas D.

!! Vienas kubelis turi 3 suklijuotas sienas, trys kubeliai turi po 1 suklijuotą sieną, likusieji aštuoni kubeliai – po 2 suklijuotas sienas. Iš viso yra $3 + 3 + 8 \cdot 2 = 22$ suklijuotas sienas. Kadangi vienas taškas suklijuoja 2 sienas, tai lašų reikia $22 : 2 = 11$.

15. (C)



! Penki vaikai yra 8, 7, 6, 5 ir 4 metų amžiaus. Onutė yra jauniausia, todėl jai 4 metai. Inga metais vyresnė už Liną, todėl trejais metais vyresnė už Jorį. Toks skirtumas iš skaičių 8, 7, 6, 5 tik tarp 8 ir 5, taigi Inga 8 metai, Joriui 5 metai, tada Linai 7 metai. Liko penktasis vaikas Agnė, jai 6 metai. Teisingas atsakymas C.

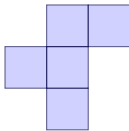
16. **(A)** B ir E

! Visa trasa yra $7 + 2 + 6 + 4 + 5 = 24$ km. Abu maršrutai vienodi, taigi kiekvienas lygus 12 km. Ieškome kaimo, nuo kurio 12 km atstumu būtų kitas. Pradėkime, pagal laikrodžio rodyklę. Nuo A iki kaimo B yra 7 km atstumas (per mažas), iki kaimo C yra $7 + 2 = 9$ km (taip pat per mažas), o iki kaimo D yra $7 + 2 + 6 = 15$ km (per daug). Taigi A nėra vienas iš kaimų.

Pabandykime nustatyti atstumus nuo kaimo B iki kitų kaimų, gauname: nuo B iki D atstumas yra $2 + 6 = 8$ km (per mažas), tarp kaimų B ir E yra $2 + 6 + 4 = 12$ km atstumas. Patikriname atstumą tarp B ir E kita kryptimi: $7 + 5 = 12$ km. Vadinasi, nepriklausomai nuo maršruto, vienodai vienas nuo kito yra nutolę B ir E kaimai.

Taip pat galima patikrinti, ar kitais atvejais, pvz., tarp C ir D, ar C ir E nesusidaro 12 km atstumas. Visais kitais atvejais atstumai tarp kaimų nelygūs 12 km. Teisingas atsakymas **A**.

!! Faktiškai iš skaičių 2, 4, 5, 6, 7 reikia sudaryti dvi sumas po 12. Kadangi vieno skaičiaus neužtenka, tai vienoje iš sumų bus 2 skaičiai. Joje bus 7 – kitaip suma būtų ne didesnė nei $6 + 5 = 11$. Bet jei vienas skaičius 7, tai kitas $12 - 7 = 5$. Toks maršrutas yra – skaičiai 7 ir 5 žemėlapyje „greta“, taigi atstumas tarp B ir E vienu maršrutu (todėl ir kitu maršrutu) bus 12.



17. **(E)**

! Visos figūros dengia penkis lentelės langelius. Penki didžiausi skaičiai yra 9, 8, 7, 6 ir 5. Tik viena figūra **E** uždengia visus didžiausius skaičius. Teisingas atsakymas **E**.

18. **(B)** 6

! Kiekvieną iš 9 vakarų tik viena varlė kurkdavo dainą, kitos dvi klausėsi. Pirmoji varlė kurkė 2 kartus; antroji varlė klausėsi 5 kartus. Vadinasi, trečioji varlė kurkė 3 dainas, taigi ji turėjo išklausyti $9 - 3 = 6$ dainas. Teisingas atsakymas **B**.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	D
2	B
3	A
4	A
5	E
6	C
7	B
8	D
9	D
10	C
11	C
12	C
13	B
14	D
15	C
16	A
17	E
18	B