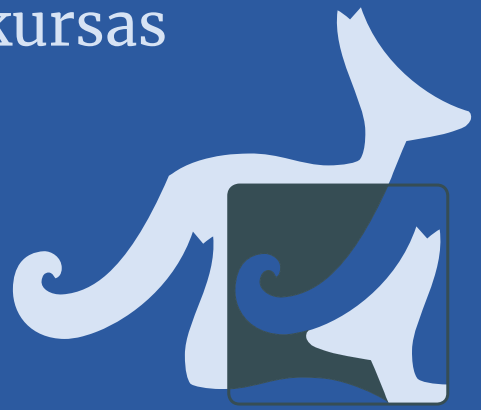


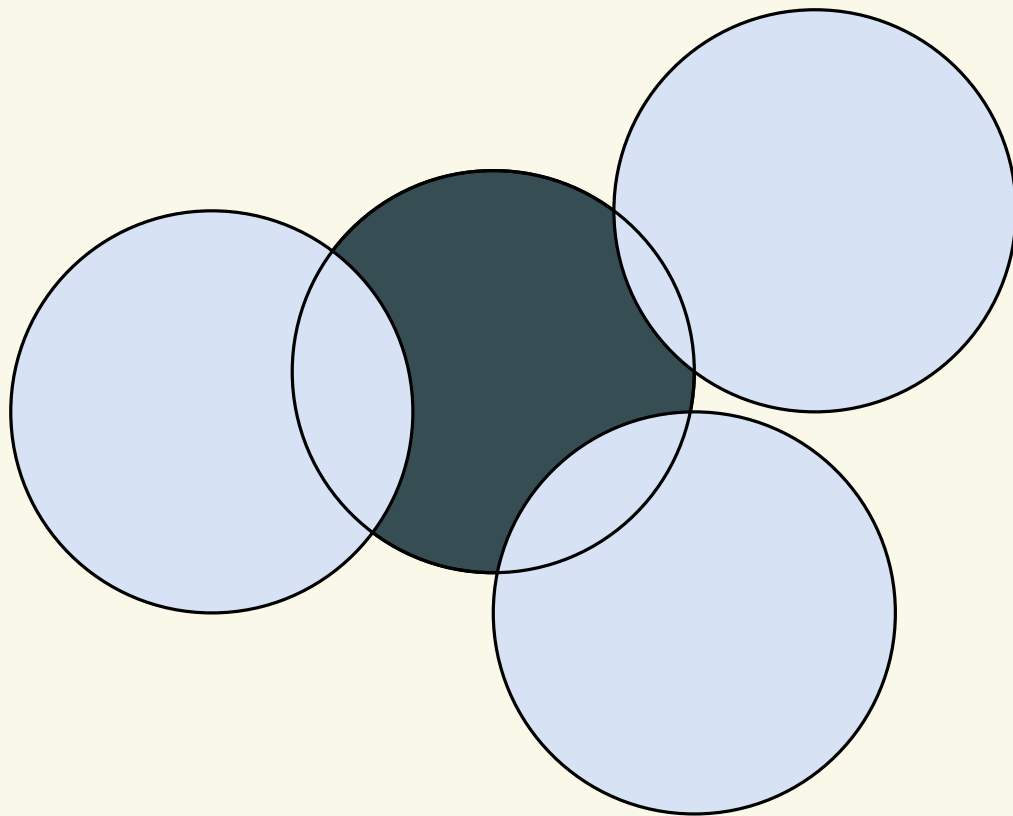
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA



# Senjoras

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI



2022

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS  
VILNIAUS UNIVERSITETAS  
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA



KENGŪRA 2022. Senjoras  
TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO  
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas  
Aivaras Novikas

Maketavo  
Ugnė Gudžinskaitė

# Turiny

|                     |    |
|---------------------|----|
| Pratarmė            | 4  |
| Sąlygos             | 6  |
| Užduočių sprendimai | 11 |

# Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdienišku) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gdynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos sprendamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 24000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2022 metais. Nors, žinoma, šiais metais viskas dėl tos nelemtos pandemijos atrodė, pakrypo ir klostėsi visiškai kitaip negu iki šiol. Pasitvirtino visiems teoriškai gerai girdėta išmintis, kad karantininis gyvenimas yra pilnas staigmenų ir netikėtumų: konkursas iš trečiojo kovo ketvirtadienio nusikėlė į vėlesnę datą ir vyko nuotoliniu būdu.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamas, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėlioavimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrantančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo

ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšiuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažinę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai atečiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2022 metų kovo 17 dieną keliavo ir gausiai sprendė 11–12 klasių (*Senjoro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys patikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu !), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu ?). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais ??, !!, !!! ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

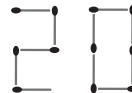
Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

# 2022 m. *Senjoro* užduočių sąlygos

## Klausimai po 3 taškus

1. Liudas nori iš degtukų sudaryti skaičių 2022. Jis paėmė 30 degtukų ir sudarė pirmus du skaitmenis (žr. pav.). Kiek degtukų liks nepanaudota, kai Liudas sudarys skaičių 2022?



A) 20    B) 19    C) 10    D) 9    E) 5

2. Kiek yra triženkliai natūralieji skaičiai, kurie dalijasi iš 8?

A) 111    B) 112    C) 113    D) 124    E) 125

3. Joana yra vyresnė už Joną, bet jaunesnė už Janę. Joris yra vyresnis už Joaną. Kurie du asmenys gali būti to paties amžiaus?

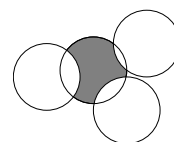
A) Jonas ir Joris    B) Joris ir Janė    C) Janė ir Jonas    D) Joana ir Janė  
E) Joris ir Joana

4. Dešimtženklis natūraliojo skaičiaus skaitmenų sandauga lygi 15. Kokia yra jo skaitmenų suma?

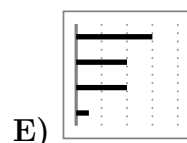
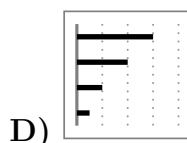
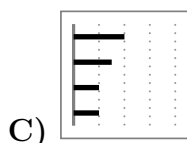
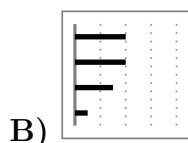
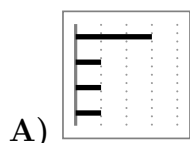
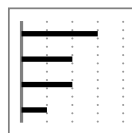
A) 8    B) 12    C) 15    D) 16    E) 20

5. Koks yra nuspaltintos srities perimetras, jei visų keturių apskritimų paveikslėlyje spinduliai lygūs 1?

A) Didesnis už  $\frac{3\pi}{2}$  ir mažesnis už  $2\pi$     B)  $\frac{3\pi}{2}$     C)  $2\pi$     D)  $\pi$     E)  $\pi^2$



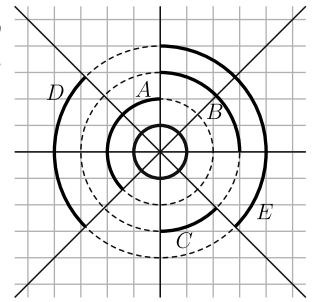
6. Kiekvienos savaitės gale Danutės telefonas parodo jai, kiek laiko tą savaitę ji sugaišo keturioms programėlėms. Kartą Danutės telefonas parodė dešinėje pavaizduotą diagramą. Kitą savaitę Danutė telefonu naudojos trumpiau: nors dvi iš keturių naudojimosi programėlėmis trukmių nepakito, kitos dvi sumažėjo perpus. Kuris paveikslėlis **negali** būti naujoji telefono diagrama?



7. Kiek realiųjų sprendinių turi lygtis  $(x - 2)^2 + (x + 2)^2 = 0$ ?

A) 0    B) 1    C) 2    D) 3    E) 4

8. Plokštuma padalyta į vienetinius langelius, joje nubrėžtos keturios tiesės, dalijančios pilnąjį kampą į 8 lygius kampus, ir keli apskritimai (žr. pav.). Kurio iš pažymėtųjų lankų ilgis lygus mažiausiojo apskritimo ilgiui?  
 A)  $A$    B)  $B$    C)  $C$    D)  $D$    E)  $E$



9. Realieji skaičiai  $a, b, c$  nelygūs nuliui, o skaičių  $-2a^4b^3c^2$  ir  $3a^3b^5c^{-4}$  ženklai sutampa. Kuri nelygybė garantuotai teisinga?  
 A)  $ab > 0$    B)  $b < 0$    C)  $c > 0$    D)  $bc > 0$    E)  $a < 0$
10. Tiesėje taškai  $A, B, C$  ir  $D$  pažymėti tokia tvarka, kaip parodyta paveikslėlyje. Koks yra atstumas tarp atkarpų  $AB$  ir  $CD$  vidurio taškų, jei  $AC = 12$  ir  $BD = 18$ ?

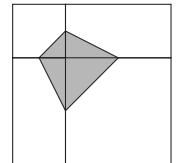


- A) 15   B) 12   C) 18   D) 6   E) 9

### Klausimai po 4 taškus

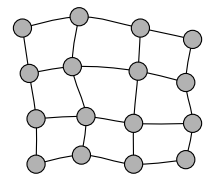
11. Vandens skaitiklio rodmuo  $91,876 \text{ m}^3$  turi penkis skirtingus skaitmenis. Kiek mažiausiai vandens reikia suvartoti, kad rodmenį vėl sudarytų penki skirtingi skaitmenys?  
 A)  $0,006 \text{ m}^3$    B)  $0,034 \text{ m}^3$    C)  $0,086 \text{ m}^3$    D)  $0,137 \text{ m}^3$    E)  $1,048 \text{ m}^3$

12. Kvadratas padalytas į du mažesnius kvadratus ir du stačiakampius, kaip parodyta paveikslėlyje. Nuspalvinto keturkampio viršūnės yra mažesniųjų kvadratų kraštinių vidurio taškai, o jo plotas lygus 3. Koks yra didžiojo kvadrato nenu spalvintos dalies plotas?  
 A) 12   B) 15   C) 18   D) 21   E) 24



13. Koks yra skaičių  $2^{2021} + 2^{2022}$  ir  $3^{2021} + 3^{2022}$  didžiausias bendras daliklis?  
 A)  $2^{2021}$    B) 1   C) 2   D) 6   E) 12

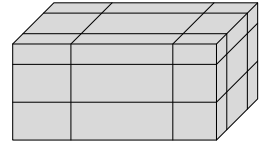
14. Vienoje šalyje yra 16 miestų, sujungtų keliais taip, kaip parodyta paveikslėlyje. Kai kuriuose miestuose reikia pastatyti elektrines, kad jos aprūpintų elektra visus miestus. Kiekviena elektrinė aprūpins tik savo miestą bei gretimus (t. y. su juo kelio atkarpa sujungtus) miestus. Kiek mažiausiai elektrinių reikia pastatyti?



- A) 3   B) 4   C) 5   D) 6   E) 7
15. Trys vaikai spėliojo, kiek metų yra jų senelei. Vienas spėjo, kad jai 75-eri, kitas – kad 78-eri, o trečias – kad 81-eri. Tai išgirdusi, senelė pasakė, kad kažkuris anūkas apsiriko tik vieneriais metais, o kiti du apsiriko dvejais ir ketveriais metais. Kiek metų senelei?  
 A) 76   B) 77   C) 79   D) 80   E) Vienareikšmiškai nustatyti neįmanoma

16. Dovydas didėjimo tvarka surašė visus tokius natūraliuosius skaičius nuo 2 iki 2022, kurių kiekvienas skaitmuo lygus 0 arba 2. Koks skaičius Dovydo sąrašė yra vidurinis?  
 A) 200 B) 220 C) 222 D) 2000 E) 2002

17. Šešios plokštumos dalija stačiakampį gretasienį, kurio paviršiaus plotas lygus  $S$ , į 27 mažesnius stačiakampius gretasienius, kaip parodyta paveikslėlyje. Kiekviena plokštuma yra lygiagreti su dviem didžiojo gretasienio sienomis. Kokia yra 27 mažesniųjų gretasienių paviršiaus plotų suma?

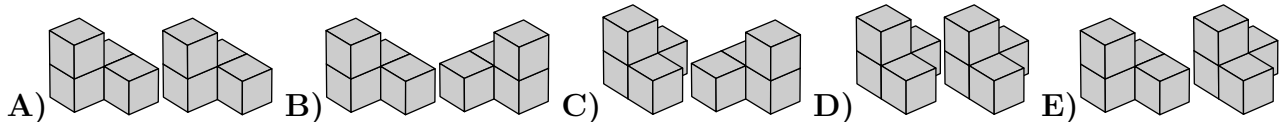
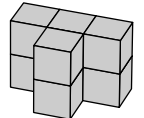


- A)  $2S$  B)  $\frac{5}{2}S$  C)  $3S$  D)  $4S$  E) Kitas atsakymas

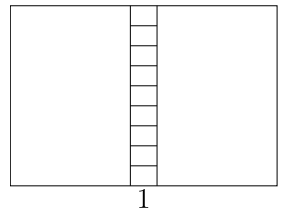
18. Penki skaičiai sudaro didėjančią seką. Pirmųjų trijų skaičių, paskutiniųjų trijų skaičių ir visų penkių skaičių aritmetiniai vidurkiai atitinkamai lygūs 19, 28 ir 24. Koks yra trečiasis sekos narys?

- A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

19. Iš kurių dviejų detalių įmanoma sudėti figūrą, pavaizduotą dešinėje?



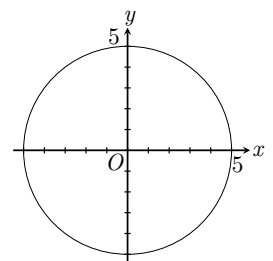
20. Didysis stačiakampis ir jį sudarantys 11 mažesnių stačiakampių (žr. pav.) yra panašios figūros. Devynių mažiausiųjų stačiakampių horizontalių kraštinių ilgiai lygūs 1, o vertikalios kraštinės (kaip ir didžiojo stačiakampio) trumpesnės už horizontalias. Koks yra didžiojo stačiakampio perimetras?



- A) 20 B) 24 C) 27 D) 30 E) 36

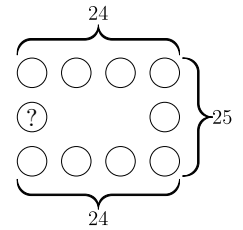
### Klausimai po 5 taškus

21. Kiek taškų, kurių abi koordinatės stačiakampėje koordinačių sistemoje yra sveikieji skaičiai, priklauso apskritimui su centru  $(0;0)$  ir spindulio ilgiu 5?  
 A) 5 B) 8 C) 12 D) 16 E) 20



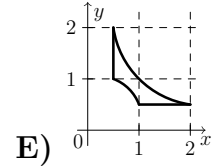
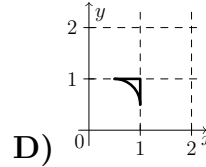
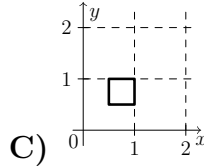
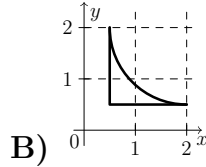
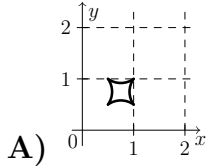
22. Triženklis natūralusis skaičius lygus penkiagubai savo skaitmenų sandaugai. Kiek yra tokių skaičių?  
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

23. Dešimt skaičių 1, 2, ..., 10 po vieną surašyti į 10 skritulių (žr. pav.). Keturių skaičių suma tiek viršutinėje, tiek apatinėje eilutėse lygi 24, o trijų skaičių suma dešiniajame stulpelyje lygi 25. Koks skaičius įrašytas vietoj klausuko?



A) 2    B) 4    C) 5    D) 6    E) Kitas skaičius

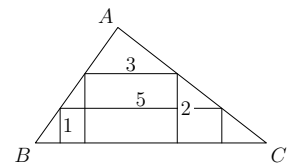
24. Stačiakampėje koordinačių sistemoje nubrėžtas kvadratas su viršūnėmis  $(1; 1)$ ,  $(2; 1)$ ,  $(2; 2)$ ,  $(1; 2)$ . Kiekvienas kvadrato taškas  $(x; y)$  perkeliama į tašką  $\left(\frac{1}{x}; \frac{1}{y}\right)$ . Kaip atrodys iš perkeltų taškų sudaryta figūra?



25. Dvidešimtkampio viršūnės sunumeruotos skaičiais nuo 1 iki 20. Kiekvienos jo kraštinės galuose yra skaičiai, kurie skiriasi 1 arba 2. Kraštinės, jungiančios skaičius, kurie skiriasi tik 1, nudažytos raudonai. Kiek raudonų kraštinių turi dvidešimtkampis?
- A) 1    B) 2    C) 5    D) 10    E) Tai priklauso nuo viršūnių numeracijos

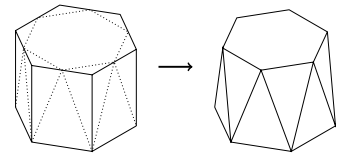
26. Į trikampį  $ABC$  įbrėžti du stačiakampiai, kurių matmenys yra  $1 \times 5$  ir  $2 \times 3$  (žr. pav.). Kokio ilgio yra trikampio  $ABC$  aukštinė, nuleista iš viršūnės  $A$ ?

A) 3    B)  $\frac{7}{2}$     C)  $\frac{8}{3}$     D)  $\frac{16}{5}$     E) Kitas atsakymas



27. Natūralusis skaičius  $N$  yra didesnis už 2022. Kiek natūraliųjų skaičių yra tarp skaičių  $\sqrt{N^2 + N + 1}$  ir  $\sqrt{9N^2 + N + 1}$ ?
- A)  $N + 1$     B)  $2N - 1$     C)  $2N$     D)  $2N + 1$     E)  $3N$

28. Taisyklingosios šešiakampės prizmės šeši kampučiai nupjauti, kaip parodyta paveikslėlyje. Viršutinis prizmės pagrindas sumažėjo, bet liko taisyklinguoju šešiakampiu, o vietoj prizmės šešių šoninių sienų (stačiakampių) atsirado 12 lygiašonių trikampių (du tarpusavyje lygių trikampių šešetai). Kokią savo tūrio dalį prarado prizmė?



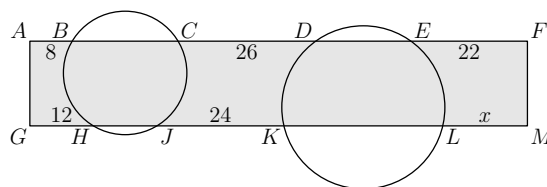
A)  $\frac{1}{12}$     B)  $\frac{1}{6}$     C)  $\frac{1}{4\sqrt{3}}$     D)  $\frac{1}{6\sqrt{2}}$     E)  $\frac{1}{6\sqrt{3}}$

29. Dvylika svarmenų sudėti po keturis į tris dėžes. Svarmenų masės kilogramais yra 12 skirtingų natūraliųjų skaičių 1, 2, 3, ..., 12. Vienoje dėžėje esančių svarmenų bendra masė yra 41 kg, o kitoje – 26 kg. Kurios masės svarmuo guli vienoje dėžėje su 9 kg svarmeniu?

A) 3 kg    B) 5 kg    C) 7 kg    D) 8 kg    E) 10 kg

30. Du apskritimai kerta stačiakampį  $AFMG$ , kaip parodyta paveikslėlyje. Koks yra atkarpos  $LM$  ilgis, jei  $AB = 8$ ,  $CD = 26$ ,  $EF = 22$ ,  $GH = 12$ ,  $JK = 24$ ?

A) 15      B) 17      C) 14      D) 16      E) 18



# Senjoro užduočių sprendimai

1. (D) 9

! Paveikslėlyje matome, kad skaitmeniui 2 reikia penkių degtukų, o skaitmeniui 0 – šešių. Todėl skaičių 2022 Liudas sudarys iš  $5 + 6 + 5 + 5 = 21$  degtuko, o jam liks  $30 - 21 = 9$  degtukai.



2. (B) 112

! Turime nagrinėti natūraliuosius skaičius tarp 100 ir 999. Pastebėkime, kad

$$\frac{100}{8} = \frac{4 \cdot 25}{8} = \frac{25}{2} = 12,5, \quad \frac{1000}{8} = \frac{8 \cdot 125}{8} = 125.$$

Todėl mažiausias ir didžiausias triženkliai skaičiaus 8 kartotiniai atitinkamai lygūs  $8 \cdot 13$  ir  $8 \cdot 124$ . Čia nebūtina šių skaičių apskaičiuoti. Svarbu suvokti, kad visi triženkliai skaičiaus 8 kartotiniai yra

$$8 \cdot 13, \quad 8 \cdot 14, \quad 8 \cdot 15, \quad \dots, \quad 8 \cdot 124.$$

Nuo  $8 \cdot 1$  iki  $8 \cdot 124$  turime 124 skaičiaus 8 kartotinius. Nuo  $8 \cdot 1$  iki  $8 \cdot 12$  turime 12 skaičiaus 8 kartotinius. Vadinasi, nuo  $8 \cdot 13$  iki  $8 \cdot 124$  turime  $124 - 12 = 112$  skaičiaus 8 kartotinių. Tai ir yra teisingas atsakymas.

!! Kadangi  $100 = 80 + 20 = 8 \cdot 10 + 8 \cdot 2 + 4$  dalijasi iš 8 su liekana 4, tai mažiausias triženklis skaičius, kuris dalijasi iš 8, yra  $100 + 4 = 104$ . Kadangi  $1000 = 2^3 \cdot 5^3$  dalijasi iš  $2^3 = 8$ , tai didžiausias triženklis skaičius, kuris dalijasi iš 8, yra  $1000 - 8 = 992$ . Skaičius  $(992 - 104) : 8 = 888 : 8 = 111$  parodo, kad  $992 = 104 + 8 \cdot 111$  yra 111-tas skaičiaus 8 kartotinis, didesnis už 104. Turime įskaityti ir patį skaičių 104: nuo 104 iki 992 yra  $111 + 1 = 112$  natūraliųjų skaičių, dalių iš 8. Tai ir yra teisingas atsakymas.

3. (B) Joris ir Janė

! Pastebėkime, kad Jono, Janės ir Jorio amžiai yra palyginti su Joanos amžiumi, o kitos informacijos neturime. Tėra žinoma, kad Janė ir Joris yra vyresni už Joaną, o Jonas jaunesnis už ją. Taigi Joanos amžius nėra lygus jokio iš likusių trijų asmenų amžiui, Jonas jaunesnis nei Janė ir Joris. O Janės ir Jorio amžiaus niekaip negalime palyginti – būtent jie gali būti to paties amžiaus.

4. (D) 16

? Pastebėję, kad uždavinio sąlygą tenkina dešimtženklis skaičius 531111111, gauname galimą tokio skaičiaus skaitmenų sumą

$$5 + 3 + (1 + 1 + \dots + 1) = 3 + 5 + 8 = 16.$$

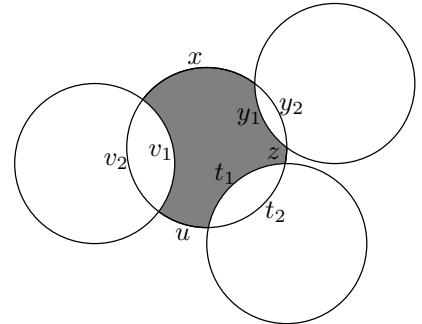
Renkamės atsakymą D.

! Skaičiaus 15 teigiami dalikliai yra 1, 3, 5, 15. Taigi dešimtženklis skaičiaus skaitmenys tegali būti lygūs 1, 3 arba 5. Be to, būtinai turi būti bent vienas skaitmuo 3 (kitais skaitmenų sandauga nesidalytų iš 3), o kita vertus, toks skaitmuo turi būti tik vienas (kitais skaitmenų sandauga dalytųsi iš 9). Analogiškai gauname, kad dešimtženklame skaičiuje turi būti lygiai vienas skaitmuo 5. Vadinasi, dešimtženklis skaičius turi skaitmenis 3 ir 5, o likę 8 skaitmenys turi būti lygūs 1. Visų dešimties skaitmenų suma lygi

$$3 + 5 + (1 + 1 + \dots + 1) = 3 + 5 + 8 = 16.$$

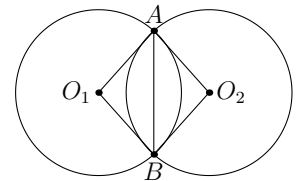
5. (C)  $2\pi$

? Apskritimų lankų ilgius pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje. Nuspaldintos srities kraštą sudaro 6 lankai. Reikia rasti jų bendrą ilgį  $l = x + y_1 + z + t_1 + u + v_1$ . Nesunku nuspėti, kad teisingas toks bendras teiginys: jei du to paties spindulio apskritimai kertasi dviejuose taškuose, tai jie iškerta vienas kitame lygius lankus. Todėl  $y_1 = y_2$ ,  $t_1 = t_2$ ,  $v_1 = v_2$ , o  $l = x + y_2 + z + t_2 + u + v_2$  yra vieno iš apskritimų ilgis  $2\pi \cdot 1 = 2\pi$ .

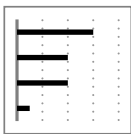


Renkamės atsakymą C.

! Kad užbaigtume ? dalies sprendimą, įrodykime jame panaudotą teiginį. Patį teiginį suformuluokime tiksliau: tarkime, kad lygūs apskritimai  $c_1$  ir  $c_2$  atitinkamai su centrais  $O_1$  ir  $O_2$  kertasi dviejuose taškuose A ir B; tada apskritimo  $c_1$  lankas AB, esantis  $c_2$  viduje, ir apskritimo  $c_2$  lankas AB, esantis  $c_1$  viduje, yra to paties ilgio. Šio teiginio įrodymas trumpas (žr. pav.): trikampiai  $O_1AB$  ir  $O_2AB$  lygūs pagal tris kraštines, todėl  $\angle AO_1B = \angle AO_2B$ , o iš šios centrinių kampų lygiuose apskritimuose lygybės išplaukia ir reikiama lankų ilgių lygybė.



6. (E)



? Diagramose vienos padalos plotį galime laikyti lygiu 1. Tada pirmosios savaitės Danutės telefono diagramą nusako skaičiai 3, 2, 2, 1. Atsakymų diagramas nusako skaičiai

A) 3, 1, 1, 1;   B)  $2, 2, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ ;   C)  $2, \frac{3}{2}, 1, 1$ ;   D)  $3, 2, 1, \frac{1}{2}$ ;   E)  $3, 2, 2, \frac{1}{2}$ .

Įtarimą turėtų sukelti atsakymas E, kurio skaičių ketvertas nuo 3, 2, 2, 1 skiriasi tik vienu skaičiumi (o pati diagrama nuo sąlygoje duotosios – tik viena eilutė). Naujosios diagramos skaičiai iš skaičių 3, 2, 2, 1 gaunami, du iš jų padalijus iš 2. Jei iš 3, 2, 2, 1 galėtume gauti  $3, 2, 2, \frac{1}{2}$ , tai iš 2 būtinai turėtume padalyti skaičių 1, bet ne skaičių 3. Tada antrasis iš 2 dalijamas skaičius turėtų būti 2. Iš jo gautume skaičių  $2 : 2 = 1$ , kurio ketverte 3, 2, 2,  $\frac{1}{2}$  nėra. Vadinasi, atsakymo E diagrama negali būti telefono parodytoji.

Renkamės atsakymą E.

**??** Kaip ir ? dalyje, sąlygos ir atsakymų diagramas užrašykime skaičių ketvertais. Naujosios diagramos skaičiai iš skaičių 3, 2, 2, 1 gaunami, du iš jų padalijus iš 2. Tie du skaičiai, dalijami iš 2, gali būti 2 ir 2 (jei sutampa) arba 1 ir 2, arba 1 ir 3, arba 2 ir 3 (jei yra skirtingi). Patikrinę šias keturias galimybes, galime atmesti atsakymus **A**, **B**, **C**, **D**:

**A)** 3, 2, 2, 1  $\rightarrow$  3, 2 : 2, 2 : 2, 1  $\rightarrow$  3, 1, 1, 1;

**B)** 3, 2, 2, 1  $\rightarrow$  3 : 2, 2, 2, 1 : 2  $\rightarrow$  2, 2,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$ ;

**C)** 3, 2, 2, 1  $\rightarrow$  3 : 2, 2 : 2, 2, 1  $\rightarrow$  2,  $\frac{3}{2}$ , 1, 1;

**D)** 3, 2, 2, 1  $\rightarrow$  3, 2, 2 : 2, 1 : 2  $\rightarrow$  3, 2, 1,  $\frac{1}{2}$ .

Renkamės atsakymą **E**.

**!** Pilną uždavinio sprendimą gauname, sujungę ? ir ?? dalis.

7. **(A)** 0

**!** Kadangi  $(x - 2)^2 \geq 0$  ir  $(x + 2)^2 \geq 0$ , tai  $(x - 2)^2 + (x + 2)^2 = 0$ , tik jei abu dėmenys kairėje lygybės pusėje lygūs 0:

$$(x - 2)^2 = 0, \quad (x + 2)^2 = 0,$$

$$x - 2 = 0, \quad x + 2 = 0,$$

$$x = 2, \quad x = -2.$$

Kadangi duotosios lygties sprendiniui  $x$  lygybės  $x = 2$  ir  $x = -2$  turi būti teisingos vienu metu, tai duotoji lygtis turi 0 sprendinių.

**!!** Duotąją lygtį galima išspręsti, pertvarkius jos kairiąją pusę:

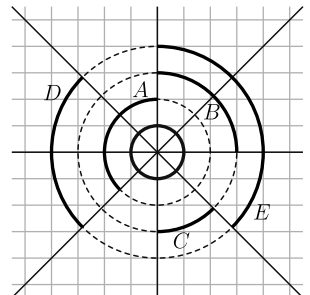
$$(x^2 - 4x + 4) + (x^2 + 4x + 4) = 0, \quad 2x^2 + 8 = 0, \quad x^2 = -4.$$

Gautoji lygtis  $x^2 = -4$  akivaizdžiai neturi sprendinių ( $x^2 \geq 0$ ), todėl jų neturi ir pradinė.

8. **(D)** D

**?** Iš apskritimo ilgio formulės  $2\pi r$  išplaukia, kad apskritimo ilgis yra tiesiogiai proporcingas apskritimo spindulio ilgiui  $r$ . Didžiausiojo apskritimo paveikslėlyje spindulys yra 4 kartus ilgesnis nei mažiausiojo apskritimo spindulys. Todėl ir pats didžiausias apskritimas yra 4 kartus ilgesnis už mažiausiąjį, o didžiausiojo apskritimo ketvirtis – lankas  $D$  – savo ilgiu yra lygus mažiausiajam apskritimui.

Renkamės atsakymą **D**.



! Langeliai, į kuriuos padalyta plokštuma, yra vienetiniai, todėl keturių pavaizduotųjų apskritimų spindulių ilgiai didėjimo tvarka lygūs 1, 2, 3, 4. Apskritimų ilgiai atitinkamai lygūs

$$c_1 = 2\pi \cdot 1 = 2\pi, \quad c_2 = 2\pi \cdot 2 = 4\pi, \quad c_3 = 2\pi \cdot 3 = 6\pi, \quad c_4 = 2\pi \cdot 4 = 8\pi.$$

Kiekvieną iš lankų  $A, B, C, D, E$  sudaro vienas ar keli vieno iš apskritimų aštuntadaliai. Šių lankų ilgiai atitinkamai lygūs

$$\frac{3}{8} \cdot c_2 = \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{2}{8} \cdot c_3 = \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{1}{8} \cdot c_3 = \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{2}{8} \cdot c_4 = 2\pi, \quad \frac{3}{8} \cdot c_4 = 3\pi.$$

Skaičiui  $c_1 = 2\pi$  yra lygus lanko  $D$  ilgis.

9. **(E)**  $a < 0$

? Uždavinį galima išspręsti, spėlioiant konkrečias skaičių  $a, b, c$  reikšmes. Pavyzdžiui, kai  $b = c = 1$ , tai su bet kokia reikšme  $a \neq 0$  turime

$$-2a^4b^3c^2 = -2a^4 < 0.$$

Kad tuo pačiu metu gautume  $3a^3b^5c^{-4} = 3a^3 < 0$ , galime imti  $a = -1$ . Tinkamas skaičių trejetas  $(a, b, c) = (-1, 1, 1)$  parodo, kad nelygybės **A**)  $ab > 0$  ir **B**)  $b < 0$  nebūtinai teisingos. Taigi galime atmesti atsakymus **A** ir **B**. Pastebėję, kad atspėtame tinkamame skaičių trejete vietoj  $c = 1$  galima imti ir  $c = -1$ , analogiškai atmetame atsakymus **C** ir **D**.

Renkamės atsakymą **E**.

?? Skaičiaus  $-2a^4b^3c^2 = (-b) \cdot 2(a^2bc)^2$  ženklas sutampa su skaičiaus  $-b$  ženklu. Skaičiaus  $3a^3b^5c^{-4} = ab \cdot 3(ab^2c^{-2})^2$  ženklas sutampa su skaičiaus  $ab$  ženklu. Taigi skaičių  $-b = (-1) \cdot b$  ir  $ab$  ženklai sutampa. Tai reiškia, kad skaičių  $-1$  ir  $a$  ženklai sutampa, t. y. kad garantuotai  $a < 0$ .

Renkamės atsakymą **E**.

! Uždavinio sąlygą galima ekvivalenčiai performuluoti taip: skaičių  $-2a^4b^3c^2$  ir  $3a^3b^5c^{-4}$  sandauga yra teigiama. Taigi visą informaciją, kurią turime apie  $a, b, c$ , galima užrašyti taip:

$$(-2a^4b^3c^2) \cdot (3a^3b^5c^{-4}) > 0,$$

$$-6a^7b^8c^{-2} > 0, \quad (-a) \cdot 6(a^3b^4c^{-1})^2 > 0.$$

Paskutinė nelygybė, o todėl ir uždavinio sąlyga ekvivalenti sąlygoms

$$-a > 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0.$$

Vadinasi, garantuotai galioja nelygybė  $a < 0$ , o kitos atsakymuose nurodytos nelygybės gali būti ir klaidingos.

10. **(A)** 15

? Tiesėje galima visaip stumdyti atkarpas  $AC$  ir  $BD$ , nekeičiant jų ilgio ir nepakeičiant taškų  $A, B, C, D$  tvarkos tiesėje, bei taip gauti be galo daug situacijų, kurios tenkina uždavinio sąlygą. Iš uždavinio formuluotės ir pateiktų atsakymų aišku, kad ieškomas atstumas visais atvejais turi būti toks pats. Jei atkarpų  $AC$  ir  $BD$  padėtį keisime, kuo labiau tolindami taškus  $A$  ir  $D$ , artėsime prie ribinio atvejo, kai  $B = C$ . Galima spėti, kad atstumas tarp atkarpų  $AC$  ir  $BD$  vidurio taškų liks toks pats ir šiuo ribiniu atveju. O šiuo atveju jis lygus  $\frac{AC}{2} + \frac{BD}{2} = 6 + 9 = 15$ .



Renkamės atsakymą **A**.

! Ieškomas atstumas  $d$  lygus  $\frac{AB}{2} + BC + \frac{CD}{2}$ . Pažymėkime  $BC = 2x$ . Tada

$$12 = AC = AB + BC = AB + 2x, \quad \frac{AB}{2} = 6 - x,$$

$$18 = BD = BC + CD = 2x + CD, \quad \frac{CD}{2} = 9 - x,$$

$$d = (6 - x) + 2x + (9 - x) = 15.$$

!! Ieškomas atstumas  $d$  lygus  $\frac{AB}{2} + BC + \frac{CD}{2}$ . Todėl

$$2d = AB + 2BC + CD = (AB + BC) + (BC + CD) = AC + BD = 12 + 18 = 30$$

ir  $d = 30 : 2 = 15$ .

11. **(D)** 0,137 m<sup>3</sup>

? Kol skaitiklio rodmuo bus  $\overline{91,ABC}$ , tol jis nebus tinkamas: čia  $\overline{ABC} > 876$ , ir netinka  $\overline{ABC} = 877, 878, 879$ , netinka  $\overline{ABC} \in [880; 889]$  (du skaitmenys lygūs 8) bei netinka  $\overline{ABC} \in [890; 999]$  ( $\overline{ABC}$  turi skaitmenį 9, sutampantį su pirmuoju rodmens skaitmeniu).

Toliau skaitiklio rodmuo bus  $\overline{92,ABC}$ . Mažiausią tokį tinkamą rodmenį gausime imdami tris mažiausias skirtingas  $A, B, C$  reikšmes, nelygias 2 ir 9, bei išrikiavę jas didėjimo tvarka:  $A = 0, B = 1, C = 3$ . Taigi teisingas atsakymas lygus  $92,013 - 91,876 = \dots 3 - \dots 6 = \dots 7$  (m<sup>2</sup>). Vienintelis iš penkių pateiktų atsakymų, kuris baigiasi skaitmeniu 7, yra **D**.

Renkamės atsakymą **D**.

! Nuosekliai išvardykime, kai keisis skaitiklio rodmuo:

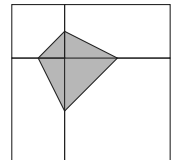
$$\overline{91,87A}, \text{ kur } A = 7, 8, 9 \text{ (netinka)} \rightarrow \overline{91,8B\dots}, \text{ kur } B = 8, 9 \text{ (netinka)} \rightarrow \\ \overline{91,9\dots} \text{ (netinka)} \rightarrow \overline{92,CDE}.$$

Taigi kol skaitiklyje keisis tik paskutiniai trys skaitmenys, tinkamo rodmenis negausime. Kai pagaliau pasikeis ir antrasis skaitmuo (padidės nuo 1 iki 2), galima tikėtis gauti skaičių, kurio visi skaitmenys skirtingi. Kad gautume mažiausią tokį skaičių  $\overline{92,CDE}$ , vietoj  $C$ ,  $D$ ,  $E$  turime įrašyti tris skirtingus mažiausius skaitmenis, nelygius 2 ir 9, rašydami juos didėjimo tvarka. Taigi turime imti  $C = 0$ ,  $D = 1$ ,  $E = 3$ . Vadinasi, pirmą kartą rodmenį vėl sudarys penki skirtingi skaitmenys, kai jis taps lygus 92,013. Vandens iki to laiko nutekės

$$92,013 - 91,876 = 0,013 + 92 - 91,876 = 0,013 + (1,000 - 0,876) = \\ = 0,013 + 0,124 = 0,137 \text{ (m}^3\text{)}.$$

## 12. **D** 21

! Galima įrodyti, kad nuspaltintas keturkampis yra lygiašonė trapecija. Tačiau bandyti pritaikyti jos ploto formulę nebūtų lengviausias sprendimo būdas. Vietoj to atskirai nagrinėkime du kvadratus ir du stačiakampius, į kuriuos padalytas didysis kvadratas. Jų matmenis galima pažymėti



$$a \times a, \quad b \times b, \quad a \times b, \quad b \times a.$$

Kiekvieno iš šių keturių keturkampių nuspaltintoji dalis yra statusis trikampis, kurio statinių ilgiai atitinkamai lygūs

$$\frac{a}{2} \text{ ir } \frac{a}{2}, \quad \frac{b}{2} \text{ ir } \frac{b}{2}, \quad \frac{a}{2} \text{ ir } \frac{b}{2}, \quad \frac{b}{2} \text{ ir } \frac{a}{2}.$$

Nuspaltintos srities plotas 3 lygus keturių nuspaltintųjų trikampių plotų sumai

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{8}.$$

Viso didžiojo kvadrato plotas lygus

$$a \cdot a + b \cdot b + a \cdot b + b \cdot a = a^2 + b^2 + 2ab = 8 \cdot \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{8} = 8 \cdot 3 = 24.$$

Vadinasi, kvadrato nuspaltintos dalies plotas lygus  $24 - 3 = 21$ .

!! Nagrinėkime keturis stačiakampius, į kuriuos padalytas didysis kvadratas (kad du iš jų taip pat yra kvadratai, galime nekreipti dėmesio). Tarkime, kad bet kurio iš šių stačiakampių matmenys yra  $x \times y$ . Jo nuspaltintoji dalis yra statusis trikampis, kurio statinių ilgiai yra  $\frac{x}{2}$  ir  $\frac{y}{2}$ . Taigi stačiakampio nuspaltintos dalies plotas lygus  $\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2} = \frac{xy}{8}$ . Jis sudaro  $\frac{1}{8}$  stačiakampio ploto  $xy$ .

Kadangi kiekvieno iš keturių stačiakampių nuspaltintos dalies plotas lygus  $\frac{1}{8}$  to stačiakampio ploto, tai ir visos nuspaltintos didžiojo kvadrato dalies plotas lygus  $\frac{1}{8}$  viso kvadrato ploto. Vadinasi, jei padalysime didžiojo kvadrato plotą į 8 aštuntadalių, tai nuspaltintos srities plotas  $S = 3$  lygus vienam iš jų, o nuspaltintos kvadrato dalies plotas lygus likusiems 7 aštuntadaliams, taigi lygus  $7S = 21$ .

### 13. (E) 12

! Užrašykime duotus skaičius kitu pavidalu:

$$m = 2^{2021} + 2^{2022} = 2^{2021} \cdot (1 + 2) = 2^{2021} \cdot 3,$$

$$n = 3^{2021} + 3^{2022} = 3^{2021} \cdot (1 + 3) = 2^2 \cdot 3^{2021}.$$

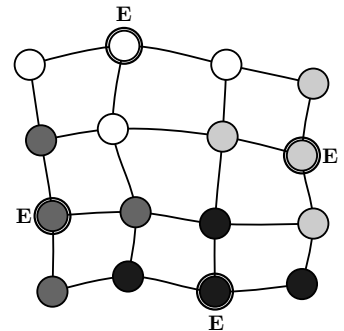
Iš tiesų gavome skaičių  $m$  ir  $n$  skaidinius pirminiais daugikliais. Kad gautume šių skaičių didžiausią bendrą daliklį, turime imti jų vienintelius du pirminius daliklius 2 ir 3 bei jų tokius laipsnius  $2^a$  ir  $3^b$ , iš kurių dalytųsi tiek  $m$ , tiek  $n$ . Abu skaičiai  $m$  ir  $n$  dalijasi iš  $2^2$ , bet  $n$  nesidalija iš  $2^3$ . Abu skaičiai  $m$  ir  $n$  dalijasi iš  $3^1$ , bet  $m$  nesidalija iš  $3^2$ . Vadinasi,  $\text{DBD}(m, n) = 2^2 \cdot 3^1 = 12$ .

### 14. (B) 4

! Atkreipkime dėmesį į keturis vienas nuo kito nutolusius miestus – „kampinius“, kurių kiekvienas turi tik po du gretimus miestus. Jokia elektrinė neaprūpins elektra dviejų iš šių miestų, todėl elektrinių reikės pastatyti mažiausiai keturias.

Kita vertus, keturias elektrines pastačius, kaip parodyta paveikslėlyje, elektra bus aprūpinti visi miestai.

Vadinasi, mažiausias elektrinių, elektra aprūpinančių visus miestus, skaičius lygus 4.



!! Visus miestus elektra gali aprūpinti keturios elektrinės. Tai galima pagrįsti pavyzdžiu, nurodant tinkamus keturis miestus (žr. ! dalį).

Kita vertus, kiekvienas miestas turi daugiausiai keturis gretimus. Todėl kiekviena pastatyta elektrinė elektra aprūpins daugiausiai penkis miestus. Kadangi  $3 \cdot 5 < 16$ , tai trijų elektrinių nepakaks.

Vadinasi, mažiausias elektrinių, elektra aprūpinančių visus miestus, skaičius lygus 4.

15. **(E)** Vienareikšmiškai nustatyti neįmanoma

! Tikrinant duotus atsakymus, galima pastebėti, kad senelės amžius metais **B)** 77 tenkina uždavinio sąlygą. Tačiau atsakymas **E** verčia nesirinkti atsakymo **B**, kol neįsitikinome, kad senelės amžius negali būti kitoks. O tas amžius gali būti kitoks: tinka ir **C)** 79 metai. Vadinasi, senelės amžiaus neįmanoma nustatyti vienareikšmiškai.

!! Senelės amžių metais pažymėkime  $n$ . Tai bet koks natūralusis skaičius, kuriam skaičiai  $|n - 75|$ ,  $|n - 78|$ ,  $|n - 81|$  yra tam tikra tvarka užrašyti skaičiai 1, 2, 4. Iš  $|n - 75| \leq 4$  ir  $|n - 81| \leq 4$  atitinkamai gauname  $n \leq 79$  ir  $n \geq 77$ . Patikrinę  $n = 77, 78, 79$  gauname, kad tinka tiek  $n = 77$ , tiek  $n = 79$ . Vadinasi, senelės amžiaus neįmanoma nustatyti vienareikšmiškai.

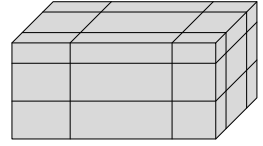
!!! Skaičių tiesėje taškai 75 ir 81 yra simetriški taško 78 atžvilgiu. Dėl šios simetrijos bet kurie du natūralieji skaičiai  $78 + x$  ir  $78 - x$  galimą senelės amžių metais nusako arba abu, arba nė vienas. Senelės amžius nėra 78 metai, todėl šio amžiaus galimų reikšmių skaičius yra lyginis. Vadinasi, senelės amžiaus neįmanoma nustatyti vienareikšmiškai.

16. **(B)** 220

! Dovydo skaičių sekoje pirmieji trys skaičiai yra 2, 20 ir 22, toliau eina triženkliai ir keturženkliai skaičiai. Visi tinkami triženkliai skaičiai turi pavidalą  $\overline{2AB}$ , kur skaitmenys  $A$  ir  $B$  priklauso aibei  $\{0, 2\}$ . Tokių skaičių yra 4. Juos galima iš karto užrašyti: 200, 202, 220, 222. Visi tinkami keturženkliai skaičiai, ne didesni už 2022, turi pavidalą  $\overline{20CD}$ , kur skaitmenys  $C$  ir  $D$  priklauso aibei  $\{0, 2\}$ . Vėlgi tokių skaičių yra 4. Juos taip pat galima užrašyti, nors tai nebūtina: 2000, 2002, 2020, 2022. Iš viso sekoje yra  $3 + 4 + 4 = 11$  skaičių. Vidurinis iš jų yra šeštasis skaičius. Tai yra sekos trečiasis triženklis skaičius 220.

## 17. © 3S

! Žymėti 27-ių mažesniųjų stačiakampių gretasienių (trumpiau juos vadiname tiesiog 27-iais gretasieniais) matmenis raidėmis ir rašyti šių gretasienių paviršiaus plotų išraiškas nėra lengviausias sprendimo būdas. Mąstykime abstrakčiau.



Didysis stačiakampis gretasienis (trumpiau: didysis gretasienis) turi tris priešingų sienų poras. Kiekvienoje poroje sienų plotai lygūs. Todėl visų 6 sienų plotus galima pažymėti  $S_1, S_1, S_2, S_2, S_3, S_3$ . Čia  $S = 2S_1 + 2S_2 + 2S_3$ .

Nagrinėkime dvi priešingas didžiojo gretasienio sienas, kurių plotas yra  $S_1$ . Pastebėkime, kad 27-ių gretasienių sienos, lygiagrečios su šiomis dviem sienomis arba esančios jose, sudaro 6 lygius stačiakampius, kurių kiekvieno plotas lygus  $S_1$ : du tokie stačiakampiai yra pačios dvi didžiojo gretasienio sienos, ir dar po du tokius stačiakampius turime suglaustus kiekvienoje iš dviejų plokštumų, lygiagrečių su dviem didžiojo gretasienio sienomis. Taigi 27-ių gretasienių visų tokių sienų plotų suma lygi  $6S_1$ .

Analogiškai nagrinėdami dvi priešingas didžiojo gretasienio sienas, kurių plotas yra  $S_2$ , gauname 27-ių gretasienių kitų sienų plotų sumą  $6S_2$ , o nagrinėdami dvi priešingas didžiojo gretasienio sienas, kurių plotas yra  $S_3$ , gauname 27-ių gretasienių visų likusių sienų plotų sumą  $6S_3$ .

Vadinasi, 27-ių gretasienių paviršiaus plotų suma lygi

$$6S_1 + 6S_2 + 6S_3 = 3(2S_1 + 2S_2 + 2S_3) = 3S.$$

## 18. (B) 21

! Tarkime, kad nagrinėjama penkių skaičių seka yra  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ . Turime rasti  $x_3$ . Pažymėkime  $x_1 + x_2 = y$ ,  $x_4 + x_5 = z$ . Tada

$$\frac{y + x_3}{3} = 19, \quad \frac{x_3 + z}{3} = 28, \quad \frac{y + x_3 + z}{5} = 24,$$

$$y = (y + x_3 + z) - (x_3 + z) = 120 - 84 = 36,$$

$$z = (y + x_3 + z) - (y + x_3) = 120 - 57 = 63.$$

Vadinasi,  $36 + x_3 + 63 = y + x_3 + z = 120$  ir  $x_3 = 120 - 99 = 21$ .

!! Tarkime, kad nagrinėjama penkių skaičių seka yra  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ . Turime rasti  $x_3$ . Kadangi  $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 19$ , tai

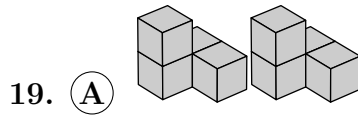
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \cdot 19 = 57 \quad \text{ir analogiškai}$$

$$x_3 + x_4 + x_5 = 3 \cdot 28 = 84, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 24 \cdot 5 = 120.$$

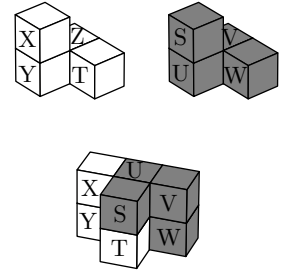
Iš šių lygybių galima rasti  $x_3$ , pastebėjus tapatybę

$$x_3 = (x_1 + x_2 + x_3) + (x_3 + x_4 + x_5) - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5).$$

Taigi  $x_3 = 57 + 84 - 120 = 21$ .

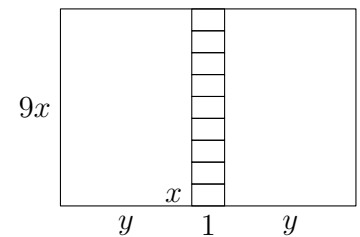


! Žinoma, tokiam uždavinyje reikia, pasitelkus geometrinę vaizduotę, įžvelgti, kaip figūra sudedama iš tam tikrų dviejų detalių. Tikrinant atsakymus, galima kaskart mintyse perrinkti visas galimybes, kurių figūros dalį gali sudaryti viena iš detalių, ir kaskart tikrinti, ar likusi figūros dalis lygi antrai iš dviejų detalių. Tikrinant atsakymus **C–E**, padeda pastebėjimas, kad šiais atvejais vienoje iš detalių yra kubelis, turintis bendrą sieną su trimis kitais, o figūroje tėra du tokie kubeliai. Tačiau nė to gali neprireikti, jei tikrinsime atsakymus iš eilės ir iš karto aptiksime, kad figūrą įmanoma sudėti iš atsakyme **A** pavaizduotų detalių (žr. pav.).



20. **(D)** 30

? Turime nagrinėti 12 panašių stačiakampių: devynis mažiausiusius, didįjį ir du vidutinius. Galima nuspėti, kad devyni mažiausieji stačiakampiai lygūs, tad kiekvieno iš jų matmenis pažymėkime  $1 \times x$ . Tada likę trys stačiakampiai – didysis ir du vidutiniai – turi po kraštinę, kurios ilgis yra  $9x$ . Galima nuspėti, kad  $9x$  yra dviejų vidutinių stačiakampių ilgis (o ne plotis) ir kad šie stačiakampiai lygūs. Jų matmenis pažymėkime  $9x \times y$ . Savo ruožtu didžiojo stačiakampio atveju  $9x$  yra jo plotis. Jis 9 kartus didesnis už mažiausiojo stačiakampio plotį  $x$ . Prisiminę apie stačiakampių panašumą gauname, kad ir didžiojo stačiakampio ilgis 9 kartus didesnis už mažiausiojo stačiakampio ilgį bei lygus  $9 \cdot 1 = 9$ . Kita vertus, jis lygus  $y + 1 + y$ , todėl  $9 = 2y + 1$  ir  $y = 4$ . Kadangi vidutinis ir mažiausias stačiakampiai panašūs, tai jų ilgio ir pločio santykiai lygūs:



$$\frac{9x}{4} = \frac{1}{x}, \quad 9x^2 = 4 \quad (x > 0), \quad 3x = 2, \quad x = \frac{2}{3}.$$

Vadinasi, didžiojo stačiakampio perimetras lygus

$$9 + 9 + 9x + 9x = 9 + 9 + 6 + 6 = 30.$$

! Turime nagrinėti 12 panašių stačiakampių. Stačiakampių panašumas reiškia, kad kiekvieno iš jų pločio ir ilgio santykis yra toks pats. Šį santykį pažymėkime  $x$  (taigi čia  $x < 1$  yra skaičius, iš kurio reikia padauginti stačiakampio ilgį, kad gautume plotį).

Kiekvieno iš devynių mažiausiųjų stačiakampių ilgis yra toks pats – lygus 1. Todėl kiekvieno iš jų plotis lygus  $x$ . Tada likę trys stačiakampiai – didysis ir du vidutiniai – turi po kraštinę, kurios ilgis yra  $9x$ . Didžiojo stačiakampio atveju tai yra jo plotis, todėl jo ilgis lygus  $9x : x = 9$ . Jei  $9x$  būtų vidutinių stačiakampių plotis, tai ir jų ilgis būtų 9. Bet jie akivaizdžiai nelygūs didžiajam stačiakampiui, todėl  $9x$  yra jų ilgis, o kiekvieno iš jų plotis  $y$  lygus  $9x \cdot x = 9x^2$ . Didžiojo stačiakampio ilgis lygus  $9 = y + 1 + y = 18x^2 + 1$ , ir

$$18x^2 = 8, \quad 9x^2 = 4 \quad (x > 0), \quad 3x = 2, \quad x = \frac{2}{3}.$$

Vadinasi, didžiojo stačiakampio perimetras lygus

$$9 + 9 + 9x + 9x = 9 + 9 + 6 + 6 = 30.$$

## 21. © 12

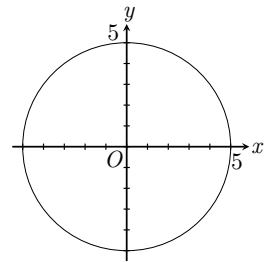
! Duotąjį apskritimą sudaro taškai  $(x; y)$ , kurių atstumas iki taško  $O = (0; 0)$  lygus 5, t. y. kuriems  $\sqrt{x^2 + y^2} = 5$  arba  $x^2 + y^2 = 25$ . Taigi reikia nustatyti, kiek sveikųjų sprendinių  $(x; y)$  turi lygtis  $x^2 + y^2 = 25$ .

Žvelgiant į paveikslėlį, lengva pastebėti keturis lygties sprendinius, kurie atitinka visas keturias apskritimo sankirtas su koordinatinių ašimis:  $(\pm 5; 0)$ ,  $(0; \pm 5)$ . Taip pat galima prisiminti statųjį trikampį, kurio kraštinių ilgiai lygūs 3, 4, 5, ir taip pastebėti lygties sprendinius  $(3; 4)$  bei  $(4; 3)$ . Jei lygybė  $x^2 + y^2 = 25$  teisinga su tam tikromis reikšmėmis  $x$  ir  $y$ , tai ji liks teisinga, vietoj  $x$  įrašius  $-x$  arba vietoj  $y$  įrašius  $-y$ . Todėl iš turimų natūraliųjų sprendinių galime gauti daugiau sveikųjų sprendinių:

$$(-3; 4), \quad (3; -4), \quad (-3; -4), \quad (-4; 3), \quad (4; -3), \quad (-4; -3).$$

Gavome visus 12 sprendinių, kuriems arba  $|x| = 0$ ,  $|y| = 5$ , arba  $|x| = 5$ ,  $|y| = 0$ , arba  $|x| = 3$ ,  $|y| = 4$ , arba  $|x| = 4$ ,  $|y| = 3$ .

„Sumedžioję“ 12 sprendinių ir ieškodami naujų, tarkime, kad  $(x; y) = (x_0; y_0)$  yra koks nors lygties  $x^2 + y^2 = 25$  sveikasis sprendinys. Tada neneigiamų skaičių pora  $(x; y) = (|x_0|; |y_0|)$  taip pat yra šios lygties sprendinys. Čia  $x_0^2 \leq 25$ , todėl  $|x_0| = 0, 1, 2, 3, 4$  arba 5. Galime atmesti reikšmes 1 ir 2, nes tada  $y_0^2 = 25 - x_0^2$  nėra sveikojo skaičiaus kvadratas. Jei  $|x_0| = 0, 3, 4$  arba 5, tai atitinkamai  $|y_0| = 5, 4, 3$  arba 0. Vadinasi,  $(x_0; y_0)$  sutampa su vienu iš mūsų jau gautų 12 sprendinių, o duotam apskritimui priklauso lygiai 12 taškų su sveikosiomis koordinatėmis.



## 22. (A) 1

! Tarkime, kad triženklis skaičius  $n = \overline{ABC}$  tenkina uždavinio sąlygą, taigi  $n = 5ABC$ . Kadangi  $n$  dalijasi iš 5, tai  $C = 0$  arba  $C = 5$ . Jei  $C = 0$ , tai  $n = 5ABC = 0$  – prieštara. Taigi  $C = 5$ , o  $n = 25AB$  dalijasi iš 25. Natūralieji skaičiai, kurie dalijasi iš 25, baigiasi skaitmenimis  $\dots 25, \dots 50, \dots 75, \dots 00$ . Kadangi  $C = 5$ , tai  $B = 2$  arba  $B = 7$ . Jei  $B = 2$ , tai skaičius  $n = 5ABC$  lyginis, o tai prieštarauja sąlygai  $C = 5$ . Taigi  $B = 7$  ir

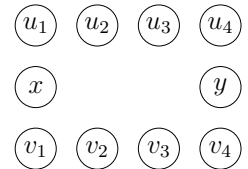
$$n = \overline{A75} = 25A \cdot 7 = 175A, \quad 100A + 75 = 175A, \quad 75A = 75, \quad A = 1.$$

Vadinasi, egzistuoja vienintelis tinkamas skaičius  $n$ . Tai skaičius 175, iš tiesų tenkinantis uždavinio sąlygą.

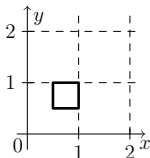
## 23. (E) Kitas skaičius

! Įrašytus skaičius pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje. Turime rasti  $x$ . Visų 10 skaičių suma lygi

$$1+2+3+\dots+10 = 55 = (u_1+\dots+u_4)+(v_1+\dots+v_4)+x+y = 24+24+x+y.$$



Taigi  $x+y = 55 - 24 - 24 = 7$ , ir  $y$  reikšmė negali būti labai didelė:  $y \leq 6$ . Tuo pat metu suma  $u_4 + y + v_4 = 25$  yra gana didelė: ji pasiekama, tik jei imsime didžiausias galimas nežinomųjų reikšmes  $y = 6$ ,  $u_4 + v_4 = 10 + 9$ . Vadinasi,  $y = 6$  ir  $x = 7 - 6 = 1$ . (Likę 8 skaičiai gali būti, pavyzdžiui, tokie:  $u_1 = 2$ ,  $u_2 = 5$ ,  $u_3 = 7$ ,  $u_4 = 10$ ,  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 4$ ,  $v_3 = 8$ ,  $v_4 = 9$ .)



## 24. (C)

? Duotąjį kvadratą sudarančios kraštinės yra keturios atkarpos, lygiagrečios su koordinačių ašimis.

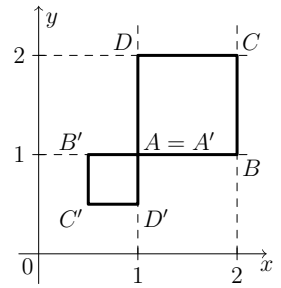
Jei atkarpa yra lygiagreti su  $Ox$  ašimi, tai jos kiekvieno taško  $y$  koordinatė yra tokia pati. Perkėlus visus tokios atkarpos taškus, kaip nurodyta uždavinio sąlygoje, naujoje taškų aibėje kiekvieno taško  $y$  koordinatė vėl bus tokia pati: jei iki perkėlimo kiekvienam taškui turėjome  $y = y_0$ , tai po perkėlimo kiekvienam taškui turėsime  $y = \frac{1}{y_0}$ . Tai reiškia, kad po perkėlimo visi atkarpos taškai atsidurs tiesėje  $y = \frac{1}{y_0}$  (lygiagrečioje su  $Ox$  ašimi). Analogiškai, jei atkarpa yra lygiagreti su  $Oy$  ašimi, tai po perkėlimo visi atkarpos taškai taip pat atsidurs vienoje tiesėje (lygiagrečioje su  $Oy$  ašimi).

Vadinasi, po perkėlimo visų keturių kvadrato kraštinių taškai atsidurs keturiuose tiesėse. Pažymėti taškai priklauso keturioms tiesėms tik atsakyme C, o likusiuose keturiuose atsakymuose pavaizduotos kreivių atkarpos, esą sudarančios perkeltąjį kvadratą, netinka.

Renkamės atsakymą C.

! Kvadrato viršūnes pažymėkime taip:  $A = (1; 1)$ ,  $B = (2; 1)$ ,  $C = (2; 2)$ ,  $D = (1; 2)$ .

Nagrinėkime kvadrato kraštinę  $AB$ . Išsiaiškinkime, kokios yra jos taškų koordinatės. Ji yra lygiagreti su  $Ox$  ašimi, todėl jos kiekvieno taško  $y$  koordinatė yra tokia pati – lygi 1. Taškui judant kraštine nuo  $A$  iki  $B$ , keičiasi tik jo  $x$  koordinatė: ji didėja nuo 1 iki 2, įgydama visas reikšmes tarp šių dviejų skaičių. Vadinasi, kraštinę  $AB$  sudaro visi taškai  $(a; 1)$ , kur  $a \in [1; 2]$ . Perkėlus šiuos taškus, kaip nurodyta uždavinio sąlygoje, gaunama visų taškų  $(\frac{1}{a}; 1)$  aibė, kur  $a \in [1; 2]$ , taigi visų taškų  $(b; 1)$  aibė, kur  $b = \frac{1}{a}$  yra bet koks skaičius iš intervalo  $[\frac{1}{2}; 1]$ . Gautoji taškų aibė yra tiesės  $y = 1$  atkarpa, jungianti taškus  $A'(1; 1)$  ir  $B'(\frac{1}{2}; 1)$ .



Analogiškai nagrinėdami kitas kvadrato kraštines  $BC$ ,  $CD$  ir  $DA$  gausime, kad po perkėlimo jos atitinkamai tampa tiesių atkarpomis  $B'C'$ ,  $C'D'$  ir  $D'A'$ , kur  $C' = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ ,  $D' = (1; \frac{1}{2})$ . Vadinasi, kvadrato atvaizdį, gaunamą po taškų perkėlimo, sudaro keturios tiesių atkarpos, iš eilės ratu jungiančios taškus  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ . Taigi šis atvaizdis yra keturkampis  $A'B'C'D'$  – kvadratas, pavaizduotas atsakyme **C**.

## 25. **(B)** 2

! Dvidešimtkampio forma uždaviniui reikšmės neturi, tad dėl patogumo galime įsivaizduoti, kad jis taisyklingasis. Nagrinėkime viršūnę 1 ir jai priešingą viršūnę  $t$ . Kiekvienoje pusėje nuo šias viršūnes jungiančios įstrižainės yra po 9 viršūnes. Tarkime, kad vienoje pusėje, einant nuo viršūnės 1 iki viršūnės  $t$ , viršūnės iš eilės pažymėtos skaičiais  $x_1, x_2, \dots, x_9$ , o kitoje pusėje – skaičiais  $y_1, y_2, \dots, y_9$ . Tada:

- skaičiai  $x_1$  ir  $y_1$ , gretimi skaičiui 1, tegali būti lygūs 2 ir 3; dėl simetrijos galime tarti, kad  $x_1 = 2$  ir  $y_1 = 3$ ;
- skaičiai  $x_2$  ir  $y_2$ , gretimi skaičiams 2 ir 3, tegali būti lygūs 4 ir 5; tinka tik galimybė  $x_2 = 4$  ir  $y_2 = 5$ ;
- analogiškai iš eilės gauname

$$x_3 = 6 \text{ ir } y_3 = 7, \quad x_4 = 8 \text{ ir } y_4 = 9, \quad \dots, \quad x_9 = 18 \text{ ir } y_9 = 19;$$

- likęs nežinomas skaičius  $t$  lygus 20.

Vadinasi, iš esmės tėra vienintelis viršūnių numeracijos būdas: pasirenkamos dvi gretimos viršūnės, kurios bus pažymėtos skaičiais 1 ir 2, o tada iš eilės ratu viršūnės pažymimos skaičiais

$$1, 2, 4, 6, 8, \dots, 18, 20, 19, 17, 15, \dots, 7, 5, 3 \text{ (ir vėl 1)}.$$

Taigi raudonai nudažytos lygiai dvi dvidešimtkampio kraštinės – tos, kurios jungia viršūnes 1 ir 2 bei 20 ir 19.

!! Dvidešimtkampio viršūnės, gretimos viršūnei 1, tegali būti pažymėtos skaičiais 2 ir 3. Pradėję nuo viršūnės 1 ir iš eilės ratu imdami viršūnes, gauname skaičius 1,  $x_1 = 2$ ,  $x_2, x_3, \dots, x_9, t$ , kuriems  $x_2 \leq 4$ ,  $x_3 \leq 6$ ,  $\dots$ ,  $x_9 \leq 18$ ,  $t \leq 20$ . Pradėję nuo viršūnės 1 ir apeidami viršūnes kita kryptimi, gauname skaičius 1,  $y_1 = 3$ ,  $y_2, y_3, \dots, y_9, t$ , kuriems  $y_2 \leq 5$ ,  $y_3 \leq 7$ ,  $\dots$ ,  $y_9 \leq 19$ . Iš gautųjų nelygybių išplaukia:

- $t = 20$ , o taip gali būti, tik jei gretimų narių skirtumas sekoje  $x_1, x_2, \dots, x_9, t$  visada lygus 2;
- $y_9 = 19$ , o taip gali būti, tik jei gretimų narių skirtumas sekoje  $1, y_1, y_2, \dots, y_9$  visada lygus 2.

Taigi raudonai nudažytos lygiai dvi dvidešimtkampio kraštinės – tos, kurios jungia viršūnes 1 ir 2 bei 20 ir 19.

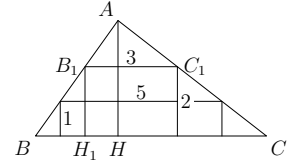
26. (B)  $\frac{7}{2}$

! Ieškomą aukštinės ilgį pažymėkime  $h$ , o šios aukštinės pagrindą pažymėkime  $H$ . Pažymėkime taškus, kaip parodyta paveikslėlyje.

Taškas  $B_1$  dalija atkarpą  $AB$  į atkarpas  $AB_1$  ir  $B_1B$ . Santykių  $AB_1 : AB$  ir  $B_1B : AB$  suma lygi 1. Atkarpos  $B_1C_1$  ir  $BC$  lygiagrečios, todėl trikampiai  $AB_1C_1$  ir  $ABC$  panašūs, ir  $AB_1 : AB = B_1C_1 : BC = \frac{3}{a}$  (čia  $a = BC$ ). Statieji trikampiai  $B_1BH_1$  ir  $ABH$  turi bendrą smailųjį kampą, todėl yra panašūs, ir  $B_1B : AB = B_1H_1 : AH = \frac{2}{h}$ . Vadinasi,  $\frac{3}{a} + \frac{2}{h} = 1$ . Šią lygybę gavome nagrinėdami  $2 \times 3$  stačiakampio viršūnes. Analogiškai nagrinėdami  $1 \times 5$  stačiakampio viršūnes, gauname  $\frac{5}{a} + \frac{1}{h} = 1$ . Vadinasi,

$$5 \cdot \left(1 - \frac{2}{h}\right) = 5 \cdot \frac{3}{a} = 3 \cdot \frac{5}{a} = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{h}\right),$$

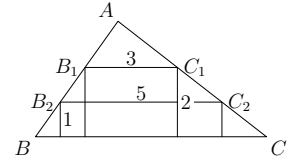
$$5 - \frac{10}{h} = 3 - \frac{3}{h}, \quad \frac{7}{h} = 2, \quad h = \frac{7}{2}.$$



!! Ieškomą aukštinės ilgį pažymėkime  $h$ . Pažymėkime taškus, kaip parodyta paveikslėlyje.

Kadangi atkarpos  $B_1C_1$  ir  $B_2C_2$  yra lygiagrečios su atkarpa  $BC$ , tai jos lygiagrečios tarpusavyje, o trikampiai  $AB_1C_1$  ir  $AB_2C_2$  panašūs. Šių trikampių panašumo koeficientas lygus  $B_1C_1 : B_2C_2 = 3 : 5$ . Jis nusako ir trikampių atitinkamų aukštinių ilgių santykį. Trikampio  $AB_1C_1$  vienos aukštinės ilgis lygus atstumui nuo  $A$  iki atkarpos  $B_1C_1$ , ir tokiu būdu jis lygus atstumo  $h$  nuo  $A$  iki atkarpos  $BC$  bei atstumo 2 tarp atkarpos  $B_1C_1$  ir  $BC$  skirtumui  $h - 2$ . Trikampio  $AB_2C_2$  atitinkamos aukštinės ilgis analogiškai lygus  $h - 1$ . Vadinasi,

$$(h-2) : (h-1) = 3 : 5, \quad 5(h-2) = 3(h-1), \quad 2h = 7, \quad h = \frac{7}{2}.$$



27. ©  $2N$ 

! Pažymėkime  $a = \sqrt{N^2 + N + 1}$  ir  $b = \sqrt{9N^2 + N + 1}$ . Lengva pastebėti, kad skaičius  $a^2 = N^2 + N + 1$  yra didesnis už  $N^2$  ir todėl  $a > N$ . Pamėginkime išsiaiškinti, ar šios nelygybės dešinėje pusėje neišeitų įrašyti  $N + 1$ . Tam reikia palyginti  $a^2$  ir  $(N + 1)^2 = N^2 + 2N + 1$ . Matome, kad  $(N + 1)^2 = a^2 + N > a^2$ , todėl  $a < N + 1$  ir  $a \in (N; N + 1)$ . Analogiškai į intervalą tarp dviejų gretimų natūraliųjų skaičių galima įsprausti skaičių  $b$ :

$$b^2 > 9N^2 \text{ ir } b > 3N; \quad (3N + 1)^2 = 9N^2 + 6N + 1 > b^2 \text{ ir } b < 3N + 1.$$

Taigi  $b \in (3N; 3N + 1)$ . Vadinas, tarp skaičių  $a$  ir  $b$  yra tiek natūraliųjų skaičių, kiek jų yra intervale  $[N + 1; 3N]$ . Tai visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki  $3N$ , išskyrus natūraliuosius skaičius nuo 1 iki  $N$ . Taigi tarp  $a$  ir  $b$  yra  $3N - N = 2N$  natūraliųjų skaičių.

28. A  $\frac{1}{12}$ 

? Prizmės aukštinės ilgį ir pagrindo kraštinės ilgį atitinkamai pažymėkime  $h$  ir  $a$ . Kiekvienas nupjautas kamputis yra trikampė piramidė, kurios aukštinės ilgis yra  $h$ . Galima nuspėti, kad tokios piramidės pagrindas yra lygiašonis trikampis, kurio šoninių kraštinių ilgiai lygūs  $\frac{a}{2}$ , o kampo tarp šoninių kraštinių didumas yra  $120^\circ$  (taisyklingojo šešiakampio kampas). Taigi tokios piramidės pagrindo plotas  $S_1$  lygus  $\frac{a^2 \sin 120^\circ}{8} = \frac{a^2 \sin 60^\circ}{8}$ . Kita vertus, prizmės pagrindą (taisyklingąjį šešiakampį) galima padalyti į šešis lygius lygiakraščius trikampius, kurių kiekvieno plotas  $S_2$  lygus  $\frac{a^2 \sin 60^\circ}{2} = 4S_1$ .

Ieškomas prizmės nupjautos dalies ir pačios prizmės tūrių santykis lygus

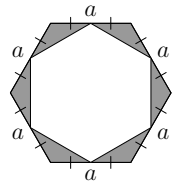
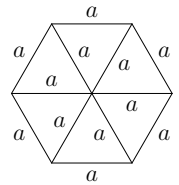
$$\frac{6 \cdot \frac{S_1 h}{3}}{6S_2 \cdot h} = \frac{S_1}{3S_2} = \frac{S_1}{3 \cdot 4S_1} = \frac{1}{12}.$$

Renkamės atsakymą A.

! Prizmės aukštinės ilgį, pagrindo plotą ir pagrindo kraštinės ilgį atitinkamai pažymėkime  $h$ ,  $S$ ,  $a$ . Prizmės pagrindas yra taisyklingasis šešiakampis. Taisyklingąjį šešiakampį galima sudėti iš šešių lygiakraščių trikampių (žr. pav.). Kiekvieno iš šių trikampių plotas lygus  $\frac{a^2 \sin 60^\circ}{2}$ , todėl  $S = 6 \cdot \frac{a^2 \sin 60^\circ}{2} = 3a^2 \sin 60^\circ$ . Taisyklingojo šešiakampio kiekvieno kampo didumas lygus  $60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$ . Prizmės tūris lygus  $Sh$ .

Nupjovus prizmės kampučius, naujo viršutinio pagrindo – taip pat taisyklingojo šešiakampio – viršūnės yra pradinio viršutinio pagrindo kraštinių vidurio taškai (kitais vietoj šoninių prizmės sienų gauti trikampiai nebūtų lygiašoniai). Kiekvienas iš šešių nupjautų kampučių iš tikrųjų yra trikampė piramidė, kurios aukštinės ilgis yra  $h$ , o pagrindas yra vienas iš šešių paveikslėlyje nuspaltvintų trikampių. Kiekvieno iš šių trikampių plotas  $S_1$  lygus  $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \sin 120^\circ = \frac{a^2 \sin 60^\circ}{8}$ . Remiantis piramidės tūrio formule, kiekvieno kampučio tūris lygus  $\frac{S_1 h}{3}$ , o prizmės nupjautos dalies visas tūris lygus  $6 \cdot \frac{S_1 h}{3} = 2S_1 h$ . Taigi tūrio dalis, kurią prarado prizmė, lygi

$$\frac{2S_1 h}{Sh} = \frac{2S_1}{S} = \frac{2 \cdot \frac{a^2 \sin 60^\circ}{8}}{3a^2 \sin 60^\circ} = \frac{1}{12}.$$



29. © 7 kg

! Keturių sunkiausių svarmenų bendra masė  $9 + 10 + 11 + 12 = 42$  (kg) yra tik 1 kg didesnė už svarmenų masę 41 kg vienoje iš dėžių. Tai pastebėjus natūralu spėti, kad toje dėžėje yra 12 kg, 11 kg, 10 kg ir  $41 - 12 - 11 - 10 = 8$  (kg) svarmenys. Panašiai, imdami keturis sunkiausius iš likusių 8 svarmenų (9 kg, 7 kg, 6 kg, 5 kg), gausime 27 kg masę, o 26 kg gausime, vietoj 5 kg svarmens imdami  $26 - 9 - 7 - 6 = 4$  (kg) svarmenį. Taip gauname tinkamą pavyzdį, kaip svarmenys gali būti sudėti dėžėse:

$$41 = 12 + 11 + 10 + 8, \quad 26 = 9 + 7 + 6 + 4, \quad 5 + 3 + 2 + 1 (= 11).$$

Vadinasi, 9 kg svarmuo gali būti vienoje dėžėje su 7 kg svarmeniu.

Renkamės atsakymą C.

! Keturių vienos dėžės svarmenų, kurių bendra masė yra 41 kg, mases kilogramais didėjimo tvarka pažymėkime  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Keturių vienos dėžės svarmenų, kurių bendra masė yra 26 kg, mases kilogramais didėjimo tvarka pažymėkime  $y_1, y_2, y_3, y_4$ .

Jei  $x_2, x_3, x_4$  reikšmės nėra didžiausios galimos (10, 11, 12), tai  $x_2 < 10$  ir

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 8 + 9 + 11 + 12 < 41.$$

Todėl  $x_2 = 10, x_3 = 11, x_4 = 12$  ir  $x_1 = 41 - x_2 - x_3 - x_4 = 8$ .

Jei  $y_2, y_3, y_4$  reikšmės nėra didžiausios (6, 7, 9) iš likusių galimų, tai  $y_2 < 6$  ir

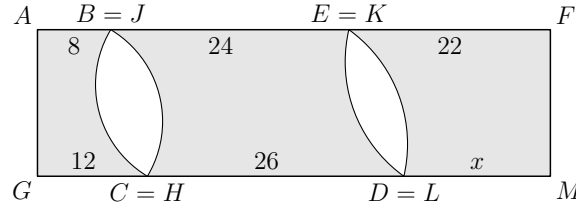
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 4 + 5 + 7 + 9 < 26.$$

Todėl  $y_2 = 6, y_3 = 7, y_4 = 9$  ir  $y_1 = 26 - y_2 - y_3 - y_4 = 4$ .

Vadinasi, 9 kg svarmuo yra vienoje dėžėje su 7 kg svarmeniu, ir toje dėžėje nėra svarmenų, kurių masės yra 3, 5, 8 arba 10 kilogramų.

30. **D** 16

? Stačiakampis  $AFMG$  padalytas į 5 sritis:  $ABHG$ ,  $BCJH$ ,  $CDKJ$ ,  $DELK$  ir  $EFML$ . Išvelgus ar nujautus kai kurias simetrijas (sritys  $BCJH$  ir  $DELK$  turi vertikalias simetrijos ašis), galima spėti, kad sritį  $ABHG$ , srities  $CDKJ$  simetrinį atvaizdį horizontalios tiesės atžvilgiu ir sritį  $EFML$  galima lygiagrečiai sustumti į naują, mažesnę stačiakampį:

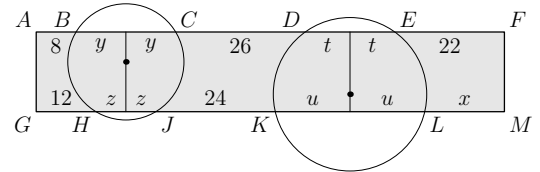


Jame matome, kad

$$AF = GM, \quad 8 + 24 + 22 = 12 + 26 + x, \quad x = 16.$$

Renkamės atsakymą **D**.

! Iš dviejų apskritimų centrų išveskime statmenis į tieses  $AF$  ir  $GM$ . Tiesės, kuriose yra šie statmenys, yra atitinkamų apskritimų simetrijos ašys, o kartu ir tiesių  $AF$  bei  $GM$  simetrijos ašys. Dėl šių simetrijų galime atkarpų ilgius pažymėti, kaip parodyta paveikslėlyje. Jame matome, kad



$$8+y = 12+z, \quad y+26+t = z+24+u, \quad t+22 = u+x,$$

$$(8+y)+(z+24+u)+(t+22) = (12+z)+(y+26+t)+(u+x),$$

$$54+y+z+t+u = 38+x+y+z+t+u, \quad 54 = 38+x, \quad x = 16.$$

# Atsakymai

| Uždavinio nr. | Atsakymas |
|---------------|-----------|
| 1             | D         |
| 2             | B         |
| 3             | B         |
| 4             | D         |
| 5             | C         |
| 6             | E         |
| 7             | A         |
| 8             | D         |
| 9             | E         |
| 10            | A         |
| 11            | D         |
| 12            | D         |
| 13            | E         |
| 14            | B         |
| 15            | E         |
| 16            | B         |
| 17            | C         |
| 18            | B         |
| 19            | A         |
| 20            | D         |
| 21            | C         |
| 22            | A         |
| 23            | E         |
| 24            | C         |
| 25            | B         |
| 26            | B         |
| 27            | C         |
| 28            | A         |
| 29            | C         |
| 30            | D         |