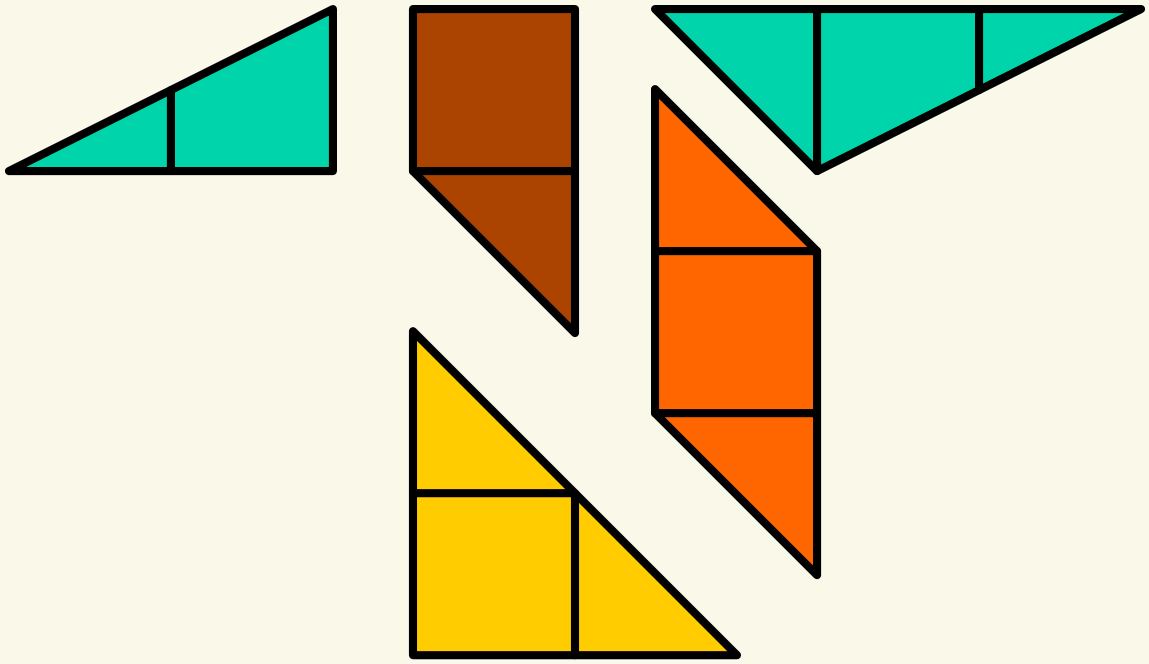
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA

Mažylis

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI



2023

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2023. Mažylis

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Juozas Juvencijus Mačys

Maketavo
Ugnė Gudžinskaitė

© Juozas Juvencijus Mačys, 2024
© *Kengūros* konkurso organizavimo komitetas, 2024

Turinys

Pratarmė **4**

Sąlygos **6**

Užduočių sprendimai **10**

Atsakymai **20**

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 27000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2023 metais. Nors, žinoma, šiais metais viskas dėl tos nelemtos pandemijos atrodė, pakrypo ir klostėsi visiškai kitaip negu iki šiol. Pasitvirtino visiems teoriškai gerai girdėta išmintis, kad karantininis gyvenimas yra pilnas staigmenų ir netikėtumų: konkursas iš trečiojo kovo ketvirtadienio nusikėlė į vėlesnę datą ir vyko nuotoliniu būdu.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo

ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2023 metų kovo 16 dieną keliavo ir gausiai sprendė 3–4 klasių (*Mažylio* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

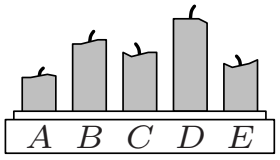
Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

2023 m. *Mažylio* užduočių sąlygos

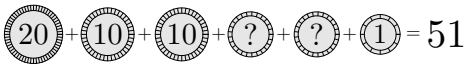
Klausimai po 3 taškus

1. Agnė vienu metu uždegė penkias vienodas žvakes. Jos užgeso skirtingu laiku ir dabar atrodo taip, kaip pavaizduota paveikslėlyje. Kuri žvakė užgeso pirma?



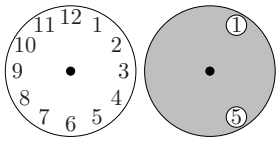
A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

2. Dvi tos pačios vertės monetos pažymėtos klaustuku. Kokia kiekvienos jų vertė?



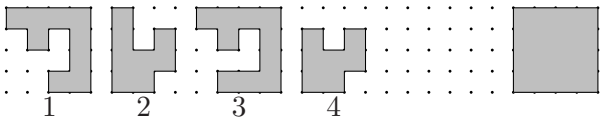
A) 1 **B)** 2 **C)** 5 **D)** 10 **E)** 20

3. Ant laikrodžio uždėtas skritulys, kuriame iškirptos dvi skylės (žr. paveikslėlį). Skritulys sukamas apie savo centrą. Kurios iš išvardytų porų abu skaičius galima pamatyti vienu metu?



A) 4 ir 9 **B)** 5 ir 9 **C)** 5 ir 10 **D)** 6 ir 9 **E)** 7 ir 12

4. Elena turi keturias dėlionės korteles (žr. pav). Iš kurių dviejų kortelių ji gali sudėti kvadratą?

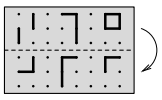


A) 1 ir 2 **B)** 1 ir 3
C) 1 ir 4 **D)** 2 ir 3 **E)** 2 ir 4

5. Tvenkinyje gyvena trys varlės. Kiekvieną vakarą kuri nors iš jų dainuoja kitoms dviem dainelę. Po 9 vakarų paaiškėjo, kad viena iš varlių dainavo 2 kartus, o kita girdėjo 5 daineles. Kelias daineles girdėjo trečioji varlė?

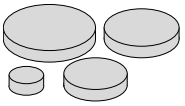
A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

6. Kipras permatomą popierių (žr. pav.) sulenkia per brūkšninę liniją. Ką jis dabar mato?



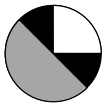
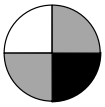
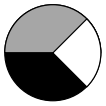
A) **B)** **C)** **D)** **E)**

7. Emilija turi 4 skirtingų dydžių skritulius. Ji nori iš 3 skritulių sustatyti tokį bokštą, kad kiekvienas skritulys būtų mažesnis už skritulį po juo. Kiek skirtingų bokštų gali sustatyti Emilija?



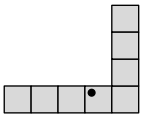
A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

8. Matas ant juodo skritulio užklijavo dvi popierines iškarpas – pilką pusskritulį ir ketvirtį balto skritulio (nebūtinai tokia tvarka). Kurio iš paveikslėlių jis suklijuoti negalėjo?

A) **B)** **C)**  **D)**  **E)** 

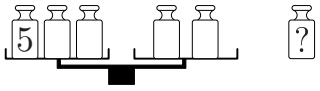
Klausimai po 4 taškus

9. Dešinėje pavaizduota figūra visa uždengta penkiomis žemiau pavaizduotomis iškarpomis. Kuri iškarpa dengia juodąjį skrituliuką?



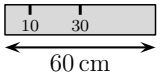
A) **B)** **C)** **D)** **E)**

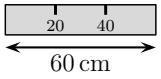
10. Jorė turi šešis svarsčius: 1 kg, 2 kg, 3 kg, 4 kg, 5 kg ir 6 kg. Ji ant svarstyklių padėjo penkis svarsčius (žr. paveikslėlį), ir svarstyklės liko pusiausviros. Kurio svarsčio Jorė nedėjo ant svarstyklių?

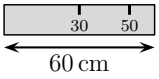


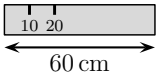
A) 1 kg **B)** 2 kg **C)** 3 kg **D)** 4 kg **E)** Nustatyti neįmanoma

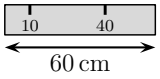
11. Gediminas turi 60 cm ilgio liniuotę, bet daugelis žymių joje nusitrynė. Vis dėlto jis gali iš karto išmatuoti bet kurį iš ilgių 10 cm, 20 cm, 30 cm, 40 cm, 50 cm ir 60 cm. Kuri liniuotė yra Gedimino?

A) 

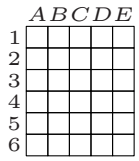
B) 

C) 

D) 

E) 

12. Lentelę sudaro 30 langelių. Liepa užtušavo visų trečios ir šeštos eilučių bei C ir D stulpelių langelius. Keli langeliai liko neužtušuoti?

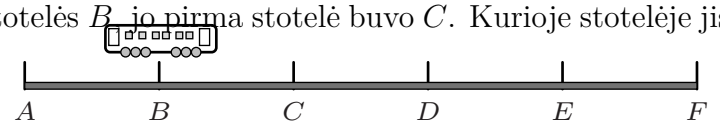


A) 8 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 18 **E)** 22

13. Aštuoniuose automobiliuose yra 19 asmenų. Kiekviename jų yra 2 arba 3 žmonės. Keliuose automobiliuose yra lygiai 2 žmonės?

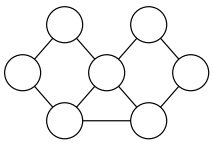
A) 6 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 2

14. Metropoliteno linijoje yra šešios stotelės: A, B, C, D, E ir F. Traukinys stoja kiekvienoje iš jų. Privažiavęs stotelę A arba stotelę F, traukinys keičia važiavimo kryptį. Traukinio mašinistas pradėjo važiuoti iš stotelės B, jo pirma stotelė buvo C. Kurioje stotelėje jis sustos 96-ąjį kartą?



A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

15. Kristina nori visus paveikslėlio skrituliukus nuspalvinti taip, kad kiekvienų dviejų atkarpa sujungtų skrituliukų spalva skirtųsi. Kiek mažiausiai skirtingų spalvų pieštukų Kristinai prireiks?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

16. Duota skaičių lentelė (žr. paveikslėlį). Rūta nori ant jos uždėti tokią iš žemiau pavaizduotų penkialangelių figūrų, kad uždengtųjų skaičių suma būtų didžiausia. Kurią figūrą reikia Rūtai pasirinkti? (Figūrų negalima nei pasukti, nei apversti.)

1	6	7
9	5	4
2	8	3

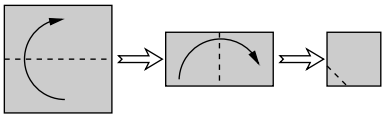
A) **B)** **C)** **D)** **E)**

Klausimai po 5 taškus

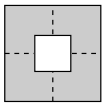
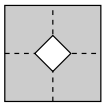
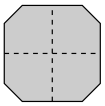
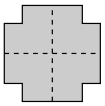
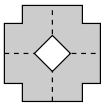
17. Šeši bebrai ir dvi kengūros sunumeruoti ir sustatyti į eilę. Iš trijų paeiliui einančių numerių lygiai vienas yra kengūra.

Koks yra pirmosios iš dviejų kengūrų numeris?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

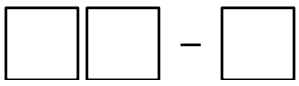
18. Monika sulenkė kvadratinį popieriaus lapą pusiau, užlenkdama apatinę kvadrato pusę ant viršutinės.



Gautąjį stačiakampį ji sulenkė pusiau, užlenkdama kairę jo pusę ant dešinės. Tada nukirpo gautojo kvadrato kairįjį apatinį kampą ir lapą atlankstė. Kokį karpinį gavo Monika?

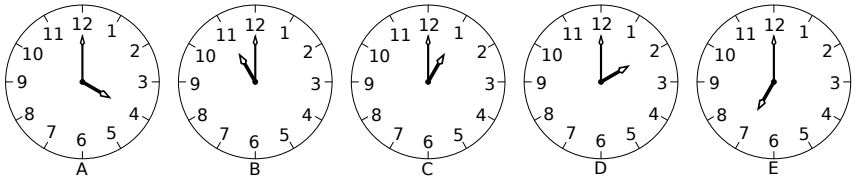
A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

19. Keturiose kortelėse parašyta po skaičių: 1, 1, 2 ir 3. Pasirenkame tris korteles ir padedame jas kaip pavaizduota paveikslėlyje, o tada atliekame atimtį. Kiek skirtingų atimties rezultatų taip galima gauti?



A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 24

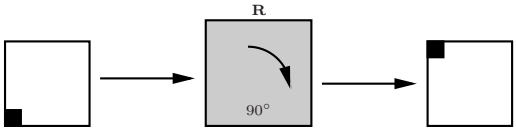
20. Ant sienos kabo penki laikrodžiai. Vienas iš jų skuba trimis valandomis, vienas vėluoja trimis valandomis, vienas rodo teisingą laiką, o dar du sugedę ir nebeina. Kuris laikrodis eina teisingai?



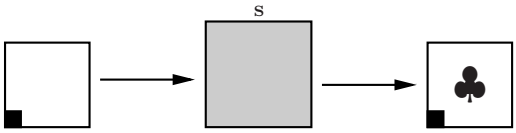
A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

21. Mindaugas ir Ieva turi po 9 kamuoliukus. Kartu jie turi 8 mėlynus ir 10 baltų kamuoliukų. Ieva turi dukart daugiau baltų kamuoliukų nei mėlynų. Kiek baltų kamuoliukų turi Mindaugas?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 0

22. Evaldas turi du įrenginius R ir S. Įrenginys R įdėtą kortelę pasuka ketvirtadaliu pilno apsisukimo, kaip tai parodyta pirmame paveikslėlyje.



Įrenginys S įdėtoje kortelėje atspausdina ženklą ♣.

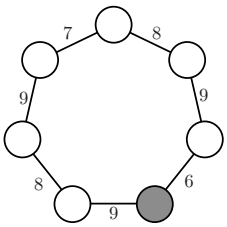


Kokia tvarka Evaldas pasinaudojo savo įrenginiais, jeigu įdėjęs kortelę, pavaizduotą kairėje, gavo kortelę, pavaizduotą dešinėje?

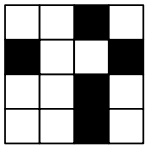
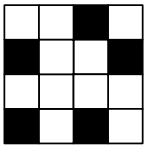
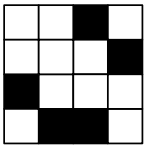
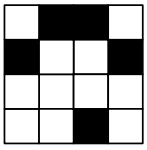
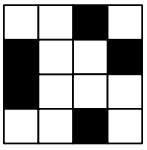
A) SRR **B)** RSR **C)** RSS **D)** RRS **E)** SRS

23. Į skrituliukus reikia įrašyti skaičius nuo 1 iki 7. Atkarpa sujungtuose gretimuose skrituliukuose esančių skaičių suma turi būti lygi skaičiui, parašytam greta tos atkarpos. Kokį skaičių reikia įrašyti į užtušuotąjį skrituliuką?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5



24. Languotoje lentelėje Stasys užtušavo 5 kvadratėlius, parodė gautą paveikslėlį savo penkiems draugams ir paprašė kiekvieną iš jų nupiešti tokį pat paveikslėlį. Peržiūrėjęs tuos paveikslėlius, Stasys pasakė: „Vienas iš jūsų užtušavo langelius teisingai, o likusieji keturi vieną langelį užtušavo klaidingai, o keturis teisingai.“ Kuris iš paveikslėlių sutapo su Stasio paveikslėliu?

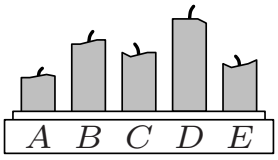
A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

Mažylio užduočių sprendimai

1. Ⓓ *D*

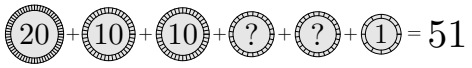
! Ta žvakė, kuri užgeso pirma, degė trumpiausiai, ji nudegė mažiausiai, todėl jos liko daugiausia, ir dabar ji aukščiausia. Tai žvakė *D*.

Teisingas atsakymas **D**.



2. Ⓒ 5

! Klaustuku pažymėtoms dviem monetoms kartu iš bendros sumos lieka $51-20-10-10-1=10$.

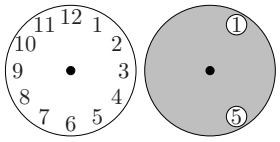


Vadinasi, kiekvienos tų monetų vertė yra $10:2=5$.

Teisingas atsakymas **C**.

3. Ⓑ 5 ir 9

? Tarp 1 ir 5 yra trys skaičiai – trys skaičiai bus ir sukiojant skritulį. **A** atveju tarp 4 ir 9 yra keturi skaičiai: 5, 6, 7 ir 8, – netinka. O štai **B** atveju tarp 5 ir 9 yra 6, 7 ir 8, – trys skaičiai. Renkamės atsakymą **B**.



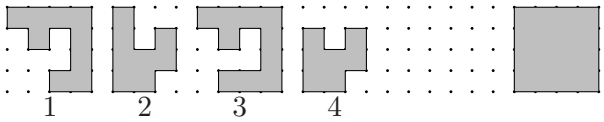
! Kad sprendimas būtų pilnas, tikriname: atveju **C** (tarp 5 ir 10) turime keturis skaičius, atveju **D** – du skaičius, atveju **E** – keturis skaičius. Teisingas tik atsakymas **B**.

!! Kiek rafinuotesnis būtų toks sprendimas. Paveikslėlyje matomų skaičių skirtumas yra $5-1=4$. Kai skritulius kiek pasuksime, turinys ir atėminys padidės tiek pat vienetų, taigi skirtumas liks toks pat. Iš skirtumų $9-4$, $9-5$, $10-5$, $9-6$, $12-7$ tik antrasis lygus 4.

Teisingas atsakymas **B**.

4. (C) 1 ir 4

? Teisingą atsakymą nustatome vien mintyse pabandę priglausti vienas figūrą prie kitos.



Matome, kad pirma ir ketvirta figūros sulimpa į kvadratą. Beje, neblogai sulimpa antra ir trečia figūros, bet gauname ne kvadratą 4×4, o stačiakampį 5×4.

Renkamės atsakymą **C**.

! Galima suskaičiuoti, iš kelių kvadratėlių 1×1 sudėtos figūros: iš 9, 8, 10, 7. Kvadratas turi $4 \cdot 4 = 16$ langelių. Vadinasi, reikia imti 9 ir 7 – pirmą ir ketvirtą figūras.

Skaičiuojant galima ir pasitikrinti, kad gausime kvadratą: stumkime ketvirtą figūrą į kairę ant pirmos figūros, kol kairieji kraštai sutaps. Gautoje figūroje pirmame stulpelyje bus $3 + 1 = 4$ langeliai, antrame $2 + 2 = 4$, trečiame $1 + 2 + 1 = 4$ langeliai, o ketvirtas stulpelis iš 4 langelių liks nepakitęs. Taigi turime kvadratą 4×4.

!! Atmetinėti atsakymus galima ir kitaip. Figūrų apatinės juostelės ilgiai yra 2, 2, 3 ir 2, o kvadrato 4. Todėl iš karto atmetame trečią figūrą: sumą 4 galima gauti tik sudėjus $2 + 2$. Likusių figūrų ketvirtame „aukšte“ yra 4, 1, 4 ir 0 kvadratėlių, taigi 4 surinkti galima tik iš 4 ir 0. Vadinasi, kvadratą sudėti galima nebent iš pirmos ir ketvirtos figūrų. Jau įsitikinome, kad tai padaryti įmanoma.

5. (B) 6

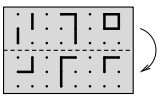
! Kiekvieną iš 9 vakarų kiekviena varlė arba dainavo, arba klausėsi. Pirma varlė dainavo 2 kartus, klausėsi $9 - 2 = 7$ kartus. Antra varlė klausėsi 5 kartus, todėl dainavo $9 - 5 = 4$ kartus. Vadinasi, trečia varlė klausėsi $2 + 4 = 6$ kartus.

Teisingas atsakymas B.

!! Antra varlė klausėsi 5 kartus, todėl trečia dainavo $5 - 2 = 3$ kartus. Vadinasi, trečia klausėsi $9 - 3 = 6$ kartus.

6. (C)

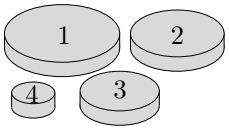
? Paprasčiausia pradėti nuo trečio skaitmens: kvadratėlis atsiduria apačioje, ir gauname 6. Lieka rinktis atsakymą **C**.



! Išsamumo dėlei reikia pasitikrinti, ar tikrai gauname skaitmenis 4 ir 0. Tam užtenka apatinėje pavaizduoto lapo pusėje nubrėžti atkarpas, simetriškas viršutinėms atkarpoms.

Teisingas atsakymas **C**.

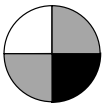
7. Ⓒ 4



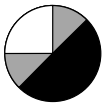
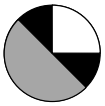
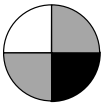
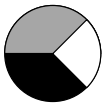
! Sunumeruokime skritulius skersmens mažėjimo tvarka skaičiais 1, 2, 3, 4. Emilija pasirinkti tris skritulius gali taip: $\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}$ – keturi būdai. Kiekvieną kartą, pasirinkus 3 skritulius, bokštą galima statyti vieninteliu būdu – pradedant didžiausiu skrituliu ir baigiant mažiausiu. Taigi pasirinkus skritulius 1, 2 ir 3, bokštas (surašius skritulius nuo apatinio iki viršutinio) bus 123. Kiti bokštai atitinkamai bus 124, 134, 234 – iš viso 4 bokštai.

Teisingas atsakymas **C**.

!! Dar paprasčiau galvoti ne kokius skritulius pasirinkti, o kokių neimti. Kad liktų 3 skrituliai, neimti reikia 1 skritulio. Tai padaryti galima keturiais būdais – kiekvieną kartą atmetant vis kitą skritulį. O kai 3 skrituliai jau pasirinkti, yra tik vienintelis būdas juos sukrauti į bokštą – dedant juos vieną ant kito pradedant didžiausiu ir baigiant mažiausiu.

8. Ⓓ 

? Bandome suklijuoti pavaizduotus paveikslėlius.

A)  **B)** **C)**  **D)**  **E)** 

Paveikslėlį **A** galima suklijuoti visai paprastai: ant juodo skritulio klijuojame pilką pusskritulį, o ant to pilko ties viduriu – baltą ketvirtį.

Paveikslėlyje **B** baltas ketvirtis dalinai uždengtas. Vadinasi, iš pradžių klijuojame baltą ketvirtį, o tada pusę jo uždengiame pilkuoju pusskrituliu.

Atveju **C** iš pradžių užklijuojame pilkąjį pusskritulį, o likusiame juodame pusskritulyje ties viduriu klijuojame baltąjį ketvirtį.

Suklijuoti **D** tarsi nepavyksta – šį atvejį kol kas atidedame.

Paveikslėlio **E** dalis pilkojo pusskritulio uždengta – vadinasi, reikia pradėti nuo jo. Užklijuojame ant juodojo skritulio viršutinės pusės pilkąjį pusskritulį, o tada klijuojame baltą ketvirtį.

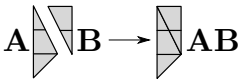
Matyt, **D** suklijuoti neįmanoma. Kadangi *Kengūros* konkurse atsakymas vienintelis, tai renkamės atsakymą **D**.

! Kad sprendimas būtų išsamus, pasiaiškinkime, kodėl neįmanoma suklijuoti paveikslėlio **D**. Jame matome du atskirus pilkus ketvirčius, simetriškus skritulio centro atžvilgiu. O tokių ketvirčių pilkajame pusskritulyje nėra.

Teisingas atsakymas **D**.

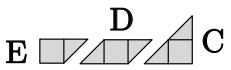
9. (D)

! Aišku, kad iškarpas **A** ir **B** teks šlieti vieną prie kitos (prie kitų nė viena jų netinka):

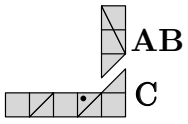


Šią sankliją vadinkime iškarpa **AB**.

Aišku, kad iškarpą **C** galima dėti tik į figūros kampą, t. y. ji dengs langelį skrituliuko dešinėje. Šalia jos į kairę reikia pusės kvadratėlio **D**. Iškarpa **E** tam netinka – nebus ką šlieti prie **E** iš kairės. Taigi tam tinka tik iškarpa **D**, o tada į kairę – iškarpa **E**:



Užbaigti dėlionę paprasta: prie **C** į viršų šliejame iškarpą **AB**:

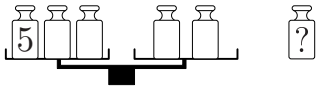


Skrituliuką uždengė iškarpa **D**.

Teisingas atsakymas **D**.

10. (A) 1 kg

? Bandykime atsakymą **A** – atidėtas 1 kg. Tada ant svarstyklių yra $2+3+4+5+6=20$ kg, kairėje 10 kg, vadinasi, čia dar yra du mažiausi svarsčiai 2 kg ir 3 kg (kitaip bus per daug). Dešinėje lieka $4+6$ kg.



Renkamės atsakymą **A**.

! Kadangi svarstyklės pusiausviros, tai lėkštėse vienodas svoris, taigi ant svarstyklių lyginė suma. Visų svarsčių svorių suma $1+2+3+4+5+6=21$ kg – nelyginė ir turi būti atidėtas nelyginis skaičius. Bet ant svarstyklių matome 5, taigi atidėtas 3 arba 1.

Jeigu atidėtas 3, tai ant svarstyklių 18, kiekvienoje lėkštėje 9. Bet tada kairėje $5+1+2=8$ – per mažai, o $5+1+4=10$ – per daug. Vadinasi, atidėti galima tik 1. Tada viskas išeina: ant svarstyklių 20, lėkštėse po 10, kairėje $5+2+3=10$, dešinėje $4+6=10$.

Teisingas atsakymas **A**.

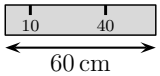
!! Gražiausi sprendimai – kai nespėliojama. Pavyzdžiui, toks.

Kadangi kairėje „didelis“ svarstis 5, tai dešinėje yra 6 – kitaip dešinėje būtų $\leqslant 4+3$, o kairėje $\geqslant 5+1+2$.

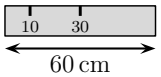
Ant svarstyklių turėsime:

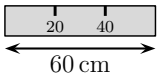
$$\boxed{5}+\square+\square=\boxed{6}+\square$$

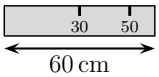
Dešinėje nėra 1 – ten būtų per mažai. Bet svarsčio 1 nėra ir kairėje: tada lėkštėse būtų po 6 kg ir dar po lygų svarstį, o lygių svarsčių neturime. Vadinasi, 1 kg svarstis atidėtas. (Sudėlioti likusius svarsčius pusiausvirai jau mokame.)

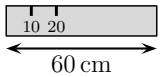
11. Ⓔ 

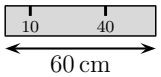
! Imkime liniuotę **A**. Joje yra 10 cm žyma. 20 cm galima išmatuoti žymėmis 10 ir 30: 30−10= 20. Žymė 30 yra. O štai 40 cm išmatuoti nepavyks: liniuotės pradžia („žymė 0“) padeda išmatuoti tik 10 cm, 30 cm ir 60 cm, žymė 10 padeda tik $30-10=20$ cm ir $60-10=50$ cm, nuo žymės 30 į abi puses per mažai gauti 40 cm.

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Panašiai simetrišku atveju **C** neišmatuosime 40 cm. Liniuotės **B** padalos 0, 20, 40, 60, taigi išmatuoti galima tik lyginį dešimčių skaičių (bet ne 10, 30 ar 50 cm). Netinka ir liniuotė **C** – neišmatuosime 30 cm: nuo padalų 10 ar 20 į vieną pusę per mažai, į kitą – per daug.

O štai liniuote **E** viską išmatuoti galima: $20=60-40$, $30=40-10$, $50=60-10$.

Teisingas atsakymas **E**.

12. Ⓒ 12

! Nesunku užtušuoti nurodytus langelius ir suskaičiuoti likusius neužtušuotus. Bet galima tiesiog skaičiuoti.

Jeigu užtušuojame vieną eilutę ir vieną stulpelį, tai užtušuojame ne $5+6=11$ langelių, o tik 10, nes vienas langelis bendras. Galima sakyti kad jį užtušuojame 2 kartus, taigi iš bendro skaičiaus 11 reikia vieną atmesti, $11-1=10$.

Jeigu užtušuojame 2 eilutes ir 2 stulpelius, tai dukart užtušuojame $2\cdot 2=4$ langelius. Vadinasi, užtušuotų langelių bus $2\cdot 5+2\cdot 6-4=18$. Todėl neužtušuotų langelių liks $5\cdot 6-18=12$.

Teisingas atsakymas **C**.

13. Ⓑ 5

! Susodinkime į visus 8 automobilius po 3 žmones – bus susodinti $8\cdot 3=24$ žmonės. Kad liktų automobiliuose 19 asmenų, reikia išsodinti $24-19=5$ asmenis, – po vieną iš 5 automobilių. Tuose 5 automobiliuose ir bus po du žmones.

Teisingas atsakymas **B**.

14. Ⓓ D

! Apvažiavęs „pilną ratą“ $BCDEFEDCBAB$ traukinys 10-ą kartą sustos stotelėje B.

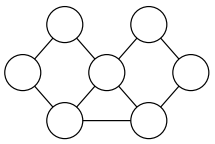
Vadinasi, po 9 ratų jis 90-ą kartą vėl sustos stotelėje B. Dabar jam liko važiuoti 6 stoteles: $CDEFED$. Taigi 96-a stotelė – tai D.

Teisingas atsakymas **D**.

!! Kadangi yra 6 stotelės, tai tarp jų yra 5 tarpai. Vienas ratas – tai 5 tarpai nuvažiuoti pirmyn ir atgal, $5 \cdot 2 = 10$ tarpų. Kas 10 stotelių traukinys važiuoja taip kaip iš pradžių. Vadinasi, jis į 96-ą stotelę pateks kaip ir nuvažiavęs kelią $BCDEFED$.

15. Ⓑ 3

! Aišku, kad keturiems skrituliukams, sudarantiems kvadratą, užtenka dviejų spalvų, pavyzdžiui, R ir M:



O štai trims skrituliukams, sudarantiems trikampį, reikia jau trijų spalvų – R, M, G:

Dabar aišku, kad trijų spalvų Kristinai užteks: iš pradžių ji spalvina apatinį trikampį, o kiekvienam iš kvadratų užtenka kad ir tų dviejų spalvų, kurios jau panaudotos bendrai su trikampiu kraštinėje.

16. Ⓔ

! Didžiausi penki skaičiai lentelėje yra 9, 8, 7, 6, 5, taigi didžiausia penkių skaičių suma yra $9+6+8+7+5 = 15+15+5 = 35$. Išvardytus skaičius galima uždengti figūra **E**.

1	6	7
9	5	4
2	8	3

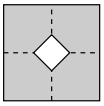
Teisingas atsakymas **E**.

17. Ⓒ 3

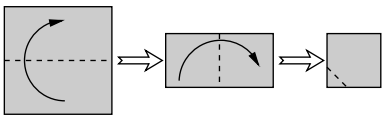
! Jei pirmoji kengūra būtų 2, tai nuo 3 iki 8 stovėtų viena kengūra ir penki bebrai. Kad ir kur būtų antroji kengūra, į vieną pusę nuo jos stovės bent trys bebrai.

Jei pirmoji kengūra 1, tai būtų ne geriau. Pirmoji kengūra negali turėti numerio 4 ar didesnio – iki jos stovėtų bent trys bebrai. Vadinasi, visa viltis – jos numeris 3. Tada prieš ją stovi 2 bebrai, į dešinę – 4 bebrai. Aišku, kad juos galima perskirti po 2, jeigu antra kengūra turės numerį 6.

Taigi pirmosios kengūros numeris 3, teisingas atsakymas **C**.

18. Ⓑ 

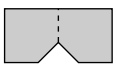
! Aišku, kad dešinysis viršutinis kampas liks nepaliestas, taigi atkrinta atsakymai **C**, **D** ir **E**.



Atkrinta ir atsakymas **A** – kirpimo linija kaip buvo nelygiagreti nei vienai kvadrato kraštinei, taip ir turėjo likti.

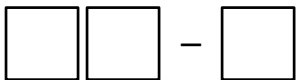
Įsitikinkime, kad atsakymas **B** teisingas. Nukirpus sulankstyto kvadrato kampą, lapas atrodys taip:

Atlenkus pirmą kartą – taip:



Atlenkus antrą kartą, gausime paveikslėlį **B**.

19. Ⓒ 10



! Surašome visus variantus – svarbiausia nė vieno jų nepamesti. Be to, skirtingi variantai gali duoti tą patį atsakymą.

Jei pirma kortelė 1, tai lieka kortelės 1, 2, 3. Antrą kortelę galima pasirinkti 3 būdais, tada trečią – likusiais 2 būdais. Vadinasi, variantų čia $3 \cdot 2 = 6$:

$$11 - 2 = 9$$
$$11 - 3 = 8$$
$$12 - 1 = 11$$
$$12 - 3 = 9$$
$$13 - 1 = 12$$
$$13 - 2 = 11$$

Rezultatą 9 ir rezultatą 11 gavome po du kartus. Taigi turime keturis skirtingus rezultatus: 8, 9, 11, 12.

Jei pirma kortelė 2, tai lieka kortelės 1, 1, 3. Jei antra kortelė 1, tai trečią galima pasirinkti 2 būdais; jei antra 3, tai trečiai lieka 1 būdas. Iš viso čia $2 + 1 = 3$ variantai:

$$21 - 1 = 20$$
$$21 - 3 = 18$$
$$23 - 1 = 22$$

Gavome dar tris naujus rezultatus: 18, 20, 22.

Jei pirma kortelė 3, tai lieka kortelės 1, 1, 2. Vadinasi, čia irgi bus 3 variantai:

$$31 - 1 = 30$$
$$31 - 2 = 29$$
$$32 - 1 = 31$$

Gavome dar tris naujus rezultatus: 28, 29, 30. Iš viso turime dešimt skirtingų rezultatų.

Teisingas atsakymas **C**.

20. (A) A

! Žinome, kad trys laikrodžiai rodo valandas kas trys. Surašykime visas valandas, kurias galima įžiūrėti visuose laikrodžiuose:

1 2 4 7 11 13 14 16 19 23 1 2 4 . . .

Ieškome trejetukų, kurių skaičiai skiriasi 3. Tokių randame tik du: 1, 4, 7 ir 13, 16, 19. Žinoma, tai tie patys laikrodžiai, rodantys laiką priešpiet ir po pietų. Teisingą laiką rodo vidurinis laikrodis (kuris rodo 4 val. ar 16 val.).

Teisingas atsakymas **A**.

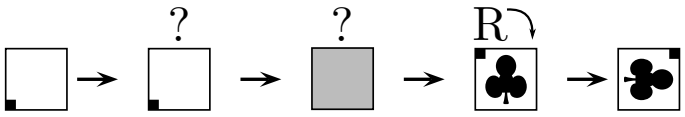
21. (B) 4

! Ieva turi dukart daugiau baltų kamuoliukų nei mėlynų, todėl ji iš viso turi triskart daugiau kamuoliukų nei mėlynų. Kadangi ji iš viso turi 9 kamuoliukus, tai mėlynų ji turi $9 : 3 = 3$ kamuoliukus, o baltų – $9 - 3 = 6$ kamuoliukus. Vadinasi, Mindaugas turi $10 - 6 = 4$ baltus kamuoliukus.

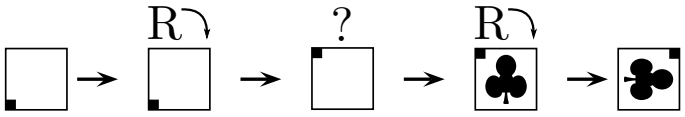
Teisingas atsakymas **B**.

22. (B) RSR

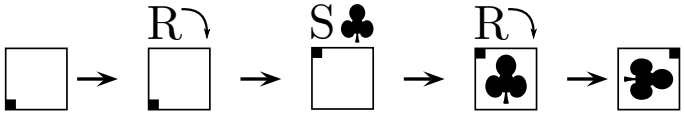
! Paskutiniu panaudotas įrenginys negali būti S, nes ką tik atspausdinta gėlytė būtų nepasukta. Vadinasi, tai įrenginys R, pasukęs kortelę pagal laikrodžio rodyklę. Atsukę kortelę atgal, gauname schemą



Pirmu panaudotas įrenginys negali būti S, nes tada po gėlyte iš kairės būtų juodas kvadratėlis, o jo galų gale ten nėra. Vadinasi, pirmu panaudotas įrenginys buvo R. Mūsų schema dabar atrodys taip:



Dabar visiškai aišku, kad antru panaudotas įrenginys buvo S:



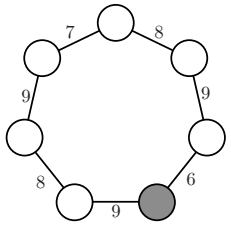
Taigi Evaldas savo įrenginiais pasinaudojo tvarka RSR.

Teisingas atsakymas **B**.

Klausimėlis. Kodėl Evaldo įrenginiai R ir S? Gal jis juos vadina rotatoriumi ir spausdintuvu?

23. Ⓓ 4

? Visai nesunku patikrinti atsakymus. Užtušuotame skrituliuke ne 1 – suma su gretimu būtų mažesnė už 9.



Ne 2 – pagal laikrodžio rodyklę nuo užtušuotojo eitų 7, tada $8-7=1$, tada $9-1=8$, o tokio skaičiaus nėra.

Ne 3 – prieš laikrodžio rodyklę vėl būtų $6-3=3$, o dviejų vienodų nėra.

Ne 5 – prieš laikrodžio rodyklę būtų 4, tada $8-4=4$ – vėl gauname vienodus skaičius skrituliukuose.

Renkamės likusį atsakymą **D** – skaičių 4.

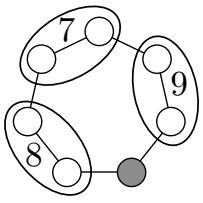
! Kad sprendimas būtų išsamus, tikriname, kaip tada išsidėstę skaičiai. Prieš laikrodžio rodyklę būtų $6-4=2$, $9-2=7$, $8-7=1$, $7-1=6$, $9-6=3$, $8-3=5$, $9-5=4$. Ratas užsidarė, visi skaičiai nuo 1 iki 7 jame po vieną kartą.

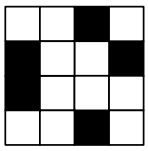
Ir dar: atsakymuose nėra 6 ir 7, bet jie taip pat netinka – per dideli.

Teisingas atsakymas **D**.

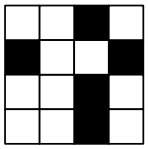
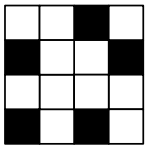
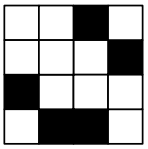
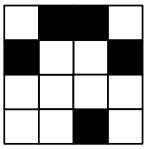
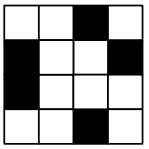
!! Žinoma, paprasčiausia įsivesti nežinomąjį. Jeigu užtušuotame skrituliuke x, tai prieš laikrodžio rodyklę sekantis bus $6-x$, tada $9-(6-x)=3+x$, tada $8-(3+x)=5-x$, tada $7-(5-x)=2+x$, tada $7-x$, ir pagal laikrodžio rodyklę greta užtušuotojo $1+x$, o užtušuotasis $9-(1+x)=8-x$. Turi būti $8-x=x$, taigi $x=4$. Patikrinti, kad 4 tinka, – mokame.

!!! Suporuokime neužtušuotus skrituliukus iš eilės – porų sumas žinome. Nuo užtušuoto skrituliuko pagal laikrodžio rodyklę pirmos skrituliukų poros suma yra 8, kitų dviejų skrituliukų suma – 7, likusių dviejų skrituliukų suma – 9, iš viso $8+7+9=24$. Visų septynių skrituliukų suma yra $1+7+2+6+3+5+4=8+8+8+4=28$, todėl užtušuotame skrituliuke gali būti įrašyta tik $28-24=4$. Kaip įrašyti likusius skaičius – jau žinome iš atsakymo **!**.

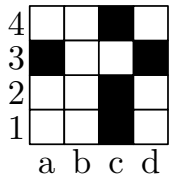


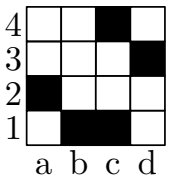
24. Ⓔ 

? Stasio paveikslėlis ne **A**: jei jis būtų teisingas, tai visi kiti skirtųsi nuo jo dviem langeliais.

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

O dabar, pavyzdžiui, **C** nuo **A** skiriasi net keturiais langeliais: a2, a3, b1, c2.

A 

C 

Stasio paveikslėlis ne **C** – matėme, kad **A** nuo jo skiriasi per daug. Stasio paveikslėlis ne **B** – **C** nuo jo skiriasi keturiais langeliais: a1, a2, a3, b1. Stasio paveikslėlis ne **D**, – **C** nuo jo skiriasi keturiais langeliais: a2, a3, b1, b4.

Renkamės likusį atsakymą **E**.

! Kad sprendimas būtų išsamus, reikia patikrinti, ar tikrai visi paveikslėliai nuo **E** skiriasi dviem langeliais.

A nuo **E** skiriasi langeliais a2 ir c2.

B nuo **E** skiriasi langeliais a1 ir a2.

C nuo **E** skiriasi langeliais a3 ir b1.

D nuo **E** skiriasi langeliais a2 ir b4.

Teisingas atsakymas **E**.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	D
2	C
3	B
4	C
5	B
6	C
7	C
8	D
9	D
10	A
11	E
12	C
13	B
14	D
15	B
16	E
17	C
18	B
19	C
20	A
21	B
22	B
23	D
24	E