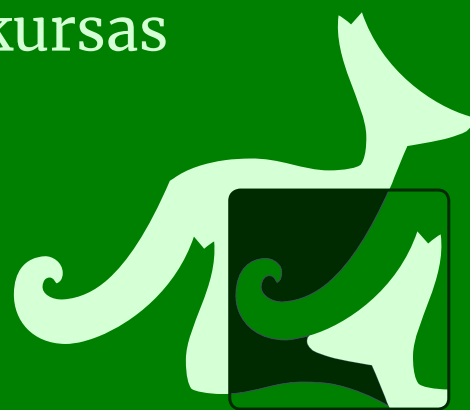


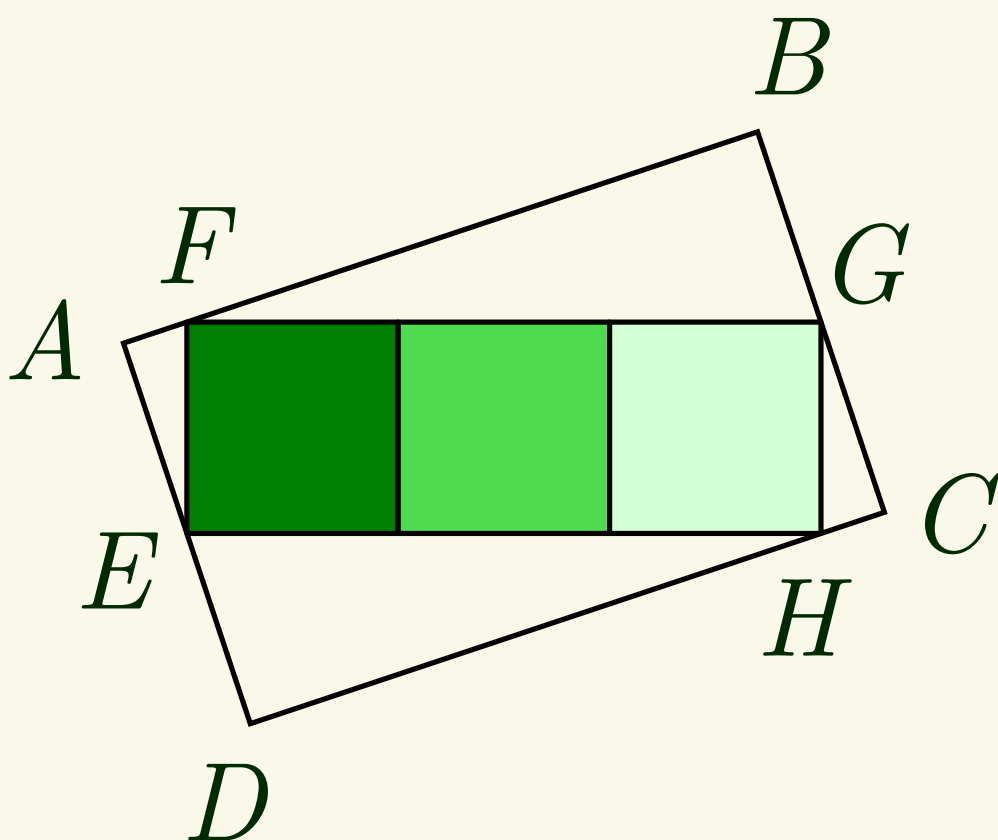
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA



Kadetas

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI



2023

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA



KENGŪRA 2023. Kadetas

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Paulius Drungilas

Redaktorius
Juožas Juvencijus Mačys

Maketavo
Ugnė Gudžinskaitė

Turiny

Pratarmė	4
Sąlygos	6
Užduočių sprendimai	10
Atsakymai	20

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdienišku) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gdynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spęsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 27000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse metais. Nors, žinoma, šiais metais viskas dėl tos nelemtos pandemijos atrodė, pakrypo ir klostėsi visiškai kitaip negu iki šiol. Pasitvirtino visiems teoriškai gerai girdėta išmintis, kad karantininis gyvenimas yra pilnas staigmenų ir netikėtumų: konkursas iš trečiojo kovo ketvirtadienio nusikėlė į vėlesnę datą ir vyko nuotoliniu būdu.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamas, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrantančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo

ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšiuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai atečiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos metų kovo 16 dieną keliauo ir gausiai sprendė 7–8 klasių (*Kadeto* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu !), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu ?). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais ??, !!, !!! ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

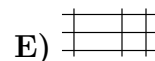
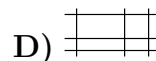
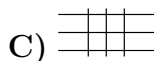
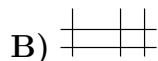
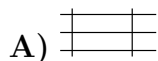
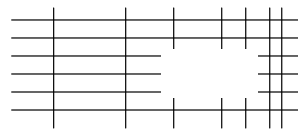
Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

2023 m. *Kadeto* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

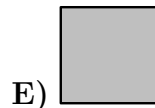
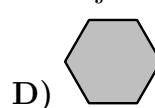
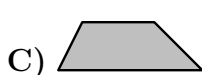
1. Nubrėžtos 6 horizontalios ir 7 vertikalios tiesės. Dalis gautos figūros uždengta baltu stačiakampiu (žr. pav.). Kuriame iš atsakymų pavaizduota uždengtoji figūros dalis?



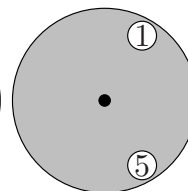
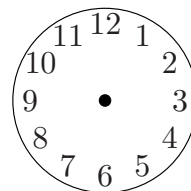
2. Koks yra dalybos $2023 : (2 + 0 + 2 + 3)$ rezultatas?

A) 198 B) 269 C) 179 D) 289 E) 301

3. Kurios iš šių figūrų negalima padalyti į dvi trapecijas viena tiesia linija?



4. Ant laikrodžio ciferblato uždėtas to paties dydžio pilkas skritulys su dviem skylutėmis (žr. pav.). Pilkąjį skritulį pasukus aplink centrą, vienoje iš skylučių atsirado skaičius 8. Koks skaičius galėjo atsirasti kitoje skylutėje?

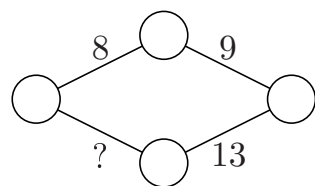


A) 4 arba 12 B) 1 arba 5 C) 1 arba 4 D) 7 arba 11 E) 5 arba 12

5. $(33 + 3333 + 333333 + 33333333) - (3 + 333 + 33333 + 3333333) =$

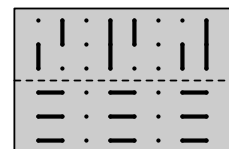
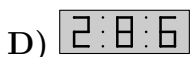
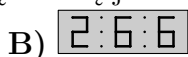
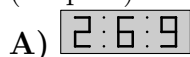
A) 30000000 B) 30303030 C) 36363636 D) 60000000 E) 60606060

6. Gerda kiekvienoje rombo viršūnėje ir prie kiekvienos rombo kraštinės taip parašė po vieną skaičių, kad prie kiekvienos rombo kraštinės parašytas skaičius lygus tos kraštinės galuose parašytų skaičių sumai. Kokį skaičių Gerda parašė prie klaustuku pažymėtos kraštinės?

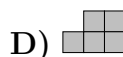
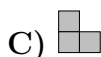
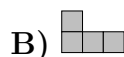
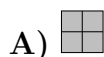


A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

7. Elena perlenkė skaidrią plėvelę išilgai horizontalios punktyrinės linijos (žr. pav.). Kokį vaizdą ji mato?

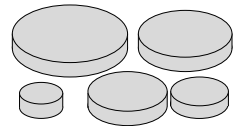


8. Sofija sudėjo 4×6 stačiakampį iš vienodų detalių. Detalės nepersidengia, tarp jų nėra tarpų. Kurios formos detalių Sofija negalėjo panaudoti?



9. Kai Ema pažėrė 150 monetų ant stalo, tai 40% monetų atvirto skaičiumi, o 60% – herbu. Kiek monetų, atvirtusių herbu, reikia apversti, kad monetų, atvirtusių skaičiumi, ir monetų, atvirtusių herbu, būtų po lygiai?
A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

10. Evelina turi penkis skirtingo dydžio diskus, kaip pavaizduota paveikslėlyje. Ji nori iš trijų diskų pastatyti bokštą, kurio kiekvienas diskas būtų mažesnis už tą, ant kurio jis guli. Kiek tokių bokštų Evelina gali pastatyti?
A) 5 B) 6 C) 8 D) 10 E) 15



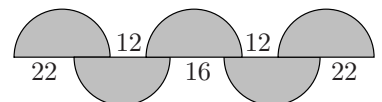
Klausimai po 4 taškus

11. Aštuoni skaičiai 1, 2, 3, ..., 8 po vieną įrašyti 2×4 lentelės langeliuose. Paveikslėlyje parodyti trys iš jų. Keturių skaičių sumos abiejose eilutėse yra lygios. Dviejų skaičių sumos visuose keturiuose stulpeliuose yra lygios. Koks skaičius įrašytas nuspalvintame langelyje?
A) 1 B) 2 C) 5 D) 6 E) 7

	4		
3		8	

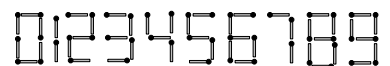
12. Austėja parašė tris iš eilės einančius natūraliuosius skaičius, bet vietoje skaitmenų panaudojo simbolius: $\square\diamond\diamond$, $\heartsuit\triangle\triangle$, $\heartsuit\triangle\square$. Skirtingi simboliai žymi skirtingus skaitmenis, o vienodi simboliai – vienodus skaitmenis. Kam lygus skaičius $\heartsuit\triangle\square + 1$?
A) $\heartsuit\heartsuit\diamond$ B) $\square\heartsuit\square$ C) $\heartsuit\triangle\diamond$ D) $\heartsuit\diamond\square$ E) $\heartsuit\triangle\heartsuit$

13. Paveikslėlyje pavaizduoti penki vienodi pusskrituliai. Nurodyti kelių atkarpų ilgiai. Koks yra kiekvieno pusskritulio spindulio ilgis?
A) 12 B) 16 C) 18 D) 22 E) 36



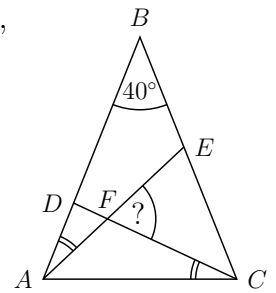
14. Dominykas keletą kubo briaunų nudažė mėlynai. Gauta kubo kiekviena siena turi bent vieną mėlyną kraštinę. Kiek mažiausiai mėlynų briaunų gali turėti toks kubas?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

15. Iš vienodų degtukų skaitmenys dėliojami, kaip parodyta paveikslėlyje. Kiek natūraliųjų skaičių galima gauti tokiu būdu, panaudojant lygiai 6 degtukus?
A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

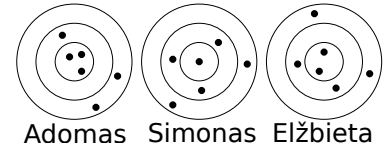


16. Plokštumoje duotas kvadratas, kurio kraštinės ilgis lygus 1. Kiek šioje plokštumoje yra taškų, kurių kiekvieno atstumas iki kurių nors dviejų kvadrato viršūnių lygus 1?
A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

17. Paveikslėlyje pavaizduotas lygiašonis trikampis ABC , kuriame $AB = BC$, $\angle ABC = 40^\circ$ ir $\angle EAB = \angle DCA$. Koks yra kampo CFE didumas?
 A) 55° B) 60° C) 65° D) 70° E) 75°

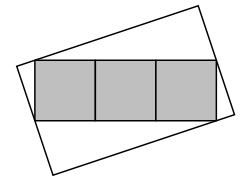


18. Adomas, Simonas ir Elžbieta mėtė strėlytes į taikinį. Kiekvienas į taikinį metė po šešias strėlytes (žr. pav.). Į tą patį taikinio žiedą pataikiusios strėlytės pelno vienodą taškų skaičių. Adomas iš viso surinko 46 taškus, o Simonas 34 taškus. Kiek taškų surinko Elžbieta?



- A) 37 B) 38 C) 39 D) 40 E) 41

19. Balto stačiakampio viduje yra užtušotas stačiakampis, sudėtas iš trijų vienodų kvadratų, kurių kiekvieno plotas lygus 25 (žr. pav.). Dvi užtušoto stačiakampio viršūnės yra baltojo stačiakampio trumpesniųjų kraštinių vidurio taškai, o kitos dvi priklauso baltojo stačiakampio ilgesniosioms kraštinėms. Kam lygus baltojo stačiakampio plotas?



- A) 125 B) 136 C) 149 D) 150 E) 172

20. Kotryna iš vieno plokštumos taško išvedė du tiesių spindulius, sudarančius statųjį kampą. Kiek mažiausiai spindulių ji dar turi išvesti iš šio taško, kad su kiekviena reikšme 10° , 20° , 30° , 40° , 50° , 60° , 70° ir 80° kurie nors du Kotrynos išvesti spinduliai sudarytų atitinkamo didumo kampą?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

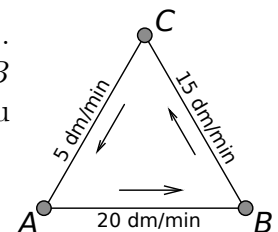
Klausimai po 5 taškus

21. 2023 iš eilės einančių sveikųjų skaičių suma lygi 2023. Didžiausią iš šių skaičių pažymėkime n . Kam lygi skaičiaus n skaitmenų suma?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

22. Lygiakraščio trikampio viršūnėse yra trys skruzdėlynai: A , B ir C (žr. pav.). Skruzdėlė iš skruzdėlynų A į skruzdėlyną B ropojo 20 dm/min greičiu, iš B į C ropojo 15 dm/min greičiu, o iš C į A ropojo 5 dm/min greičiu. Kokiu vidutiniu greičiu, išreikštu dm/min, skruzdėlė nuėjo visą kelią?

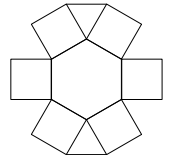
- A) 10 B) $\frac{80}{11}$ C) $\frac{180}{19}$ D) 15 E) $\frac{40}{3}$



23. Dėdė Simas septyniems vaikams – Emai, Adomui, Austėjai, Evelinai, Dominykui, Agotai ir Kotrynai – surengė šachmatų varžybas, kuriose kiekvienas vaikas sužaidė po vieną partiją su kiekvienu kitu vaiku. Pirmadienį Ema sužaidė 1 partiją, Adomas – 2, Austėja – 3, Evelina – 4, Dominykas – 5, o Agota – 6. Kiek partijų tą pirmadienį sužaidė Kotryna?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

24. Devynis skaičius 1, 2, 3, ..., 9 reikia po vieną įrašyti pavaizduotos figūros langeliuose. Du langeliai vadinami gretimais, jei turi bendrą kraštinę. Jokiuose dviejuose gretimuose langeliuose įrašytų skaičių sandauga negali būti didesnė nei 15. Keliais būdais galima užpildyti langelius?

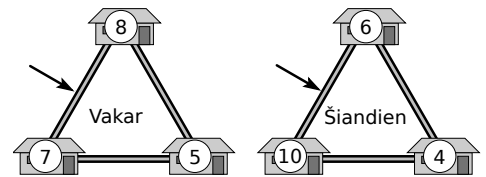


A) 12 B) 8 C) 32 D) 24 E) 16

25. Ignas stovi eilėje. Joje stovinčių žmonių skaičius dalijasi iš 3. Priešais Igną stovi tiek pat žmonių, kiek ir už jo. Du jo draugai stovi šioje eilėje už jo – vienas 19-oje eilės vietoje, o kitas – 28-oje eilės vietoje. Kam lygus Igno numeris šioje eilėje?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

26. Trijuose gretimuose namuose gyvena keletas pelių. Praėjusią naktį kiekviena pelė persikraustė ir iš savo namo tiesiausiu keliu perbėgo į vieną iš kitų dviejų namų. Paveikslėlyje pavaizduotas pelių skaičius kiekviename name vakar ir šiandien. Kiek pelių bėgo rodykle pažymėtu keliu?



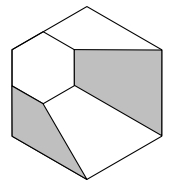
A) 9 B) 11 C) 12 D) 16 E) 19

27. Raminta skaičių 1015 išreiškė penkių natūraliųjų skaičių, kurių kiekvieno visi skaitmenys lygūs 7, suma (žr. pav.). Šioje išraiškoje skaitmuo 7 panaudotas lygiai 10 kartų. Tokiu pat būdu, 19 kartų panaudodama skaitmenį 7, Raminta išreiškė skaičių 2023. Keli dėmenys toje išraiškoje lygūs 77?

$$\begin{array}{r} 777 \\ 77 \\ 77 \\ 77 \\ 77 \\ + 7 \\ \hline 1015 \end{array}$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

28. Taisyklingasis šešiakampis sudėtas iš keturių keturkampių ir vieno mažojo taisyklingojo šešiakampio, kaip parodyta paveikslėlyje. Figūros užtušuotos dalies ir mažojo šešiakampio plotų santykis lygus $\frac{4}{3}$. Kam lygus mažojo šešiakampio ir didžiojo šešiakampio plotų santykis?



A) $\frac{3}{11}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{5}$

29. Julija turi tris žetonus. Kiekvieno žetono abiejose pusėse užrašyta po vieną skaičių. Iš viso užrašyti šeši iš eilės einantys natūralieji skaičiai. Julija tris kartus metė šiuos tris žetonus. Po pirmojo metimo žetonai atsivertė skaičiais 6, 7 ir 8, kaip parodyta paveikslėlyje. Po antrojo metimo atsivertusių skaičių suma buvo lygi 23, o po trečiojo metimo 17. Kam lygi pirmuoju metimu neatsivertusių skaičių suma?

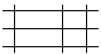


A) 18 B) 19 C) 23 D) 24 E) 30

30. Praėjusio sezono septintose, aštuntose ir devintose rungtynėse rankinio komanda įmetė atitinkamai 24, 17 ir 25 įvarčius. Šios komandos pirmųjų 9 rungtynių įvarčių skaičiaus vidurkis buvo didesnis už jos pirmųjų 6 rungtynių įvarčių skaičiaus vidurkį. Be to, šios komandos pirmųjų 10 rungtynių įvarčių skaičiaus vidurkis buvo didesnis už 22. Kiek mažiausiai įvarčių ši komanda galėjo įmesti per dešimtąsias rungtynes?

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

Kadeto užduočių sprendimai

1. **(E)** 

! Uždenytoji figūros dalis turi tris vertikalias ir tris horizontalias atkarpas. Todėl netinka atsakymai **A** ir **B**. Kita vertus, uždengtosios figūros dalies vidurinė horizontalioji atkarpa yra vienodai nutolusi nuo kitų dviejų horizontaliųjų atkarpų. Todėl netinka atsakymas **D**. Be to, uždengtosios figūros dalies vidurinė vertikaloji atkarpa nėra vienodai nutolusi nuo kitų dviejų vertikaliųjų atkarpų. Taigi netinka ir atsakymas **C**.

Teisingas atsakymas **E**.

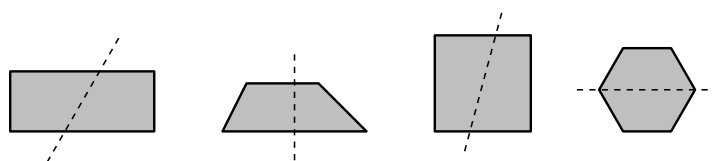
2. **(D)** 289

! $2023 : (2 + 0 + 2 + 3) = 2023 : 7 = 289$.

Teisingas atsakymas **D**.

3. **(A)** 

! Viena tiesia linija padalijus trikampį į dvi dalis, bent viena iš gautų dalių bus trikampis. Vadinasi, trikampio negalima padalinti į dvi trapecijas viena tiesia linija. Likusias figūras galima padalinti į dvi trapecijas viena tiesia linija (žr. pav.).



Teisingas atsakymas **A**.

4. **(A)** 4 arba 12

! Pastebėkime, kad skylutėse rodomi laikai skiriasi 4 val. Taigi jei vienoje skylutėje atsirado skaičius 8, tai kitoje skylutėje bus skaičius $8 - 4 = 4$ arba $8 + 4 = 12$.

Teisingas atsakymas **A**.

5. **(B)** 30303030

! Sugrupuokime skaičius:

$$\begin{aligned} & (33 + 3333 + 333333 + 33333333) - (3 + 333 + 33333 + 3333333) = \\ & = 33 - 3 + 3333 - 333 + 333333 - 33333 + 33333333 - 3333333 = \\ & = 30 + 3000 + 300000 + 30000000 = 30303030. \end{aligned}$$

Teisingas atsakymas **B**.

6. **(B)** 12

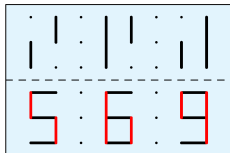
! Prie klaustuku pažymėtos kraštinės parašytą skaičių pažymėkime x . Prie bet kurių dviejų priešingų rombo kraštinių parašytų skaičių suma lygi visose rombo viršūnėse parašytų skaičių sumai. Taigi $8 + 13 = x + 9$. Iš čia randame, kad $x = 12$.

Beje, kairiojoje rombo viršūnėje galima įrašyti bet kurį skaičių a . Tada kitose viršūnėse (pagal laikrodžio rodyklę) bus $8 - a$, $a + 1$, $12 - a$, ir uždavinio sąlyga išpildyta. Jeigu norime, kad visi skaičiai būtų natūralieji ir skirtingi, tai a reikia imti 1, 2 arba 5.

Teisingas atsakymas **B**.

7. **(C)** 

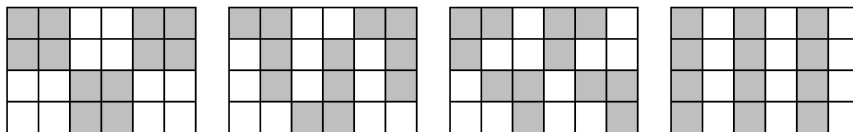
! Elena mato skaičių 569 (žr. pav.).



Teisingas atsakymas **C**.

8. **(D)** 

! 4×6 stačiakampis turi 24 langelius. Raide **D** pažymėtame atsakyme nurodyta detalė turi 5 langelius. Kadangi 24 nesidalija iš 5, tai Sofija negalėjo panaudoti raide **D** pažymėtame atsakyme nurodytos detalės. Kita vertus, nesunku įsitikinti, kad Sofija galėjo panaudoti bet kurią iš likusių detalių (žr. pav.).



Teisingas atsakymas **D**.

9. (B) 15

! Kai Ema pažėrė monetas ant stalo, lygiai $\frac{150-60}{100} = 90$ monetų atvirto herbu. Vadinasi, reikia apversti lygiai $90 - \frac{150}{2} = 15$ herbu atvirtusių monetų, kad skaičiumi ir herbu atvirtusių monetų būtų po lygiai.

Teisingas atsakymas B.

10. (D) 10

! Evelinai pasirinkus tris diskus iš turimų penkių, yra vienintelis būdas pastatyti bokštą, kurio kiekvienas diskas būtų mažesnis už tą, ant kurio jis guli. Taigi reikia suskaičiuoti, keliais būdais Evelina gali pasirinkti tris diskus iš turimų penkių. Pastebėkime, kad trijų diskų pasirinkimas iš penkių turimų yra tas pats kaip ir dviejų diskų „atmetimas“ iš penkių turimų. Taigi pakanka suskaičiuoti, keliais būdais Evelina gali pasirinkti du diskus iš penkių.

Pirmą diską Evelina gali pasirinkti penkiais būdais, o antrą – keturiais (pirmasis jau pasirinktas). Kadangi pasirinktų diskų tvarka nesvarbi (nesvarbu kuris pirmas ir kuris antras), tai yra lygiai $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ būdų pasirinkti du diskus iš penkių. Vadinasi, Evelina gali pastatyti lygiai 10 tokių bokštų.

Teisingas atsakymas D.

11. (E) 7

! Suskaičiuojame visų skaičių sumą:

$$1 + 2 + \dots + 8 = (1 + 8) + (2 + 7) + (3 + 6) + (4 + 5) = 4 \cdot 9 = 36.$$

Kadangi dviejų skaičių sumos visuose keturiuose stulpeliuose yra lygios, tai kiekviena iš šių keturių sumų lygi $\frac{36}{4} = 9$. Todėl pirmojo stulpelio viršutiniame langelyje įrašytas skaičius $9 - 3 = 6$. Panašiai gauname, kad trečiojo stulpelio viršutiniame langelyje įrašytas skaičius $9 - 8 = 1$. Kadangi keturių skaičių sumos abiejose eilutėse yra lygios, tai kiekviena iš šių sumų lygi $\frac{36}{2} = 18$. Vadinasi, pirmosios eilutės paskutiniame langelyje įrašytas skaičius $18 - 6 - 4 - 1 = 7$.

Teisingas atsakymas E.

12. (E) ♥△♥

! Skaičiai □♦♦ ir ♥△△ yra iš eilės einantys. Kadangi prie skaičiaus □♦♦ pridėjus 1, keičiasi dešimčių skaitmuo, tai ♦ = 9 ir △ = 0. Be to, skaitmuo ♥ yra vienetu didesnis už skaitmenį □. Kita vertus, ♥△△ + 1 = ♥△□. Todėl □ = 1. Taigi ♥ = □ + 1 = 1 + 1 = 2. Vadinasi, ♥△□ + 1 = 201 + 1 = 202 = ♥△♥.

Teisingas atsakymas E.

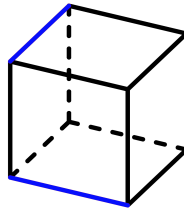
13. Ⓒ 18

! Pusapskritimio spindulio ilgį pažymėkime r . Uždavinio sąlygos paveikslėlyje matome atkarpą, kurios ilgis lygus trijų viršutinių pusapskritimių skersmenų ir dviejų atkarpų, kurių kiekvienos ilgis lygus 12, ilgių sumai. Kita vertus, šios atkarpos ilgis lygus dviejų apatinių pusapskritimių skersmenų ir trijų atkarpų, kurių ilgiai yra 22, 16 ir 22, ilgių sumai. Taigi $2r + 12 + 2r + 12 + 2r = 22 + 2r + 16 + 2r + 22$. Iš čia randame $r = 18$.

Teisingas atsakymas C.

14. Ⓑ 3

! Kubas turi šešias sienas. Kiekviena briauna priklauso lygiai dviem sienoms. Vadinasi, Dominikas mėlynai nudažė mažiausiai tris briaunas. Kita vertus, pakanka nudažyti tris briaunas (žr. pav.).



Teisingas atsakymas B.

15. Ⓒ 6

! Tarkime, kad natūralųjį skaičių n galima gauti uždavinio sąlygoje nurodytu būdu, panaudojant lygiai 6 degtukus. Pastebėkime, kad bet kuriam skaitmeniui reikia mažiausiai 2 degtukų. Todėl skaičius n turi ne daugiau negu $\frac{6}{2} = 3$ skaitmenis. Nagrinėkime tris atvejus: a) skaičius n yra vienženklis; b) skaičius n yra dviženklis; c) skaičius n yra triženklis.

a) skaičius n yra vienženklis. Vadinasi, n yra skaitmuo, sudarytas iš lygiai 6 degtukų. Nesunku įsitikinti, kad $n = 6$ arba 9 (skaičius 0 netinka, nes nėra natūralusis skaičius).

b) skaičius n yra dviženklis. Tuomet vienas skaitmuo sudėtas iš lygiai 2 degtukų ir kitas – iš 4 arba kiekvienas iš skaitmenų sudėtas iš 3 degtukų. Vienintelis skaitmuo 1 yra sudėtas iš 2 degtukų ir vienintelis skaitmuo 4 yra sudėtas iš 4 degtukų. Be to, vienintelis skaitmuo 7 yra sudėtas iš 3 degtukų. Taigi šiuo atveju $n = 14, 41$ arba 77.

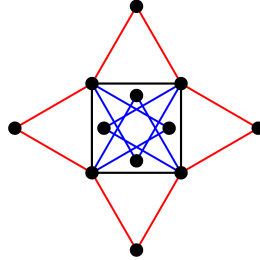
c) skaičius n yra triženklis. Tuomet kiekvienas jo skaitmuo sudėtas iš 2 degtukų. Kadangi vienintelis skaitmuo 1 yra sudėtas iš 2 degtukų, tai $n = 111$.

Taigi $n = 6, 9, 14, 41, 77$ arba 111.

Teisingas atsakymas C.

16. **(E)** 12

! Bet kuriai atkarpai yra ne daugiau negu du plokštumos taškai, kurių kiekvieno atstumas iki kiekvieno atkarpos galo lygus 1. Yra lygiai 6 atkarpos, kurių galai yra duotojo kvadrato viršūnės (keturios kraštinės ir dvi įstrižainės). Vadinasi, plokštumoje yra ne daugiau negu $2 \cdot 6 = 12$ taškų, kurių kiekvieno atstumas iki kurių nors dviejų kvadrato viršūnių lygus 1. Kita vertus, paveikslėlyje matyti, kad yra lygiai 12 tokių taškų.



Teisingas atsakymas **E**.

17. **(D)** 70°

! Kadangi trikampis ABC yra lygiašonis, tai

$$\angle BAC = \angle BCA = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ.$$

Kadangi $\angle EAB = \angle DCA$, tai

$$\angle ECF = \angle BCA - \angle DCA = \angle BAC - \angle EAB = \angle EAC.$$

Taigi

$$\begin{aligned} \angle CFE &= 180^\circ - \angle FEC - \angle ECF = 180^\circ - \angle AEC - \angle EAC = \\ &= \angle ECA = \angle BCA = 70^\circ. \end{aligned}$$

Teisingas atsakymas **D**.

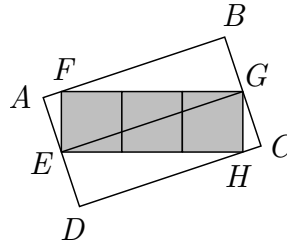
18. **(D)** 40

! Uždavinio sąlygos paveikslėlyje matyti, kad į kiekvieną taikinio žiedą Elžbieta įsmeigė dvigubai mažiau strėlyčių negu į tą patį žiedą įsmeigė Adomas ir Simonas kartu paėmus. Vadinasi, Elžbieta surinko $\frac{46+34}{2} = 40$ taškų.

Teisingas atsakymas **D**.

19. **(D)** 150

! Stačiakampių viršūnes pažymėkime raidėmis A, B, C, D, E, F, G ir H (žr. pav.).

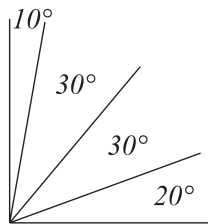


Kadangi taškai E ir G yra atitinkamai kraštinių AD ir BC vidurio taškai, tai stačiakampio $ABGE$ plotas lygus pusei stačiakampio $ABCD$ ploto. Trikampio EFG plotas lygus pusei stačiakampio $EFGH$ ploto. Kita vertus, trikampio EFG plotas lygus pusei stačiakampio $ABGE$ ploto (atkarpa EG yra šio trikampio pagrindas, o aukštinės, nuleistos iš viršūnės F , ilgis lygus kraštinės AE ilgiui). Taigi stačiakampio $ABGE$ plotas lygus stačiakampio $EFGH$ plotui, kuris lygus $3 \cdot 25 = 75$. Vadinasi, stačiakampio $ABCD$ plotas lygus $2 \cdot S_{EFGH} = 2 \cdot 75 = 150$.

Teisingas atsakymas **D**.

20. **(B)** 3

! Akivaizdu, kad neužtenka dviejų papildomų spindulių (nubrėžus keturis spindulius, išeinančius iš vieno taško, susidaro daugiausiai šeši smailieji kampai). Vadinasi, reikia išvesti bent tris papildomus spindulius. Paveikslėlyje pavaizduota, kad trijų papildomų spindulių pakanka.



Teisingas atsakymas **B**.

21. Ⓐ 4

! Nagrinėkime 2023 iš eilės einančius sveikuosius skaičius: $-1011, -1010, \dots, -1, 0, 1, \dots, 1010, 1011$. Pastebėkime, kad jų suma lygi 0. Prie kiekvieno iš šių skaičių pridėjus po 1, gausime 2023 iš eilės einančius skaičius $-1010, -1009, \dots, -1, 0, 1, \dots, 1011, 1012$, kurių suma lygi 2023. Lieka pastebėti, kad tai vienintelis 2023 iš eilės einančių sveikųjų skaičių rinkinys, kurių suma lygi 2023. (Prie bet kurio 2023 iš eilės einančių sveikųjų skaičių rinkinio kiekvieno skaičiaus paeiliui pridedant po 1 arba atimant po 1, galima gauti bet kuriuos 2023 iš eilės einančius sveikuosius skaičius.) O didžiausio skaičiaus skaitmenų suma lygi $1+0+1+2=4$.

Teisingas atsakymas **A**.

!! Mūsų skaičiai atvirkščia tvarka lygūs

$$n, n-1, \dots, n-2022.$$

Po jais parašykime tuos pačius skaičius didėjimo tvarka:

$$n-2022, n-2021, \dots, n.$$

Kiekvienos poros suma lygi $2n-2022$. Porų yra 2023, visų jų suma lygi visų surašytų skaičių sumai: $2023 \cdot (2n-2022) = 2 \cdot 2023$. Iš čia $n-1011=1$, $n=1012$.

22. Ⓒ $\frac{180}{19}$

! Trikampio kraštinės ilgį decimetrais pažymėkime x . Tuomet visas kelias lygus $3x$. Skruzdėlė iš skruzdėlyno A į skruzdėlyną B nuropojo per $\frac{x}{20}$ min, iš B į C – per $\frac{x}{15}$ min, o iš C į A – per $\frac{x}{5}$ min. Taigi skruzdėlė visą kelią nuropojo per $\frac{x}{20} + \frac{x}{15} + \frac{x}{5} = \frac{19}{60}x$ min. Vadinasi, skruzdėlė visą kelią nuropojo $\frac{3x}{\frac{19}{60}x} = \frac{180}{19}$ dm/min vidutiniu greičiu.

Teisingas atsakymas **C**.

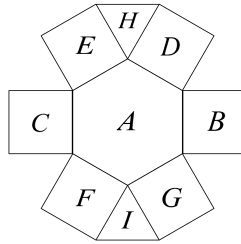
23. Ⓒ 3

! Kadangi yra lygiai 7 vaikai ir Agota sužaidė 6 partijas, tai Agota sužaidė su visais vaikais, įskaitant ir Kotryną. Be to, Ema pirmadienį sužaidė tik su Agota. Vadinasi, penki vaikai – Adomas, Austėja, Evelina, Dominykas ir Kotryna – tarpusavyje sužaidė tam tikrą partijų skaičių: Adomas sužaidė 1 partiją, Austėja – 2, Evelina – 3, o Dominykas – 4. Taigi Dominykas sužaidė po vieną partiją su Adomu, Austėja, Evelina ir Kotryna. Vadinasi, trys vaikai – Austėja, Evelina ir Kotryna – tarpusavyje sužaidė tam tikrą partijų skaičių: Austėja sužaidė 1 partiją, Evelina – 2. Dabar aišku, kad Evelina sužaidė su Austėja ir Kotryna. Taigi Kotryna pirmadienį sužaidė lygiai 3 partijas (su Agota, Dominyku ir Evelina).

Teisingas atsakymas **C**.

24. **E** 16

! Figūros langelius pažymėkime raidėmis A, B, C, D, E, F, G, H ir I (žr. pav.).



Langelis, kuriame įrašytas skaičius 8 arba 9, turi tik vieną gretimą langelį ir jame įrašytas skaičius 1. Vadinasi, langelyje A įrašytas skaičius 1, o skaičiai 8 ir 9 įrašyti langeliuose B ir C (du variantai).

Skaičius 7 negali būti įrašytas langelyje H , nes jam gretimame langelyje E arba kitame jam gretimame langelyje D yra įrašytas skaičius, kuris yra ne mažesnis už 3 (tokiu atveju dviejuose gretimuose langeliuose įrašytų skaičių sandauga būtų ne mažesnė už $7 \cdot 3 = 21 > 15$). Panašiai gauname, kad skaičius 7 negali būti įrašytas langelyje I . Taigi skaičius 7 yra įrašytas viename iš langelių D, E, F arba G . Tarkime, kad skaičius 7 įrašytas langelyje G . Tada skaičius 2 įrašytas langelyje I . Langeliui, kuriame įrašytas skaičius 6, gretimuose langeliuose gali būti įrašyti tik skaičiai 1 arba 2. Taigi skaičius 6 įrašytas langelyje F . Lieka trys skaičiai 3, 4 ir 5, kurie įrašyti langeliuose H, D ir E . Kadangi skaičiai 4 ir 5 negali būti įrašyti gretimuose langeliuose ($4 \cdot 5 > 15$), tai skaičius 3 įrašytas langelyje H , o skaičiai 4 ir 5 įrašyti langeliuose E ir D (du variantai).

Taigi yra du būdai įrašyti skaičius 8 ir 9 langeliuose B ir C , keturi būdai įrašyti skaičių 7 viename iš langelių D, E, F arba G ir du būdai įrašyti skaičius 4 ir 5. Vadinasi, yra lygiai $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ būdų užpildyti figūros langelius.

Teisingas atsakymas **E**.

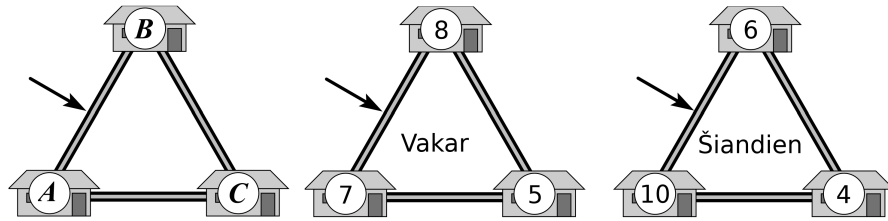
25. **D** 17

! Kadangi prieš Igną stovi tiek pat žmonių, kiek ir už jo, tai eilėje stovinčių žmonių skaičius yra nelyginis. Šį skaičių galime pažymėti $2n + 1$, kur n yra natūralusis skaičius. Tada Igno numeris eilėje yra $n + 1$. Kadangi vienas iš Igno draugų stovi 28-oje eilės vietoje, tai $2n + 1 \geq 28$. Be to, skaičius $2n + 1$ yra nelyginis ir dalijasi iš 3. Todėl $2n + 1 \geq 33$. Iš čia gauname, kad $n \geq 16$. Vienas iš Igno draugų stovi 19-oje eilės vietoje, kuri yra už Igno. Vadinasi, $n + 1 < 19$. Iš čia gauname, kad $n < 18$. Taigi $n = 16$ arba 17 . Blieka pastebėti, kad tik su skaičiumi $n = 16$ eilėje stovinčių žmonių skaičius $2n + 1$ dalijasi iš 3. Vadinasi, eilėje stovi lygiai $2 \cdot 16 + 1 = 33$ žmonės, o Igno eilės numeris lygus 17.

Teisingas atsakymas **D**.

!! Žmonių skaičių pažymėkime $3n$. Bet žmonių skaičius nelyginis, todėl nelyginis ir $n = 2k + 1$. Taigi žmonių skaičius yra $6k + 3$. Igno numeris yra $\frac{6k+3-1}{2} + 1 = 3k + 2$. Šis numeris mažesnis už 19, $3k + 2 < 19$, $3k < 17$, t. y. $k \leq 5$.

Bet žmonių yra ne mažiau kaip 28, $6k + 3 \geq 28$, $6k \geq 25$, $k \geq 5$. Vadinasi, $k = 5$, o Igno numeris $3 \cdot 5 + 2 = 17$.

26. **(B)** 11! Tris namus pažymėkime raidėmis A , B ir C (žr. pav.).

Praėjusią naktį iš namų A ir B persikraustė $7 + 8 = 15$ pelių. Kadangi šiandien name C yra lygiai 4 pelės, tai praėjusią naktį iš namų A ir B į namą C persikraustė lygiai 4 pelės. Vadinasi likusios $15 - 4 = 11$ pelių praėjusią naktį bėgo rodykle pažymėtu keliu (iš A į B arba iš B į A).

Teisingas atsakymas **B**.27. **(E)** 6

! Kadangi $7777 > 2023$, tai skaičiaus 2023 išraiškoje gali būti tik skaičiai 7, 77 ir 777. Tarkime, kad Raminta, išreikšdama skaičių 2023, skaičių 777 panaudojo a kartų, skaičių 77 – b kartų, o skaičių 7 – c kartų. Tada

$$a \cdot 777 + b \cdot 77 + c \cdot 7 = 2023.$$

Be to, šioje išraiškoje skaitmuo 7 panaudotas lygiai 19 kartų. Todėl $3a + 2b + c = 19$. Iš čia matyti, kad $b \leq 9$ ir $c \leq 19$.

Įrodysime, kad $a = 2$. Iš tikrųjų, jei $a \geq 3$, tuomet $a \cdot 777 \geq 3 \cdot 777 = 2331 > 2023$. Vadinasi, $a \leq 2$. Tarkime, kad $a = 1$. Šią reikšmę įstatę į lygybę $a \cdot 777 + b \cdot 77 + c \cdot 7 = 2023$, suprastinę panašius narius ir abi gautosios lygybės puses padaliję iš 7, gauname lygybę $11b + c = 178$. Kadangi $b \leq 9$ ir $c \leq 19$, tai $11b + c \leq 11 \cdot 9 + 19 = 118 < 178$. Vadinasi, $a = 2$.

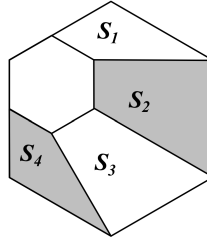
Reikšmę $a = 2$ įrašę lygybėse $a \cdot 777 + b \cdot 77 + c \cdot 7 = 2023$ ir $3a + 2b + c = 19$ ir jas pertvarę, gauname atitinkamai lygybes $11b + c = 67$ ir $2b + c = 13$. Iš pirmosios lygybės panariui atėmę antrąją, gauname $9b = 54$, o iš čia – $b = 6$. Tada $c = 13 - 2b = 1$. Nesunku patikrinti, kad

$$2 \cdot 777 + 6 \cdot 77 + 7 = 2023.$$

Teisingas atsakymas **E**.

28. (A) $\frac{3}{11}$

! Didžiojo šešiakampio plotą pažymėkime S , mažojo – s , o keturių keturkampių plotus pažymėkime S_1, S_2, S_3 ir S_4 (žr. pav.):



Dėl simetrijos akivaizdu, kad $S_1 = S_4$ ir $S_2 = S_3$. Tuomet $S = s + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = s + 2(S_2 + S_3)$. Taigi užtušuotos figūros plotas $S_2 + S_3$ lygus $\frac{S-s}{2}$. Kadangi užtušuotos figūros dalies ir mažojo šešiakampio plotų santykis lygus $\frac{4}{3}$, tai

$$\frac{\frac{S-s}{2}}{s} = \frac{4}{3}.$$

Iš čia randame santykį $\frac{s}{S} = \frac{3}{11}$.

Teisingas atsakymas **A**.

!! Mažojo šešiakampio plotą laikykime lygiu 1. Tada bendras abiejų užtušuotųjų keturkampių plotas $\frac{4}{3}$, toks pat dėl simetrijos ir abiejų neužtušuotųjų keturkampių plotas. Todėl didžiojo šešiakampio plotas lygus $1 + 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$, o ieškomas santykis yra $1 : \frac{11}{3} = \frac{3}{11}$.

29. (A) 18

! Mažiausią iš visų ant žetonų užrašytų skaičių pažymėkime n . Tada ant žetonų yra užrašyti šeši iš eilės einantys natūralieji skaičiai $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ ir $n+5$. Kadangi po trečiojo metimo atsivertusių skaičių suma lygi 17, tai trijų mažiausių skaičių suma $n + (n+1) + (n+2) \leq 17$. Iš čia gauname, kad $n \leq 4$.

Kadangi po antrojo metimo atsivertusių skaičių suma buvo 23, tai trijų didžiausiųjų skaičių suma $(n+3) + (n+4) + (n+5) \geq 23$, iš čia $3n \geq 11$, $n \geq 4$. Vadinasi, $n = 4$ ir ant žetonų užrašyti skaičiai 4, 5, 6, 7, 8 ir 9. Taigi pirmuoju metimu neatsivertusių skaičių suma lygi $4 + 5 + 9 = 18$.

Lieka įsitikinti, kad ant žetonų galima taip užrašyti skaičius 4, 5, 6, 7, 8 ir 9, kad būtų tenkinamos uždavinio sąlygos. Iš tikrųjų, jei ant pirmojo žetono užrašysime skaičius 5 ir 6, ant antrojo – skaičius 4 ir 8, o ant trečiojo – skaičius 7 ir 9, tuomet toks žetonų rinkinys tenkins uždavinio sąlygas ($6 + 8 + 9 = 23$, $4 + 6 + 7 = 17$ ir $4 + 5 + 9 = 18$).

Teisingas atsakymas **A**.

30. © 24

! Septintosiose, aštuntosiose ir devintuosiose rungtynėse rankinio komandos įmestų įvarčių vidurkis buvo $\frac{24+17+25}{3} = 22$. Todėl pirmosiose šešeriose rungtynėse įmestų įvarčių vidurkis buvo mažesnis negu 22. Vadinasi, per pirmąsias šešerias rungtynes rankinio komanda įmetė ne daugiau negu $6 \cdot 22 - 1 = 131$ įvartį. Šios komandos pirmųjų 10 rungtynių įvarčių skaičiaus vidurkis buvo didesnis už 22. Todėl per pirmąsias 10 rungtynių komanda įmetė mažiausiai $10 \cdot 22 + 1 = 221$ įvartį. Taigi per dešimtąsias rungtynes komanda įmetė mažiausiai $221 - 131 - 66 = 24$ įvarčius. Lieka įsitikinti, kad komanda galėjo taip sužaisti 10 rungtynių, kad būtų tenkinamos uždavinio sąlygos ir per dešimtąsias rungtynes ši komanda būtų įmetusi 24 įvarčius. Pavyzdys pateiktas lentelėje.

Rungtynių nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Įvarčių sk.	22	22	22	22	22	21	24	17	25	24

Teisingas atsakymas C.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	E
2	D
3	A
4	A
5	B
6	B
7	C
8	D
9	B
10	D
11	E
12	E
13	C
14	B
15	C
16	E
17	D
18	D
19	D
20	B
21	A
22	C
23	C
24	E
25	D
26	B
27	E
28	A
29	A
30	C