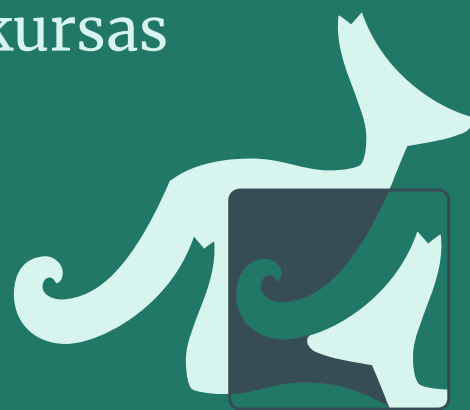
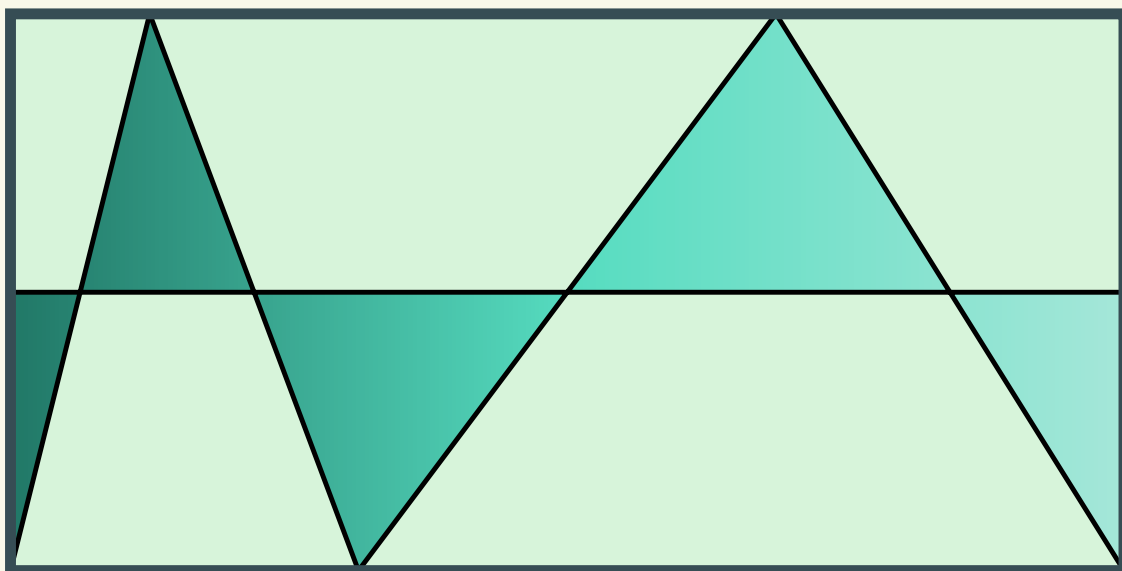


Tarptautinis matematikos konkursas
KENGŪRA



Junioras

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI



2023

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA



KENGŪRA 2023. Junioras

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Maketavo
Ugnė Gudžinskaitė

Turiny

Pratarmė	4
Sąlygos	6
Užduočių sprendimai	10
Atsakymai	27

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdienišku) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gdynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos sprendamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 27000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2023 metais. Nors, žinoma, šiais metais viskas dėl tos nelemtos pandemijos atrodė, pakrypo ir klostėsi visiškai kitaip negu iki šiol. Pasitvirtino visiems teoriškai gerai girdėta išmintis, kad karantininis gyvenimas yra pilnas staigmenų ir netikėtumų: konkursas iš trečiojo kovo ketvirtadienio nusikėlė į vėlesnę datą ir vyko nuotoliniu būdu.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamas, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrantančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo

ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšiuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnanti ateitis, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2023 metų kovo 16 dieną keliavo ir gausiai sprendė 9–10 klasių (*Junioro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys patikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu !), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu ?). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais ??, !!, !!! ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

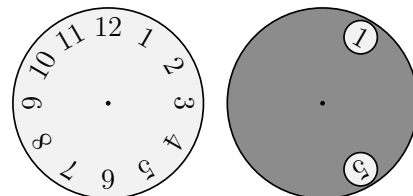
Organizatoriai

2023 m. *Junioro* užduočių sąlygos

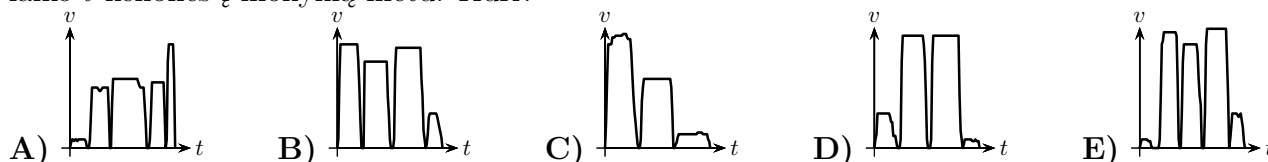
Klausimai po 3 taškus

1. Skritulys su dviem skylutėmis dengia laikrodį, kaip parodyta paveikslėlyje. Lina pasuko skritulį aplink jo centrą taip, kad vienoje iš skylių atsidurtų skaičius 10. Koks skaičius gali būti kitoje pasukto skritulio skylutėje?

A) 2 arba 6 B) 3 arba 7 C) 3 arba 6
D) 1 arba 9 E) 2 arba 7

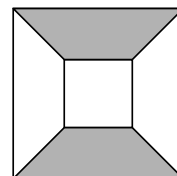


2. Vieną rytą Džeinė vėlavo į mokyklą. Džeinei teko bėgti į metro stotį, kur vos spėjo išsiti į traukinį. Toliau ji nuvažiavo dvi stoteles. Išlipusi antroje iš jų, ji neskubėdama pėsčiomis nuėjo į mokyklą. Viena iš penkių diagramų vaizduoja Džeinės judėjimo greičio v priklausomybę nuo laiko t kelionės į mokyklą metu. Kuri?



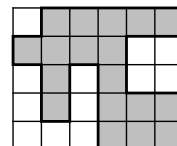
3. Natūralieji skaičiai m ir n yra nelyginiai. Kuris skaičius taip pat yra nelyginis?
A) $m(n+1)$ B) $(m+1)(n+1)$ C) $m+n$ D) $m+n+2$ E) $mn+2$

4. Kvadratas, kurio kraštinės ilgis yra 10, ir kvadratas, kurio kraštinės ilgis yra 4, turi bendrą centrą. Šių kvadratų atitinkamos kraštinės lygiagrečios (žr. pav.). Kokią didžiojo kvadrato ploto dalį sudaro nuspaltintos srities plotas?
A) 25% B) 30% C) 40% D) 42% E) 45%



5. Šiandien ketvirtadienis, po trijų dienų bus sekmadienis. Kokia savaitės diena bus po 2023 dienų nuo šandien?
A) Antradienis B) Trečiadienis C) Ketvirtadienis
D) Penktadienis E) Šeštadienis

6. Paveikslėlyje pavaizduotą stačiakampį sudaro 30 kvadratų. Koks yra jo plotas, jei nuspaltintos figūros perimetras lygus 240?
A) 480 B) 750 C) 1080 D) 1920 E) 2430



7. Šeimą sudaro penki asmenys. Jų amžių (metais) suma lygi 80. Du jauniausi šeimos nariai yra vaikai – šešiametis ir aštuonmetė. Kokia buvo šeimos amžių (metais) suma prieš 7 metus?
A) 35 B) 36 C) 45 D) 46 E) 52

8. Kad eikvotų mažiau vandens, Rima savo prausimosi po dušu laiką sumažino ketvirtadaliu. Be to, prausdamasi ji dabar nustato ketvirtadaliu silpnesnę vandens srovę (t. y. ketvirtadaliu mažesnę vandens, ištekančio iš dušo per sekundę, kiekį). Kokia dalimi Rima sumažino vandens kiekį, sunaudojamą vieno prausimosi po dušu metu?

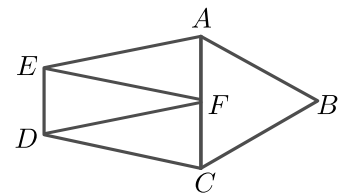
A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{7}{16}$

9. Kiek yra natūraliųjų skaičių porų (a, b) , kurioms teisinga lygybė $\frac{a}{5} = \frac{7}{b}$?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 3

10. Paveikslėlyje pavaizduotas penkiakampis $ABCDE$. Jį sudaro lygiakraštis trikampis ABC ir trys lygūs lygiašoniai trikampiai AEF , EFD , FDC , kurių pagrindai atitinkamai yra AF , ED , FC . Kiekvieno iš šių keturių trikampių perimetras lygus 1. Koks yra penkiakampio $ABCDE$ perimetras?

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) 2 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{7}{4}$



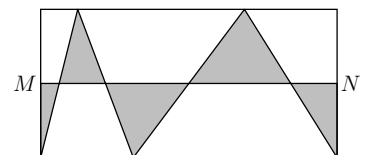
Klausimai po 4 taškus

11. Viela, kurios ilgis yra 95 m, supjaustyta į tris dalis. Antroji dalis yra 50% ilgesnė nei pirmoji, o trečioji yra 50% ilgesnė nei antroji. Koks yra vielos trečiosios dalies ilgis metrais?

A) 36 B) 42 C) 45 D) 46 E) 48

12. Stačiakampis padalytas į penkis nuspalvintus trikampius ir penkis nenuspalvintus keturkampius, kaip parodyta paveikslėlyje. Taškai M ir N dalija stačiakampio kraštines pusiau. Kokią stačiakampio ploto dalį sudaro nuspalvintos srities plotas?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

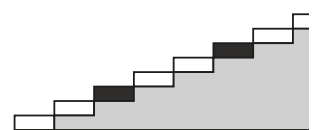


13. Rimas sveikąjį skaičių vadina **laipsnišku**, jei jis lygus a^k , kur a yra sveikasis skaičius, o rodiklis k yra natūralusis skaičius, didesnis už 1. Rimas skaičių vadina **belaipsniu**, jei tai yra natūralusis skaičius, kurio joks skaitmuo nėra laipsniškas. Koks yra mažiausio dviženklio belaipsnio skaičiaus ir didžiausio dviženklio belaipsnio skaičiaus didžiausias bendras daliklis?

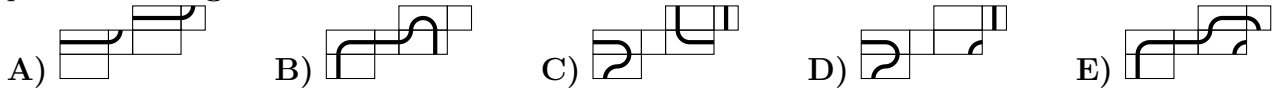
A) 3 B) 5 C) 7 D) 11 E) 13

14. Aukštyn lipant 1000 laiptelių laiptais, kas trečias laiptelis yra juodas (žr. pav.). Vanda užlipo šiais laiptais įprastu būdu: ant pirmo laiptelio pastatė vieną koją, ant antro kitą, ant trečio – vėl pirmąją koją, ant ketvirto – vėl antrąją, ir t. t. Ant kai kurių juodų laiptelių Vanda pastatė dešinę koją. Kiek mažiausiai gali būti tokių juodų laiptelių?

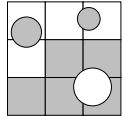
A) 0 B) 166 C) 167 D) 222 E) 333



15. Dėžė turi stačiakampio gretasienio formą. Ant dėžės Liudas nubrėžė uždara liniją. Kuris paveikslėlis **negali** būti šios dėžės išklotinė?



16. Iš 9 lygių kvadratų sudėtas didesnis kvadratas, kurio kraštinės ilgis lygus 30. Šio kvadrato viduje nubrėžti trys apskritimai: vienas apačioje, kitas kairėje viršuje, trečias dešinėje viršuje (žr. pav.). Šių apskritimų spindulio ilgiai atitinkamai lygūs 5, 4 ir 3. Koks yra nuspaltintos srities plotas?



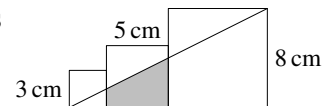
A) 400 B) 500 C) $400 + 50\pi$ D) $500 - 25\pi$ E) $500 + 25\pi$

17. Kiemas iš vienos pusės atitvertas tvora. Tvorai panaudotos dviejų rūšių lentos: ilgosios, vertikalios stovinčios viena eile, ir trumposios, kurių kiekviena horizontaliai prikaltas prie dviejų gretimų ilgųjų lentų. Bet kurias dvi gretimas ilgąsias lentas jungia keturios trumposios. Kuris skaičius gali būti bendras panaudotų lentų skaičius?

A) 96 B) 97 C) 98 D) 99 E) 100

18. Paveikslėlyje parodyti trijų suglaustų kvadratų kraštinių ilgiai. Koks yra nuspaltintos trapezijos plotas (kvadratiniais centimetrais)?

A) 13 B) $\frac{55}{4}$ C) $\frac{61}{4}$ D) $\frac{65}{4}$ E) $\frac{69}{4}$



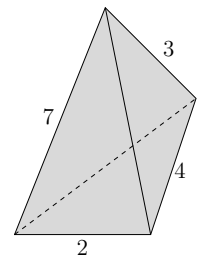
19. Bokštas sudėtas iš 90 detalių, dedant jas vieną ant kitos. Detalės iš eilės nuo apačios iki viršaus sunumeruotos skaičiais nuo 1 iki 90. Kąjus ėmė trijų detalių bokštelių nuo bokšto viršaus ir, iš eilės dėdamas šiuos bokštelių vieną ant kito, sudėjo iš jų naują 90 detalių bokštą (žr. pav.). Kiek detalių Kajaus bokšte skiria detales 39 ir 40?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

90	3
89	2
88	1
⋮	⋮
4	85
3	90
2	89
1	88

20. Keturi taškai erdvėje sujungti šešiomis atkarpomis (taip sudarant trikampę piramidę). Visų atkarpų ilgiai yra sveikieji skaičiai. Paveikslėlyje parodyti keturi iš jų. Kokia yra likusių dviejų ilgių suma?

A) 9 B) 10 C) 12 D) 14 E) Kitas atsakymas



Klausimai po 5 taškus

21. Robotė Roma iš eilės garsiai ištare tokius keturis skaičius: 2, 0, 2, 3. Ji toliau taria skaičius: kiekvienas naujas skaičius yra mažiausias neneigiamas sveikasis skaičius, nelygus jokiam iš paskutinių keturių ištartųjų. Koks bus 2023-iasis Romos ištartas skaičius?

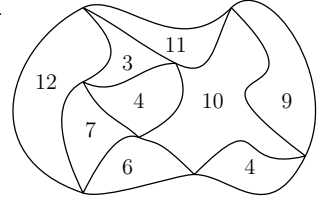
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

22. Laima apskaičiavo penkių skirtingų pirminių skaičių aritmetinį vidurkį ir gavo rezultata – natūralųjį skaičių a . Kokia yra mažiausia galima skaičiaus a reikšmė?

A) 12 B) 8 C) 4 D) 5 E) 6

23. Karnavalo metu kino teatre visą eilę, kurioje yra 23 vietos, užėmė persirengėliai – kengūros ir bebrai. Jie susėdo taip, kad šalia kiekvieno persirengėlio sėdėtų bent viena kengūra. Kiek daugiausiai bebrų galėjo būti tarp persirengėlių?
 A) 7 B) 8 C) 10 D) 11 E) 12

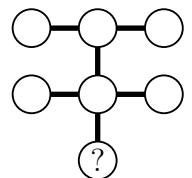
24. Parkas padalytas į 9 poilsio zonas. Paveikselyje nurodyti šių zonų perimetrai (kilometrais). Koks yra šio parko perimetras?
 A) 22 km B) 26 km C) 28 km D) 32 km
 E) Kitas atsakymas



25. Kiek yra natūraliųjų skaičių, iš kurių dalijasi skaičius $2^{20} \cdot 3^{23}$, bet ne skaičius $2^{10} \cdot 3^{20}$?
 A) 13 B) 30 C) 273 D) 460 E) Kitas atsakymas

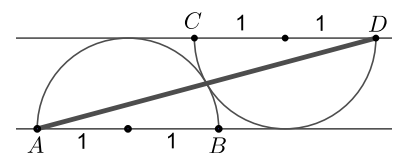
26. Pilnai įkrautas Laimio išmanusis telefonas išsikrautų: 1) po 32 val., jei būtų be pertraukų naudojamas skambučiams; 2) po 20 val., jei būtų be pertraukų naudojamas interneto naršymui; 3) po 80 val., jei nebūtų naudojamas. Laimio kelionės traukiniu pradžioje jo telefonas buvo įkrautas iki pusės. Trečdalį kelionės laiko Laimis naudojo telefoną skambučiams, trečdalį – interneto naršymui, o likusį trečdalį laiko Laimis telefono nenaudojo. Kelionės pabaigoje telefonas išsikrovė. Kiek truko kelionė?
 A) 10 val. B) 12 val. C) 15 val. D) 16 val. E) 18 val.

27. Trys atkarpos jungia 7 skritulius (žr. pav.), kuriuose įrašyta po vienaženklį natūralųjį skaičių. Įrašytieji 7 skaičiai skirtingi. Daina apskaičiavo kiekvienos atkarpos trijų skaičių sandaugą ir pastebėjo, kad visos trys sandaugos yra lygios. Koks skaičius įrašytas apatiniame skritulyje?
 A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8



28. Iš triženklio natūraliojo skaičiaus n atėmus jo skaitmenų sumą, gautas triženklis natūralusis skaičius, kurio visi skaitmenys lygūs. Kiek yra tokių skaičių n ?
 A) 10 B) 20 C) 25 D) 30 E) Kitas atsakymas

29. Tiesės AB ir CD lygiagrečios, o atkarpų AB ir CD ilgiai abu lygūs 2. Du pusapskritimiai su skersmenimis AB ir CD liečia šias tieses ir vienas kitą, kaip parodyta paveikslėlyje. Koks yra atkarpos AD ilgio kvadratas?
 A) 16 B) $8 + 4\sqrt{3}$ C) 12 D) 9 E) $5 + 2\sqrt{3}$



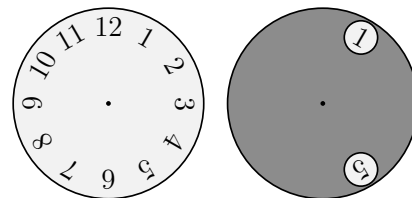
30. Visus natūraliuosius skaičius nuo 1 iki 9 reikia taip po vieną įrašyti į langelius (žr. pav.), kad kiekviena trijų gretimų skaičių suma dalytųsi iš 3. Keliais būdais tai galima padaryti?
 A) 6^4 B) 6^3 C) 2^9 D) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ E) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Junioro užduočių sprendimai

1. **A** 2 arba 6

? Laikrodyje skaičiai 1, 2, 3, ..., 12 surašyti ratu iš eilės, tad kiekvienas lyginis skaičius yra tarp dviejų nelyginių ir atvirkščiai. Pradžioje skylutėse yra skaičiai 1 ir 5. Jie yra to paties lyginumo (abu nelyginiai). Sukant skritulį, skylių tarpusavio padėtis nekinta, todėl skaičiai skylutėse visada lieka to paties lyginumo – abu lyginiai arba abu nelyginiai. Jei vienoje skylutėje atsidurs skaičius 10, tai kitoje turi būti lyginis skaičius.



Atsakymuose nurodyta po du skaičius. Nenuostabu: skritulyje yra dvi skylutės, o skaičius 10 galėjo atsidurti bet kurioje iš jų. Taigi abu teisingame atsakyme nurodyti skaičiai turi būti galimi. Kadangi šie skaičiai abu turi būti lyginiai, tai atsakymai **B–E** netinka.

Renkamės atsakymą **A**.

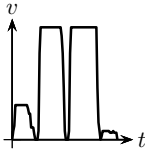
! Yra dvi galimybės: pasukus skritulį, skaičius 10 atsidūrė skylutėje, kurioje prieš tai buvo arba skaičius 1, arba skaičius 5.

Pirmuoju atveju skylutė su skaičiumi 1 atsidūrė per tris padalas prieš laikrodžio rodyklę nuo pradinės padėties. Tada taip pat pasisuko ir kita skylutė: nuo skaičiaus 5 prie skaičiaus $5 - 3 = 2$.

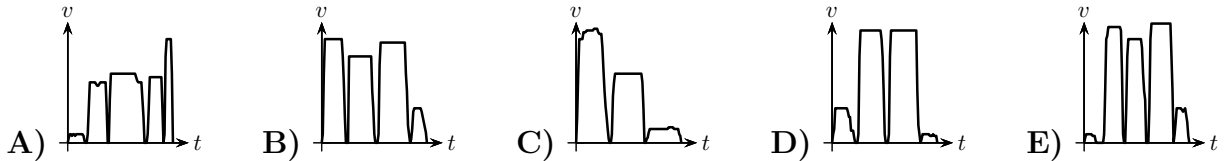
Antruoju atveju skylutė su skaičiumi 5 atsidūrė per penkias padalas pagal laikrodžio rodyklę nuo pradinės padėties. Tada taip pat pasisuko ir kita skylutė: nuo skaičiaus 1 prie skaičiaus $1 + 5 = 6$.

Vadinasi, jei vienoje pasukto skritulio skylutėje yra skaičius 10, tai kitoje yra vienas iš skaičių 2 ir 6.

2. **(D)**



! Diagramose matome po kelis stulpelius. Kiekvieno stulpelio, esančio tarp t reikšmių t_1 ir t_2 , aukštis parodo, koku greičiu Džeinė judėjo nuo laiko momento t_1 iki laiko momento t_2 . Kadangi kelionės pradžioje Džeinė bėgo, o pabaigoje ėjo neskubėdama, tai teisingoje diagramoje pirmasis (iš kairės) stulpelis turi būti aukštesnis nei paskutinis. Todėl netinka diagramos **A** ir **E**. Metro traukinys važiuoja kur kas greičiau, nei gali judėti žmogus, todėl diagramos stulpeliai, esantys tarp pirmojo ir paskutinio, turi būti aukštesni nei du kraštiniai stulpeliai. Taigi netinka diagramos **B** ir **C**.



Vadinasi, Džeinės kelionę turi nusakyti diagrama **D**. Iš tiesų, joje du kraštiniai stulpeliai daug žemesni nei likusieji (Džeinė kelionės pradžioje ir pabaigoje judėjo pėsčiomis). Be to, pirmasis stulpelis aukštesnis už paskutinį (Džeinė pirmiau bėgo, o vėliau ėjo). Pagaliau tarp jų yra du vienodo didelio aukščio stulpeliai: traukinys judėjo tuo pačiu dideliu greičiu nuo pradinės stotelės iki tarpinės, o tada – nuo tarpinės iki galutinės.

3. **(E)** $mn + 2$

? Pasirinkime konkrečias natūraliąsias nelygines m ir n reikšmes, pavyzdžiui, $m = n = 1$. Gauname tokias atsakymų reikšmes:

A) 2 **B)** 4 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 3

Tarp šių penkių skaičių tėra vienintelis nelyginis skaičius 3.

Renkamės atsakymą **E**.

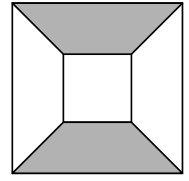
! Kadangi skaičius n nelyginis, tai skaičius $n + 1$ lyginis. Jei bent vienas iš dviejų sveikųjų skaičių lyginis, tai ir jų sandauga lyginė. Vadinasi, skaičiai $m(n + 1)$ ir $(m + 1)(n + 1)$ lyginiai (atsakymai **A** ir **B** klaidingi). Dviejų sveikųjų nelyginių skaičių suma visada lyginė, o sandauga – nelyginė. Taigi skaičius $m + n$ lyginis (atsakymas **C** klaidingas), o skaičius mn nelyginis. Prie sveikąjo skaičiaus pridėjus lyginį skaičių, pradinio skaičiaus lyginumas nepakinta. Todėl skaičius $m + n + 2$ lyginis (atsakymas **D** klaidingas), o skaičius $mn + 2$ nelyginis (atsakymas **E** teisingas).

Kad sprendimas būtų pilnas, patikrinome visus penkis atsakymus. Norint pasirinkti teisingą atsakymą, pakanka patikrinti arba atsakymus **A–D**, arba atsakymą **E**.

4. **(D)** 42%

? Didžiajame kvadrato pašalinus mažąjį, likusios srities plotas S_1 lygus dviejų kvadratų plotų skirtumui:

$$S_1 = 10^2 - 4^2 = 100 - 16 = 84.$$



Ši sritis padalyta į keturis keturkampius. Paveikslėlyje nesunku pastebėti simetriją ir nuspėti, kad šie keturkampiai (trapecijos) yra lygūs. Nuspalvintą sritį sudaro du iš keturių keturkampių, todėl nuspalvintos srities plotas S lygus $\frac{1}{2}S_1 = 42$. Didžiojo kvadrato plotas S_0 lygus $10^2 = 100$, tad plotas S sudaro $\frac{S}{S_0} \cdot 100\% = 42\%$ ploto S_0 .

Renkamės atsakymą **D**.

! Didysis kvadratas padalytas į penkis keturkampius. Vienas iš jų yra mažasis kvadratas. Kadangi kvadratų atitinkamos kraštinės lygiagrečios, tai likę keturi keturkampiai yra trapecijos.

Tiesė, einanti per bendrą kvadratų centrą ir lygiagreti su kvadratų horizontaliomis kraštinėmis, yra abiejų kvadratų simetrijos ašis. Ji yra per vidurį tarp horizontalių mažojo kvadrato kraštinių bei yra nuo jų nutolusi atstumu $4 : 2 = 2$. Nuo horizontalių didžiojo kvadrato kraštinių ji yra analogiškai nutolusi atstumu $10 : 2 = 5$. Vadinasi, atstumas tarp didžiojo ir mažojo kvadratų viršutinių kraštinių lygus $5 - 2 = 3$.

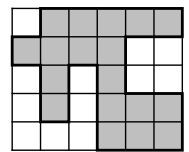
Nagrinėkime viršutinę nuspalvintą trapeciją. Jos pagrindų ilgiai yra 4 ir 10, o aukštinės ilgis (atstumas tarp pagrindų) lygus 3. Todėl šios trapecijos plotas lygus $\frac{(4+10) \cdot 3}{2} = 21$. Analogiškai gauname tokį patį ir kitos nuspalvintos trapecijos plotą. Vadinasi, visos nuspalvintos srities, kurią sudaro dvi trapecijos, plotas S lygus $21 \cdot 2 = 42$. Didžiojo kvadrato plotas S_0 lygus $10^2 = 100$, tad plotas S sudaro $\frac{S}{S_0} \cdot 100\% = 42\%$ ploto S_0 .

5. **(C)** Ketvirtadienis

! Po 7, 14, 21, ... dienų (kai dienų skaičius yra skaičiaus 7 kartotinis) bus ta pati savaitės diena kaip šiandien, taigi – ketvirtadienis. Tad verta nustatyti skaičiaus 2023 dalybos iš 7 liekaną. Kadangi ši liekana lygi 0 (turime $2023 = 7 \cdot 289$), tai po 2023 dienų bus ketvirtadienis.

6. **(D)** 1920

! Žinoma, visi stačiakampį sudarantys 30 kvadratų lygūs. Kiekvieno iš jų kraštinės ilgį pažymėkime a . Paveikslėlyje galima tiesiogiai suskaičiuoti, kad nuspalvintos figūros kraštą sudaro šių kvadratų 30 kraštinių. Todėl $30a = 240$ ir $a = 240 : 30 = 8$. Duotojo stačiakampio matmenys yra $6a \times 5a$, taigi jo plotas lygus



$$6a \cdot 5a = 30a^2 = 30 \cdot 64 = 1920.$$

7. **(D)** 46

! Svarbu pastebėti, kad jauniausiam šeimos nariui tėra 6 metai, todėl prieš 7 metus jo nebuvo. Likusių keturių šeimos narių amžių (metais) suma dabar yra $80 - 6 = 74$. Jauniasiai iš šių keturių narių dabar yra 8 metai. Tad kiekvienam iš jų dabar yra daugiau nei 7 metai, o prieš 7 metus buvo 7 metais mažiau. Vadinasi, prieš 7 metus šeimą sudarė keturi asmenys, o jų amžių (metais) suma buvo $74 - 7 - 7 - 7 - 7 = 46$.

8. (E) $\frac{7}{16}$

! Vandens kiekį (nesvarbu kokiais matavimo vienetais), kurį Rima sunaudodavo, prieš pakeisdamą prausimosi įpročius, pažymėkime x (čia galima būtų laikyti ir kad $x = 1$). Rimai nustačius ketvirtadaliu silpnesnę srovę, sunaudojamas vandens kiekis taip pat sumažėtų ketvirtadaliu bei taptų lygus $y = x - \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}x$. Tačiau Rima taip pat ketvirtadaliu sutrumpino prausimosi laiką, tuo ketvirtadaliu sumažindama galimą vandens kiekį y . Vadinasi, dabar Rimos prausiantis sunaudojamas vandens kiekis lygus

$$y - \frac{1}{4}y = \frac{3}{4}y = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}x = \frac{9}{16}x = x - \frac{7}{16}x$$

– jis sumažėjo $\frac{7}{16}$ buvusio vandens kiekio x .

9. (C) 4

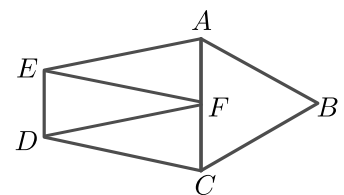
! Jei $\frac{a}{5} = \frac{7}{b}$, tai $a \cdot b = 5 \cdot 7$ (pagrindinė proporcijos savybė). Matome, kad a turi būti skaičiaus $5 \cdot 7 = 35$ teigiamas daliklis. Kita vertus, kiekvienam tokiame dalikliui a gausime tinkamą natūraliųjų skaičių porą $(a, b) = (a, \frac{35}{a})$, kuriai $a \cdot b = 5 \cdot 7$ ir todėl $\frac{a}{5} = \frac{7}{b}$.

Vadinasi, pakanka nustatyti, kiek teigiamų daliklių turi skaičius $5 \cdot 7$. Jų yra keturi: 1, 5, 7 ir 35. Taigi yra keturios atitinkamos poros (a, b) . Nors tai nebūtina, išvardykime jas:

$$(1, 35), \quad (5, 7), \quad (7, 5), \quad (35, 1).$$

10. (A) $\frac{5}{3}$

! Duotųjų keturių trikampių kraštinės yra trijų skirtingų ilgių. Lygiakraščio trikampio kraštinės ilgį pažymėkime x . Kiekvieno iš lygių lygiašonių trikampių AEF , EFD , FDC pagrindo ir šoninės kraštinės ilgį atitinkamai pažymėkime y ir z . Kiekvieno trikampio perimetras lygus 1:



$$1 = AB + BC + CA = x + x + x = 3x, \quad x = \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{3} = x = AC = AF + FC = y + y = 2y, \quad y = \frac{1}{6},$$

$$1 = DE + EF + FD = y + z + z = \frac{1}{6} + 2z, \quad 2z = \frac{5}{6}, \quad z = \frac{5}{12}.$$

Vadinasi, penkiakampio $ABCDE$ perimetras lygus

$$AB + BC + CD + DE + EA = x + x + z + y + z = 2x + y + 2z = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{5}{3}.$$

!! Pažymėkime $a = AB + BC$ ir $b = CD + DE + EA$. Reikia rasti penkiakampio $ABCDE$ perimetrą $a + b$.

Lygių lygiašonių trikampių AEF , EFD , FDC pagrindai yra lygūs ir šoninės kraštinės yra lygios. Todėl

$$b = CD + DE + EA = FD + DE + EF = 1$$

(trikampio DEF perimetras lygus 1). Kadangi trikampio ABC trys kraštinės lygios, tai skaičius $a = AB + BC$ lygus $\frac{2}{3}$ trikampio ABC perimetro 1. Vadinasi, $a + b = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$.

11. © 45

! Vėlos pirmosios, antrosios ir trečiosios dalių ilgius metrais atitinkamai pažymėkime x_1, x_2, x_3 . Tada $x_1 + x_2 + x_3 = 95$ (m).

Jei skaičius a yra 50% didesnis už skaičių b , tai jis gaunamas, prie skaičiaus b pridėjus $\frac{50\%}{100\%} = \frac{1}{2}$ skaičiaus b , t. y. $a = \frac{3}{2}b$. Vadinasi,

$$x_2 = \frac{3}{2}x_1, \quad x_3 = \frac{3}{2}x_2 = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}x_1\right) = \frac{9}{4}x_1,$$

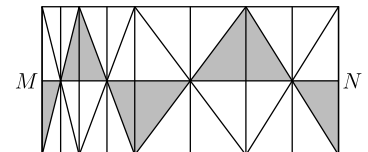
$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{4}{9}x_3 + \frac{2}{3}x_3 + x_3 = x_3 \cdot \left(\frac{4}{9} + \frac{2}{3} + 1\right) = x_3 \cdot \frac{4 + 6 + 9}{9} = \frac{19}{9}x_3,$$

$$95 = \frac{19}{9}x_3, \quad x_3 = 95 : 19 \cdot 9 = 5 \cdot 9 = 45 \text{ (m)}.$$

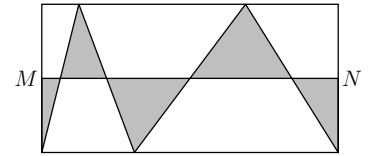
12. © $\frac{1}{4}$

? Stačiakampio viduje nubrėžkime papildomas atkarpas, kaip parodyta paveikslėlyje. Septynios iš jų yra vertikalios ir dalija stačiakampį į 8 mažesnius. Nesunku nuspėti, kad kiekvienas iš šių mažesniųjų stačiakampių padalintas į keturias lygias dalis, iš kurių viena nuspalsvinta. Todėl kiekviename iš 8 stačiakampių nuspalsvintos srities plotas lygus $\frac{1}{4}$ viso ploto. Kadangi taip yra visuose 8 stačiakampiuose, tai tą patį galima pasakyti ir apie didįjį stačiakampį, kurį sudaro 8 mažesnieji.

Renkamės atsakymą **C**.



?? Stačiakampio viduje nubrėžta atkarpa MN ir dar keturios (parsišios) atkarpos. Šios keturios atkarpos dalija stačiakampį į 5 trikampių. Nagrinėkime bet kurį iš jų. Nesunku nuspėti, kad atkarpa MN , būdama per vidurį tarp horizontaliųjų stačiakampio kraštinių, dalija pusiau ir dvi trikampio kraštines, būdama lygiagreči su jo trečiąja kraštine (eina per trikampio vidurio liniją). Ji atkerta trikampyje nuspaltintą dalį – mažesnį trikampį, kuris yra panašus su pradiniu (pagal dvi kraštines ir kampą), o panašumo koeficientas lygus $k = \frac{1}{2}$. Todėl didesniajame trikampyje nuspaltintos srities plotas lygus $k^2 = \frac{1}{4}$ viso ploto. Kadangi taip yra kiekviename iš 5 trikampių, tai tą patį galima pasakyti ir apie stačiakampį, kurį šie trikampiai sudaro.



Renkamės atsakymą **C**.

! Stačiakampio ilgį ir plotą atitinkamai pažymėkime $2a$ ir $2b$. Atkarpa MN yra padalyta į 5 trumpesnes, kurių ilgius iš kairės į dešinę pažymėkime a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 .

Atkarpa MN dalija stačiakampį į du keturkampius, kurių kiekvienas turi po dvi lygias (ilgio b) lygiagrečias kraštines. Taigi šie du keturkampiai yra lygiagretainiai (iš tiesų – stačiakampiai), ir $MN = 2a$. Tada

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2a.$$

Be to, atkarpa MN yra lygiagreči su dviem stačiakampio kraštinėmis ir nutolusi nuo jų atstumu b . Todėl kiekviename iš 5 nuspaltintų trikampių aukštinės, nuleistos į jo horizontaliąją kraštinę, ilgis lygus b , o 5 nuspaltintų trikampių plotai lygūs $\frac{a_1 \cdot b}{2}, \frac{a_2 \cdot b}{2}, \frac{a_3 \cdot b}{2}, \frac{a_4 \cdot b}{2}, \frac{a_5 \cdot b}{2}$.

Vadinasi, stačiakampio nuspaltintos srities plotas lygus

$$\frac{a_1 \cdot b}{2} + \frac{a_2 \cdot b}{2} + \dots + \frac{a_5 \cdot b}{2} = \frac{b}{2} \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_5) = \frac{b}{2} \cdot 2a = ab,$$

arba $\frac{1}{4}$ stačiakampio viso ploto $2a \cdot 2b = 4ab$.

13. **(D)** 11

? Skaitmuo 0 yra laipsniškas, nes $0 = 0^2$. Tarkime, kad mažiausias skaitmuo, kuris nėra laipsniškas, yra A , o didžiausias yra B . Kad ir kokie jie būtų, mažiausias belaispnis dviženklis skaičius yra $\overline{AA}$, o didžiausias – $\overline{BB}$. Tokie skaičiai neišvengiamai dalijasi iš 11, tad ir jų didžiausias bendrasis daliklis lygus 11 arba šio skaičiaus kartotiniui. Atsakymuose pateiktas vienintelis toks skaičius.

Renkamės atsakymą **D**.

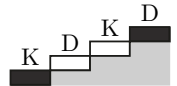
! Skaičius yra laipsniškas, jei yra kelių (dviejų, trijų, ...) vienodų sveikųjų skaičių sandauga $a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a^k$. Skaitmenys

$$0 = 0^2, \quad 1 = 1^2, \quad 4 = 2^2, \quad 8 = 2^3, \quad 9 = 3^2$$

yra laipsniški, o likę skaitmenys 2, 3, 5, 6, 7 tokie nėra. Taigi belaispnie natūralieji skaičiai yra tie, kurių skaitmenys yra 2, 3, 5, 6, 7. Mažiausias ir didžiausias toks dviženklis skaičius atitinkamai yra 22 ir 77. Šių skaičių skaidiniai pirminiais daugikliais yra $2 \cdot 11$ ir $7 \cdot 11$, o didžiausias bendrasis daliklis yra 11.

14. (B) 166

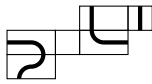
! Juodi yra 3-iasis, 6-asis, 9-asis, ..., 999-asis laipteliai, jų yra 333. Nagrinėkime bet kurį juodą laiptelį, išskyrus paskutinį. Jei Vanda šį laiptelį užmynė kaire koja, tai tolimesnį juodą laiptelį užmynė dešine (žr. pav.) ir atvirkščiai. Taigi, juodus laiptelius žymint K, jei Vanda juos užmynė kaire koja, ir D – jei dešine, juos nusako viena iš dviejų sekų



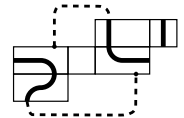
$$\text{DKDKDK} \dots \text{DKDKD} \quad \text{ir} \quad \text{KDKDKD} \dots \text{KDKDK}.$$

Abiem atvejais sekoje yra $333 = 166 \cdot 2 + 1$ raidžių, kurios kartojasi kas dvi. (Sekos prasideda ir baigiasi ta pačia raide, nes skaičius 333 nelyginis.) Pirmojoje sekoje yra 167 raidės D, o tarpuose tarp jų – 166 raidės K. Antrojoje sekoje yra 167 raidės K ir 166 raidės D. Taigi Vanda užmynė dešine koja 167 arba 166 juodus laiptelius, ir mažiausias galimas tokių laiptelių skaičius yra 166.

15. (C)

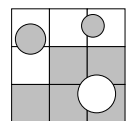


! Atsakymai patikrinami, pasitelkus vaizduotę – įsivaizdavus, kaip iš kiekvienos išklotinės sulankstoma dėžė. Sulankstant dėžę, išklotinės stačiakampių kai kurios kraštinės suglaudžiamos, o storųjų linijų galai turi taip sutapti, kad šios linijos sudarytų vieną uždarą liniją. Taip ir nutinka su keturiomis iš šių išklotinių, bet ne su išklotine C. Paveikslėlyje suglaudžiamų kraštinių taškai, turintys sutapti, sujungti punktyrinėmis linijomis. Matome, kad du storųjų linijų galai sulankstytoje dėžėje sutaps su taškais, kurie nėra storųjų linijų galai. Vadinasi, šiuose taškuose storosios linijos nutrūks, o atsakymas C negali būti duotosios dėžės išklotinė.



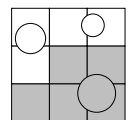
16. (B) 500

! Mažųjų kvadratų kraštinių ilgis lygus $30 : 3 = 10$. Todėl penkių bent iš dalies nuspaltintų kvadratų bendras plotas lygus $5 \cdot 10^2 = 500$. Nuspaltintą sritį gausime iš šių penkių kvadratų pašalinę baltąjį skritulį, kurio plotas yra $5^2\pi$, ir prie jų prijungę du nuspaltvintus skritulius, kurių plotai yra $3^2\pi$ ir $4^2\pi$. Vadinasi, nuspaltintos srities plotas lygus



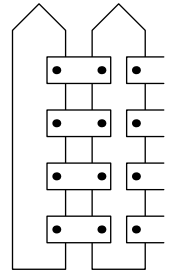
$$500 - 5^2\pi + 3^2\pi + 4^2\pi = 500 + \pi \cdot (-25 + 9 + 16) = 500.$$

!! Prisiminę skritulio ploto formulę πr^2 ir pastebėję lygybę $3^2 + 4^2 = 5^2$, gauname: skritulių, kurių spindulių ilgiai yra 3 ir 4, plotų suma lygi skritulio, kurio spindulio ilgis yra 5, plotui. Todėl jei paveikslėlyje vietoj dviejų mažesniųjų skritulių būtų nuspaltvintas didesnis, tai nuspaltintos srities plotas S nepakistų. Pastaruoju atveju nuspaltintą sritį sudarytų 5 iš 9 lygių kvadratų (žr. pav.). Vadinasi, plotas S lygus $\frac{5}{9}$ didžiojo kvadrato ploto $30^2 = 900$. Gauname $S = 500$.



17. **(A)** 96

? Tvorą yra ilgųjų lentų eilė, kurioje tarp bet kurių dviejų gretimų lentų yra dar ir keturios trumposios lentos (žr. pav.). Įsivaizduokime, kad ilgosios lentos rikiuojasi iš kairės į dešinę, ir kiekvieną ilgąją lentą, išskyrus dešiniausiąją, sugrupuokime su keturiomis trumposiomis, kuriomis ji sujungta su kita ilgąja lentą iš dešinės. Taip visas tvoros lentas, išskyrus dešiniausiąją ilgąją, suskirstome į lentų penketus. Vadinasi, tvorą iš viso sudaro $5 + 5 + \dots + 5 + 5 + 1$ lentų. Nežinome, kiek dėmenų, lygių 5, yra šiame reiškinyje. Tačiau suma $5 + 5 + \dots + 5 + 5$ visada baigiasi skaitmeniu 5 arba skaitmeniu 0, todėl bendras tvoros lentų skaičius turi baigtis skaitmeniu 6 arba skaitmeniu 1. Taigi lentų tvoroje negali būti 97, 98, 99 arba 100.



Renkamės atsakymą **A**.

! Tarkime, kad tvoroje ilgųjų lentų yra n . Tada turime $n - 1$ tarpą tarp gretimų ilgųjų lentų, o šiuose tarpuose yra po keturias trumpąsias lentas. Vadinasi, tvorą sudaro iš viso

$$n + 4(n - 1) = 5n - 4 = 5(n - 1) + 1$$

lentų. Jų skaičius dalijasi iš 5 su liekana 1, tad tinka nebent atsakymas **A**. Jis iš tiesų yra galimas, kai $5n - 4 = 96$, taigi kai tvorą sudaro $n = 20$ ilgųjų lentų, nurodytu būdu sujungtos trumposiomis.

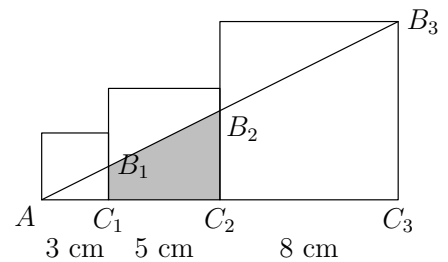
18. **(B)** $\frac{55}{4}$

! Pažymėkime taškus, kaip parodyta paveikslėlyje. Čia

$$AC_1 = 3 \text{ cm},$$

$$AC_2 = 3 + 5 = 8 \text{ (cm)},$$

$$AC_3 = 3 + 5 + 8 = 16 \text{ (cm)}.$$



Statieji trikampiai AB_1C_1 , AB_2C_2 ir AB_3C_3 yra panašieji (turi bendrą smailųjį kampą). Todėl

$$B_1C_1 : B_3C_3 = AC_1 : AC_3 = 3 : 16, \quad B_1C_1 = \frac{3}{16} B_3C_3 = \frac{3}{16} \cdot 8 = \frac{3}{2} \text{ (cm)}.$$

Analogiškai

$$B_2C_2 : B_3C_3 = AC_2 : AC_3 = 1 : 2, \quad B_2C_2 = \frac{1}{2} B_3C_3 = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \text{ (cm)}.$$

Vadinasi, nuspalvintos stačiosios trapecijos $B_1C_1C_2B_2$ plotas lygus

$$\frac{(B_1C_1 + B_2C_2) \cdot C_1C_2}{2} = \frac{\left(\frac{3}{2} + 4\right) \cdot 5}{2} = \frac{\frac{11}{2} \cdot 5}{2} = \frac{55}{4} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

!! Pažymėkime taškus, kaip parodyta ! dalies paveikslėlyje. Statieji trikampiai AB_1C_1 , AB_2C_2 ir AB_3C_3 yra panašieji (turi bendrą smailųjį kampą). Remiantis šių trikampių horizontaliųjų statinių ilgių santykiais, trikampių AB_1C_1 ir AB_3C_3 bei AB_2C_2 ir AB_3C_3 panašumo koeficientai atitinkamai lygūs $k_1 = \frac{3}{3+5+8} = \frac{3}{16}$ ir $k_2 = \frac{3+5}{3+5+8} = \frac{1}{2}$. Trikampių AB_3C_3 , AB_1C_1 ir AB_2C_2 plotai atitinkamai lygūs

$$S_3 = \frac{AC_3 \cdot B_3C_3}{2} = \frac{(3+5+8) \cdot 8}{2} = 64 \text{ (cm}^2\text{)},$$

$$S_1 = k_1^2 S_3 = \frac{9}{4} \text{ (cm}^2\text{)}, \quad S_2 = k_2^2 S_3 = 16 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Nuspalvintos trapezijos $B_1C_1C_2B_2$ plotas lygus $S_2 - S_1 = \frac{55}{4} \text{ cm}^2$.

19. (E) 4

! Bokšteliui, iš kurių Kajus sudėjo naująjį bokštą, sudarė po tris detales. Juos Kajui vis nuimant nuo pradinio bokšto, viršutinė bokšteliui detalė visada pažymėta skaičiaus 3 kartotiniu: 90, 87, 84, ..., 6, 3. Tarp šių skaičių yra skaičiai 39 ir 42. Kajus pirmiau perkėlė bokštelį, kurio detalės pažymėtos skaičiais 42, 41, 40, o tada tiesiai ant jo uždėjo bokštelį, kurio detalės pažymėtos skaičiais 39, 38, 37 (žr. pav.). Vadinasi, Kajaus sudėtame bokšte detalės 39 ir 40 skiria **keturias** detales 38, 37, 42, 41.

39
38
37
42
41
40

20. (E) Kitas atsakymas

! Piramidės dviejų briaunų nežinomus ilgius pažymėkime x ir y , kaip parodyta paveikslėlyje. Čia x ir y yra natūralieji skaičiai. Turime rasti $x + y$.

Prisiminkime Trikampio nelygybę: jei trikampio kraštinių ilgių yra a , b , c , tai $a + b > c$, $b + c > a$ ir $c + a > b$. Duotosios piramidės keturios sienos yra trikampiai, ir jiems galioja po tris nelygybes. Taigi galėtume užrašyti $4 \cdot 3 = 12$ tokių nelygybių. Tačiau mums naudingos bus tik kai kurios iš jų.

Trikampio nelygybę pritaikykime dviem trikampiams, kurių kraštinių ilgių atitinkamai yra 3, 4, x ir 2, 7, y :

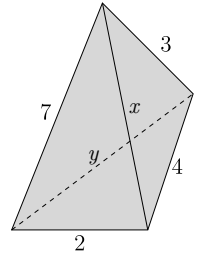
$$3 + 4 > x, \quad 2 + x > 7.$$

Taigi $3 + 4 > x > 7 - 2$ ir $7 > x > 5$. Kadangi skaičius x sveikasis, tai $x = 6$. Analogiškai galime rasti y , užrašę po nelygybę trikampiams, kurių kraštinių ilgių atitinkamai yra 2, 4, y ir 3, 7, y :

$$2 + 4 > y, \quad 3 + y > 7.$$

Taigi $2 + 4 > y > 7 - 3$ ir $6 > y > 4$. Kadangi skaičius y sveikasis, tai $y = 5$.

Vadinasi, $x + y = 6 + 5 = 11$.



21. © 2

! Taisyklė, pagal kurią Roma taria skaičius, leidžia vienareikšmiškai nustatyti kiekvieną naują skaičių, turint ankstesnius. Tad pratęskime skaičių seką:

$$2, 0, 2, 3, 1, 4, 0, 2, 3, 1, \dots$$

Čia, pavyzdžiui, 6-asis skaičius yra mažiausias neneigiamas skaičius, nelygus 0, 2, 3, 1, taigi jis lygus 4. O 8-asis skaičius yra mažiausias neneigiamas skaičius, nelygus 3, 1, 4, 0, taigi jis lygus 2. Toliau sekos nebetęskime, bet pastebėkime, kad paskutiniai keturi gauti skaičiai atkartoja keturis ankstesnius: 7-asis sutampa su 2-uoju, 8-asis – su 3-uoju, 9-asis – su 4-uoju, o 10-asis – su 5-uoju. Kadangi 11-asis skaičius priklauso tik nuo šių keturių skaičių, tai jis sutampa su 6-uoju, toliau analogiškai 12-asis skaičius sutampa su 7-uoju, 13-asis – su 8-uoju, ir t. t. Kitaip tariant, Romos skaičių seka yra periodinė: skaičiai kartojasi kas penkis, nuo antrojo sekos nario vis pasikartojant sekos fragmentui 0, 2, 3, 1, 4.

Vadinasi, 2023-iasis sekos skaičius sutampa su sekos nariais, kurių eilės numeriai yra $2023 - 5 = 2018$, $2018 - 5 = 2013$ ir t. t. Vis atimdami po 5, iš 2023 galime atimti skaičiaus 5 kartotinį 2020 bei gauti sekos nario eilės numerį 3. Vadinasi, 2023-iasis sekos skaičius sutampa su jos 3-uoju skaičiumi 2.

22. © 6

! Kuo mažesni penki duotieji pirminiai skaičiai, tuo mažesnė jų suma s ir tuo mažesnis vidurkis $a = \frac{s}{5}$. Tad natūralu patikrinti, ar uždavinio sąlygos netenkina penki mažiausi pirminiai skaičiai 2, 3, 5, 7, 11. Tačiau jų suma 28 nesidalija iš 5, todėl jų vidurkis nėra natūralusis skaičius.

Nors iš pirmo karto nepavyko atspėti tinkamo pirminių skaičių penketo, bet sužinojome, jog $s \geq 28$. Kadangi $s = 5a$ dalijasi iš 5, tai $s \geq 30$ ir $a \geq \frac{30}{5} = 6$. Kita vertus, nesunku pastebėti, jog reikšmė $a = 6$ yra galima. Kad ją gautume, tiesiog skaičių penkete 2, 3, 5, 7, 11 skaičių 11 pakeiskime taip pat pirminiu skaičiumi 13. Tada penkių skirtingų pirminių skaičių suma 28 padidės 2, ir gausime $s = 28 + 2 = 30$ bei $a = 6$. Vadinasi, tai ir yra mažiausia galima a reikšmė.

23. **(D)** 11

! Kengūras ir bebrus atitinkamai žymėkime K ir B. Susėdę kino teatre, persirengėliai išsirikiavo tam tikra seka:

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_{23}.$$

Čia kiekvienas X_i lygus K arba B.

Nagrinėkime bet kuriuos keturis greta vienas kito sėdinčius persirengėlius $X_i, X_{i+1}, X_{i+2}, X_{i+3}$. Bent vienas iš persirengėlių X_i ir X_{i+2} , sėdinčių šalia X_{i+1} , turi būti kengūra. Taip pat bent vienas iš persirengėlių X_{i+1} ir X_{i+3} , sėdinčių šalia X_{i+2} , turi būti kengūra. Vadinasi, tarp bet kurių keturių tokių persirengėlių yra mažiausiai dvi kengūros.

Nagrinėkime persirengėlius X_1, X_2, X_3 . Šalia X_1 sėdi vienintelis persirengėlis X_2 , todėl $X_2 = K$. Be to, bent vienas iš persirengėlių X_1 ir X_3 , sėdinčių šalia X_2 , turi būti kengūra. Vadinasi, tarp šių trijų persirengėlių yra mažiausiai dvi kengūros.

Sugrupuokime persirengėlius į vieną trejetą (X_1, X_2, X_3) ir 5 ketvertus

$$(X_4, X_5, X_6, X_7), \quad (X_8, X_9, X_{10}, X_{11}), \quad \dots, \quad (X_{20}, X_{21}, X_{22}, X_{23}).$$

Turime 6 persirengėlių grupes, kuriose yra bent po dvi kengūras. Taigi kengūrų yra ne mažiau nei $2 \cdot 6 = 12$, o bebrų – ne daugiau nei $23 - 12 = 11$.

Kita vertus, tarp persirengėlių gali būti 11 bebrų. Tai galima pagrįsti pavyzdžiu, kurį sugalvoti padeda jau turimi pastebėjimai. Persirengėliai galėjo susėsti eilėje bebrų ir kengūrų poromis, kad šios poros kaitaliotųsi:

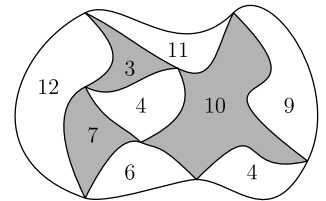
$$K \ K \ B \ B \ K \ K \ B \ B \ K \ K \ B \ B \ K \ K \ B \ B \ K \ K \ B \ B \ K \ K \ B$$

Čia visos kengūros sėdi poromis, todėl šalia kiekvienos kengūros sėdi kengūra. Bet kuri gretimų bebrų pora sėdi tarp dviejų kengūrų, tad kiekvienas iš šių bebrų sėdi šalia kengūros. Kengūra sėdi ir šalia vienintelio bebro, neturinčio poros. Taigi šis pavyzdys tenkina uždavinio sąlygą.

Vadinasi, didžiausias galimas persirengėlių bebrų skaičius lygus 11.

24. **(B)** 26 km

! Parko poilsio zonas riboja paveikslėlyje pavaizduotos linijos: vienos iš jų yra parko viduje, o likusios sudaro parko kraštą, kurio ilgį kilometrais – ieškomą parko perimetrą – pažymėkime x . Parko viduje esančių linijų bendrą ilgį kilometrais pažymėkime y .



Tris parko poilsio zonas nuspelvinkime (žr. pav.). Šias tris zonas ribojančios linijos – tai visos linijos, esančios parko viduje. Be to, jokias dvi iš nuspelvintų zonų ribojančios linijos neturi bendros atkarpos. Todėl visų šių linijų bendras ilgis y lygus trijų zonų perimetrų sumai $3 + 7 + 10 = 20$ (km).

Dabar nagrinėkime parko likusias 6 poilsio zonas. Jas ribojančios linijos – tai visos parko zonas ribojančios linijos, tiek parko viduje esančios, tiek parko kraštą sudarančios. Vėlgi, jokias dvi iš 6 zonų ribojančios linijos neturi bendros atkarpos. Todėl visų linijų – tiek esančių parko viduje, tiek sudarančių parko kraštą – bendras ilgis $x + y$ lygus 6 zonų perimetrų sumai $4 + 6 + 4 + 9 + 11 + 12 = 46$ (km).

Vadinasi, parko perimetras lygus $(x + y) - y = 46 - 20 = 26$ (km).

25. © 273

! Reikia nustatyti, kiek skaičius $a = 2^{20} \cdot 3^{23}$ turi teigiamų daliklių, kurie nėra skaičiaus $b = 2^{10} \cdot 3^{20}$ teigiami dalikliai.

Skaičiaus a teigiami dalikliai yra skaičiai

$$2^x \cdot 3^y, \text{ kur } x = 0, 1, 2, \dots, 20, \quad y = 0, 1, 2, \dots, 23.$$

Čia vieną iš skaičiaus x reikšmių ir vieną iš skaičiaus y reikšmių galima pasirinkti laisvai. Tų reikšmių yra atitinkamai 21 ir 24, todėl a turi $21 \cdot 24$ teigiamų daliklių.

Skaičiaus b teigiami dalikliai yra skaičiai

$$2^x \cdot 3^y, \text{ kur } x = 0, 1, 2, \dots, 10, \quad y = 0, 1, 2, \dots, 20.$$

Čia x ir y reikšmių yra atitinkamai po 11 ir 21, tad b turi $11 \cdot 21$ teigiamų daliklių. Kiekvienas iš jų yra ir skaičiaus a teigiamas daliklis. Vadinasi, skaičiaus a teigiamų daliklių, kurie nėra skaičiaus b teigiami dalikliai, yra

$$21 \cdot 24 - 11 \cdot 21 = 21 \cdot (24 - 11) = 21 \cdot 13 = 21 \cdot 10 + 21 \cdot 3 = 210 + 63 = 273.$$

26. D 16 val.

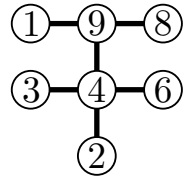
! Tarkime, kad Laimio kelionė truko $3x$ valandų. Tada Laimis telefoną naudojo skambučiams x val. Pilnas telefono įkrovimas taip būtų išseikvotas per 32 val., todėl Laimis skambučiais išseikvojo šio įkrovimo $\frac{x}{32}$ dalį. Analogiškai gauname, kad jis išseikvojo dar dvi dalis, nusakomas skaičiais $\frac{x}{20}$ ir $\frac{x}{80}$. Laimis kelionėje iškrovė iki pusės įkrautą telefoną, taigi išseikvojo pilno įkrovimo dalį, nusakomą skaičiumi $\frac{1}{2}$. Liko sudaryti ir išspręsti lygtį:

$$\frac{x}{32} + \frac{x}{20} + \frac{x}{80} = \frac{1}{2}, \quad | \cdot 160$$

$$5x + 8x + 2x = 80, \quad 15x = 80, \quad 3x = 80 : 5 = 16 \text{ (val.)}$$

27. (A) 2

? Dainos apskaičiuotų sandaugų reikšmę pažymėkime P , o ieškomą apatinio skritulio skaičių pažymėkime x . Norint pasirinkti tinkamą atsakymą, pakanka sugalvoti bent vieną tinkamą skaičių surašymą skrituliuose. Tačiau ir taip spėjiojant, verta pasiremti naudingais pastebėjimais.



Visų pirma, tarp skaičių 1, 2, 3, ..., 9 yra vienintelis skaičius, dalus iš pirminio skaičiaus 7, – pats skaičius 7. Jei jis būtų įrašytas viename iš skritulių, tai viena iš trijų Dainos apskaičiuotų sandaugų dalytųsi iš 7. Visos trys sandaugos lygios, todėl visos trys turėtų dalytis iš 7, o visos trys atkarpos turėtų kirsti skritulį, kuriame įrašytas skaičius 7. Tačiau visos trys atkarpos jokio skritulio nekerta, todėl skaičiaus 7 tarp įrašytųjų nėra. Analogiškai atmetamas ir skaičius 5.

Vadinasi, 7 skrituliuose įrašyti likę 7 skaičiai 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9. Jie visi yra skaičiaus P dalikliai. Jei trys skaičiai kurioje nors atkarpoje yra 1, a , b , tai $P = 1 \cdot a \cdot b \leq 1 \cdot 8 \cdot 9 = 72$. Kita vertus, skaičius P dalijasi iš 8 ir iš 9, todėl ir iš $8 \cdot 9 = 72$. Vadinasi, $P = 72$, o vienoje atkarpoje su skaičiumi 1 tegali būti skaičiai 8 ir 9 (kitai $P = 1 \cdot a \cdot b < 72$). Kadangi $P = 72$, tai su skaičiumi 9 vienoje atkarpoje gali būti skaičiai 1 ir 8 arba skaičiai 2 ir 4, o su skaičiumi 3 – tik skaičiai 4 ir 6.

Galima gauti daugiau įvairių pastebėjimų ir juos naudojant atspėti skaičių surašymo skrituliuose pavyzdį. Vienas iš jų parodytas paveikslėlyje.

Renkamės atsakymą **A**.

! Dainos apskaičiuotų sandaugų reikšmę pažymėkime P , o ieškomą apatinio skritulio skaičių pažymėkime x . Galima įrodyti, kad 7 skrituliuose įrašyti 7 skaičiai 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9. Tuo įsitikinome ? dalyje.

Kiekvienos iš dviejų horizontalių atkarpų skaičių sandauga lygi P , todėl šių atkarpų visų 6 skaičių sandauga lygi P^2 , o visų 7 skaičių skrituliuose sandauga lygi

$$xP^2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 = 2^7 \cdot 3^4.$$

Padalijus $2^7 \cdot 3^4$ iš x , gaunamas sveikojo skaičiaus kvadratas. Taigi $x = 2^a \cdot 3^b$, kur a ir b yra neigiami sveikieji skaičiai, o skaičiuje $2^7 \cdot 3^4 : x = 2^{7-a} \cdot 3^{4-b}$ rodikliai $7-a$ ir $4-b$ yra abu lyginiai. Tinka tik $x = 2 = 2^1 \cdot 3^0$ ir $x = 8 = 2^3 \cdot 3^0$. Pastaruoju atveju $P = \sqrt{2^7 \cdot 3^4 : 8} = 2^2 \cdot 3^2 = 36$. Tačiau viename iš skritulių įrašytas skaičius 8, todėl P yra šio bei dar dviejų natūraliųjų skaičių sandauga ir dalijasi iš 8. Vadinasi, vienintelė galima x reikšmė yra 2. (Skaičių surašymo skrituliuose pavyzdys pateiktas ? dalyje.)

28. (B) 20

! Tarkime, kad triženklis skaičius $n = \overline{ABC}$ tenkina uždavinio sąlygą: skaičius

$$\overline{ABC} - (A + B + C) = 100A + 10B + C - (A + B + C) = 99A + 9B$$

lygus triženkliai skaičiui $\overline{DDD} = 111D$. Tada $9 \cdot (11A + B) = 111D$ dalijasi iš $9 = 3 \cdot 3$, o $111D : 3 = 37D$ dalijasi iš 3. Kadangi skaičius 37 nesidalija iš pirminio skaičiaus 3, tai iš 3 dalijasi skaičius D . Čia $1 \leq D \leq 9$, todėl $D = 3, 6$ arba 9 .

Tegu $D = 3$. Tada $11A + B = 3 \cdot 111 : 9 = 37$. Jei $A < 3$, tai $11A + B \leq 11 \cdot 2 + 9 < 37$, o jei $A > 3$, tai $11A + B \geq 11 \cdot 4 > 37$. Taigi $A = 3$ ir $B = 37 - 11A = 4$. Iš tiesų kiekvienas skaičius $\overline{34C}$, kur $C = 0, 1, 2, \dots, 9$, tenkina uždavinio sąlygą: $\overline{34C} - (3 + 4 + C) = 340 - 7 = 333$.

Tegu $D = 6$. Tada $11A + B = 6 \cdot 111 : 9 = 37 \cdot 2 = 74$. Jei $A < 6$, tai $11A + B \leq 11 \cdot 5 + 9 < 74$, o jei $A > 6$, tai $11A + B \geq 11 \cdot 7 > 74$. Taigi $A = 6$ ir $B = 74 - 11A = 8$. Iš tiesų kiekvienas skaičius $\overline{68C}$, kur $C = 0, 1, 2, \dots, 9$, tenkina uždavinio sąlygą: $\overline{68C} - (6 + 8 + C) = 680 - 14 = 666$.

Kai $D = 3$ ir $D = 6$, gavome po 10 tinkamų n reikšmių. Likęs atvejis $D = 9$ yra negalimas, nes

$$9 \cdot (11A + B) \leq 9 \cdot (11 \cdot 9 + 9) < 9 \cdot 111 = 999.$$

Vadinasi, iš viso yra 20 tinkamų n reikšmių.

!! Tarkime, kad skaičius $n = \overline{ABC}$ tenkina uždavinio sąlygą:

$$n - (A + B + C) = \overline{DDD}.$$

Pasinaudokime tokiu teiginiu: kiekvieno natūraliojo skaičiaus skaitmenų suma dalijasi iš 9 su ta pačia liekana kaip pats skaičius. Taigi n dalijasi iš 9 su ta pačia liekana kaip $A + B + C$, o skaičius $n - (A + B + C) = \overline{DDD}$ dalijasi iš 9 su liekana 0. Tada šio skaičiaus skaitmenų suma $3D$ dalijasi iš 9, o skaičius D dalijasi iš 3. Kadangi $1 \leq D \leq 9$, tai $D = 3, 6$ arba 9 .

Pastebėkime, kad skaičius $A + B + C$ yra tarp skaičių $1 + 0 + 0 = 1$ ir $9 + 9 + 9 = 27$. Todėl $n = \overline{DDD} + (A + B + C)$ yra tarp skaičių $\overline{DDD} + 1$ ir $\overline{DDD} + 27$. Jei $D = 9$, tai skaičius $n \geq 999 + 1$ nėra triženklis. Taigi arba $D = 3$ ir $334 \leq n \leq 360$, arba $D = 6$ ir $667 \leq n \leq 693$. Pirmuoju atveju $A = 3$, o skaičius

$$333 = \overline{3BC} - (3 + B + C) = \overline{3B0} - (3 + B)$$

baigiasi skaitmeniu 3, todėl $B = 4$. Antruoju atveju analogiškai skaičius $\overline{6B0} - (6 + B)$ baigiasi skaitmeniu 6, todėl $B = 8$.

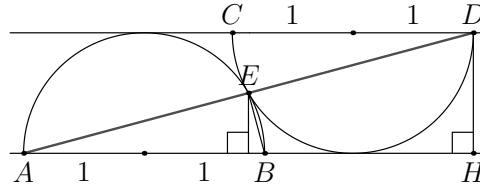
Visi 20 likusių skaičių $\overline{34C}$ ir $\overline{68C}$, kur $C = 0, 1, 2, \dots, 9$, tinka:

$$\overline{34C} - (3 + 4 + C) = 340 - 7 = 333, \quad \overline{68C} - (6 + 8 + C) = 680 - 14 = 666.$$

Vadinasi, yra 20 tinkamų n reikšmių.

29. **(B)** $8 + 4\sqrt{3}$

? Pusapskritimių skersmenų ilgiai lygūs 2, todėl spindulių ilgiai lygūs 1. Pusapskritimių lietimosi tašką pažymėkime E . Iš D į tiesę AB nuleiskime statmenį DH (žr. pav.). Pažymėkime $AD = 2x$.



Galima nuspėti pusapskritimių simetriją taško E atžvilgiu, o kartu tai, kad E yra atkarpoje AD per vidurį tarp A ir D bei per vidurį tarp lygiagrečių tiesių AB ir CD . Taigi $AE = AD : 2 = x$, o atstumas h nuo E iki tiesės AB lygus pusei atstumo tarp tiesių AB ir CD – pusei pusapskritimio spindulio ilgio 1. Tada trikampio ABE plotas S lygus $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Kita vertus, kadangi $\angle AEB = 90^\circ$ (įbrėžtinis kampas remiasi į skersmenį AB), tai

$$\frac{1}{2} = S = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot x \cdot BE, \quad BE = \frac{1}{x}.$$

Lygybę $BE = \frac{1}{x}$ galima gauti ir pasirinkus trikampių ADH bei ABE panašumą (statieji trikampiai turi bendrą smailųjį kampą): $AD : DH = AB : BE$, taigi $2x : 1 = 2 : BE$.

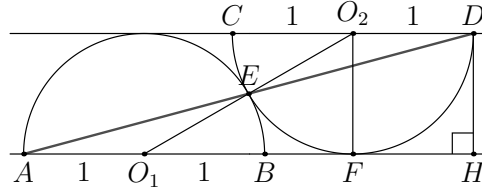
Pritaikykime Pitagoro teoremą stačiajam trikampiui ABE :

$$4 = AB^2 = AE^2 + BE^2 = x^2 + x^{-2} = y + y^{-1}, \text{ kur } y = x^2;$$

$$y - 4 + y^{-1} = 0, \quad y^2 - 4y + 1 = 0, \quad y = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Vadinasi, $AD^2 = 4x^2 = 4y = 8 \pm 4\sqrt{3}$. Atsakymo $8 - 4\sqrt{3}$ tarp pateiktųjų nėra, tad renkamės atsakymą **B)** $8 + 4\sqrt{3}$.

! Pusapskritimių skersmenų ilgiai lygūs 2, todėl spindulių ilgiai lygūs 1. Atkarpų AB ir CD vidurio taškus (pusapskritimių centrus) pažymėkime atitinkamai O_1 ir O_2 . Pusapskritimių lietimosi tašką ir vieno iš pusapskritimių lietimosi su tiese AB tašką pažymėkime atitinkamai E ir F . Iš D į tiesę AB nuleiskime statmenį DH :



Pusapskritimių spinduliai O_1E ir O_2E abu yra statmeni pusapskritimių bendrai liestinei taške E , todėl taškai O_1 , E , O_2 yra vienoje tiesėje. Taigi $O_1O_2 = O_1E + O_2E = 1 + 1 = 2$. Pusapskritimio spindulys O_2F statmenas šio pusapskritimio liestinei AB , todėl atstumas tarp lygiagrečių tiesių AB ir CD lygus $O_2F = 1$. Atkarpos DH ir O_2F yra statmenos tiesei AB , taigi ir tiesei CD . Tada keturkampis O_2DHF yra stačiakampis, $DH = O_2F = 1$ ir $FH = O_2D = 1$.

Pritaikykime Pitagoro teoremą statiesiems trikampiams O_1O_2F ir ADH :

$$O_1F^2 = O_1O_2^2 - O_2F^2 = 2^2 - 1^2 = 3, \quad O_1F = \sqrt{3},$$

$$AD^2 = AH^2 + DH^2 = (AO_1 + O_1F + FH)^2 + 1^2 = (1 + \sqrt{3} + 1)^2 + 1 = 8 + 4\sqrt{3}.$$

30. **A** 6^4

? *Taip pat žr. panašų Senjoro grupės 13 uždavinį.*

Tarkime, kad turime kelių sveikųjų skaičių sumą. Jei prie bet kurio dėmens pridėsime arba atimsime skaičiaus 3 kartotinį, tai per skaičiaus 3 kartotinį pakeisime ir visą sumą, taigi nepakeisime sumos dalybos iš 3 liekanos. Pavyzdžiui, dėmenį 4 tokioje sumoje galima būtų pakeisti skaičiumi 1 arba 7 – nuo to sumos dalybos iš 3 liekana nesikeistų.

Tarkime, kad skaičiai 1, 2, 3, ..., 9 įrašyti langeliuose reikiamu būdu. Skaičiai 1, 4 ir 7 dalijasi iš 3 su ta pačia liekana 1 (skiriasi vienas nuo kito per skaičiaus 3 kartotinį). Todėl šiuos tris skaičius langeliuose bet kaip keisdami vietomis, vis tiek gausime tinkamus skaičių 1, 2, 3, ..., 9 surašymus – visos trijų gretimų skaičių sumos ir toliau dalijasi iš 3. Analogiškai galime keisti vietomis skaičius 2, 5, 8 bei skaičius 3, 6, 9. Vadinasi, tinkamai surašyti 9 skaičius langeliuose reiškia tinkamai suskirstyti 9 langelius į tris trejetus – po vieną trejetą skaičiams 1, 4, 7, skaičiams 2, 5, 8 ir skaičiams 3, 6, 9. Toliau kiekvienus tris skaičius jiems skirtuose trijuose langeliuose galima surikiuoti bet kokia tvarka.

Langelių tinkamų suskirstymų į tris trejetus skaičių pažymėkime a . Pasirinkus vieną tokį suskirstymą, kiekviename langelių trejete atitinkamus skaičius galima surikiuoti $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ būdais. Todėl skaičius 1, 2, 3, ..., 9 įrašyti langeliuose yra iš viso $a \cdot 6^3$ tinkamų būdų. Teisingas atsakymas dalijasi iš 3^3 , tad galime atmesti atsakymus **C** ir **D**.

Uždavinio sąlygą tenkina skaičių 1, 2, 3, ..., 9 du surašymai langeliuose, kai skaičiai išrikiuojami didėjimo arba mažėjimo tvarka. Šie du surašymai atitinka du skirtingus langelių suskirstymus į tris trejetus: vienu atveju kairysis langelis skirtas skaičiams 1, 4, 7, o kitu – skaičiams 3, 6, 9. Todėl $a \geq 2$, ir netinka atsakymas **B**.

Liko atsakymai **A** ir **E**. Pastarasis būtų teisingas tik tuo atveju, jei visi įmanomi skaičių 1, 2, 3, ..., 9 surašymai langeliuose būtų tinkami. Tačiau uždavinio sąlygos netenkina, pavyzdžiui, joks surašymas, kai pirmieji trys iš kairės skaičiai yra 1, 2, 4.

Renkamės atsakymą **A**.

! Tarkime, kad skaičiai 1, 2, 3, ..., 9 tam tikra tvarka įrašyti langeliuose:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Skaičių $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ dalybos iš 3 liekanas atitinkamai pažymėkime $r_1, r_2, r_3, \dots, r_9$. Kiekviena iš šių liekanų lygi 0, 1 arba 2. Trys liekanos lygios 1 (skaičiai 1, 4, 7), trys lygios 2 (skaičiai 2, 5, 8), o likusios trys lygios 0 (skaičiai 3, 6, 9).

Suma $a_1 + a_2 + a_3$ skiriasi nuo sumos $r_1 + r_2 + r_3$ per skaičiaus 3 kartotinį. Todėl $a_1 + a_2 + a_3$ dalijasi iš 3 tada ir tik tada, kai $r_1 + r_2 + r_3$ dalijasi iš 3. Savo ruožtu $r_1 + r_2 + r_3$ dalijasi iš 3 dviem atvejais: kai r_1, r_2, r_3 yra tam tikra tvarka surikiuoti skaičiai 0, 1, 2 ir kai $r_1 = r_2 = r_3$. T. y. jei skaičiai 1, 2, 3, ..., 9 įrašyti langeliuose reikiamu būdu, tai arba r_1, r_2, r_3 yra trys skirtingi skaičiai, arba trys vienodi skaičiai. Šis pastebėjimas analogiškai galioja skaičių trejetams (r_2, r_3, r_4) , (r_3, r_4, r_5) ir t. t.

Tarkime, kad skaičiai 1, 2, 3, ..., 9 įrašyti langeliuose reikiamu būdu. Jei $r_1 = r_2 = r_3$, tai r_2, r_3, r_4 negali būti trys skirtingi skaičiai. Tada $r_2 = r_3 = r_4 (= r_1)$. Tačiau visos liekanos r_1, r_2, r_3, r_4 negali būti lygios, nes tarp jų yra daugiausiai po tris lygias 0, 1 ir 2. Vadinasi, r_1, r_2, r_3 yra tam tikra tvarka surikiuoti skaičiai 0, 1, 2. Kadangi $r_2 \neq r_3$, tai r_2, r_3, r_4 taip pat turi būti trys skirtingi skaičiai 0, 1, 2. Tada $r_4 = r_1$. Analogiškai $r_5 = r_2, r_6 = r_3$ ir t. t. Tai reiškia, kad seka $r_1, r_2, r_3, \dots, r_9$ gaunama, tam tikra tvarka užrašius skaičius 0, 1, 2, o tada šį sekos fragmentą pakartojus dar du syk.

Taigi kiekvienas tinkamas skaičių 1, 2, 3, ..., 9 surašymas langeliuose gaunamas taip:

- 1) pirmieji trys (iš kairės) langeliai užpildomi vienu iš 6 būdų

0	1	2
1	2	0
0	2	1
2	0	1
1	0	2
2	1	0

o tolimesniuose dviejuose langelių trejetuose pakartojama ta pati trijų skaičių seka;

- 2) trys įrašytieji vienetai bet kuria tvarka pakeičiami skaičiais 1, 4, 7, dvejetai – skaičiais 2, 5, 8, o nuliai – skaičiais 3, 6, 9.

Kiekvienas taip gautas skaičių surašymas langeliuose tinka: liekanų sekoje bet kurių trijų gretimų liekanų suma $r_i + r_{i+1} + r_{i+2}$ dalijasi iš 3, todėl iš 3 dalijasi ir kiekviena suma $a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$. Be to, visi taip gaunami surašymai skirtingi: 1-uoju veiksmu pasirenkama viena iš $a = 6$ galimybių, kuriuose langelių trejetuose atsidurs skaičiai 1, 4, 7; 2, 5, 8; 3, 6, 9; o 2-uoju veiksmu kiekvienas iš trijų skaičių trejetų laisvai išrikiuojamas jam skirtuose langeliuose (po $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ galimybes). Iš viso gauname $6 \cdot 6^3 = 6^4$ būdų tinkamai surašyti skaičius 9 langeliuose.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	A
2	D
3	E
4	D
5	C
6	D
7	D
8	E
9	C
10	A
11	C
12	C
13	D
14	B
15	C
16	B
17	A
18	B
19	E
20	E
21	C
22	E
23	D
24	B
25	C
26	D
27	A
28	B
29	B
30	A