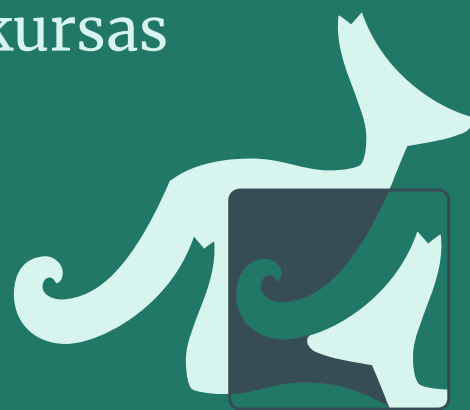
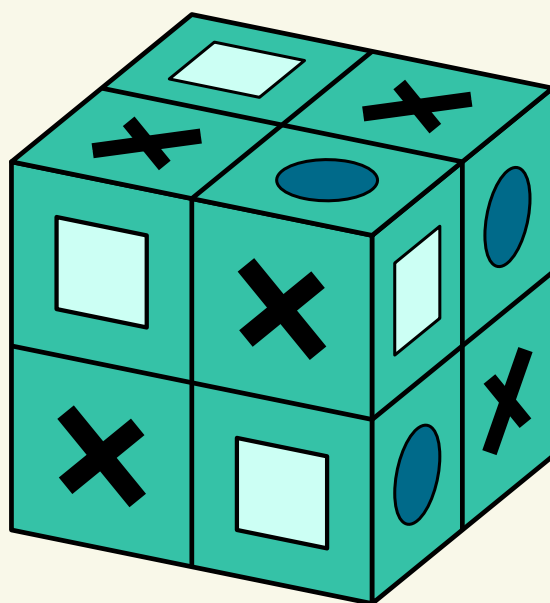


Tarptautinis matematikos konkursas  
**KENGŪRA**



# Junioras

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI



2022

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS  
VILNIAUS UNIVERSITETAS  
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA



KENGŪRA 2022. Junioras

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO  
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas  
Aivaras Novikas

Maketavo  
Ugnė Gudžinskaitė

# Turiny

|                     |    |
|---------------------|----|
| Pratarmė            | 3  |
| Sąlygos             | 5  |
| Užduočių sprendimai | 10 |

# Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdienišku) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gdynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos sprendamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 24000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2022 metais. Nors, žinoma, šiais metais viskas dėl tos nelemtos pandemijos atrodė, pakrypo ir klostėsi visiškai kitaip negu iki šiol. Pasitvirtino visiems teoriškai gerai girdėta išmintis, kad karantininis gyvenimas yra pilnas staigmenų ir netikėtumų: konkursas iš trečiojo kovo ketvirtadienio nusikėlė į vėlesnę datą ir vyko nuotoliniu būdu.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamas, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrantančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo

ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšiuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažinę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnanti ateitis, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2022 metų kovo 17 dieną keliavo ir gausiai sprendė 9–10 klasių (*Junioro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys patikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu !), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu ?). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais ??, !!, !!! ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

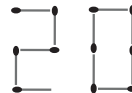
Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

# 2022 m. *Junioro* užduočių sąlygos

## Klausimai po 3 taškus

1. Liudas nori iš degtukų sudaryti skaičių 2022. Jis paėmė 30 degtukų ir sudarė pirmus du skaitmenis (žr. pav.). Kiek degtukų liks nepanaudota, kai Liudas sudarys skaičių 2022?

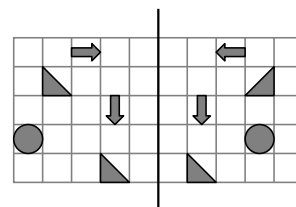


A) 20    B) 19    C) 10    D) 9    E) 5

2. Lygiakraščio trikampio ir kvadrato perimetrai lygūs. Koks yra kvadrato kraštinės ilgis, jei trikampio kraštinės ilgis yra 12?

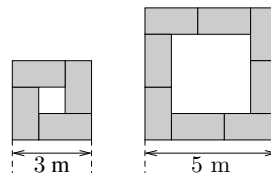
A) 9    B) 12    C) 16    D) 24    E) 36

3. Languoto popieriaus lapelyje nupieštos kelios figūros (žr. pav.). Perlenkus lapelį išilgai paryškintos linijos ir suglaudus dvi jo puses, kai kurios figūros sutapo. Kiek figūrų, esančių lapelio kairėje pusėje, sutapo su figūromis lapelio dešinėje pusėje?



A) 1    B) 2    C) 3    D) 4    E) 5

4. Susirinkimų metu salėje esantys vienodi  $2\text{ m} \times 1\text{ m}$  stalai sustatomi, kaip parodyta paveikslėliuose. Kartą susirinkime dalyvavo daugiau žmonių, ir stalus teko sustatyti pagal kvadratą, kurio kraštinės ilgis ne 3 ar 5, bet 7 metrai. Kiek stalų buvo panaudota?



A) 10    B) 11    C) 12    D) 14    E) 16

5. Tam tikros daugybos lentelės fragmente parodyta tik viena sandauga (žr. pav.). Dauginami skaičiai  $x$  ir  $y$  yra natūralieji, ir  $x > y$ . Kokia yra skaičiaus  $x$  reikšmė?

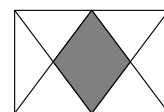
|       |     |       |
|-------|-----|-------|
|       | $x$ | $x+1$ |
| $y$   |     |       |
| $y+1$ |     | 77    |

A) 6    B) 7    C) 8    D) 10    E) 11

6. Mažesnis už pusę savęs paties, jis sudėtas su savo kvadratu tampa nuliui. Kas jis?

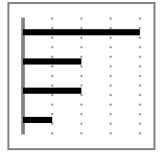
A)  $-2$     B)  $-1$     C) 0    D) 1    E) 2

7. Stačiakampio dviejų kraštinių vidurio taškai sujungti su jo viršūnėmis, kaip parodyta paveikslėlyje. Kuri stačiakampio dalis nuspalvinta?



A)  $\frac{1}{5}$     B)  $\frac{2}{5}$     C)  $\frac{2}{7}$     D)  $\frac{1}{3}$     E)  $\frac{1}{4}$

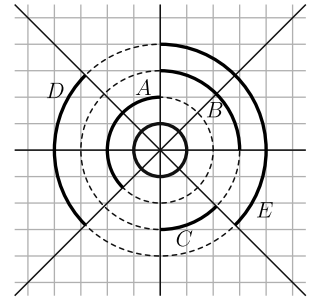
8. Kiekvienos savaitės gale Danutės telefonas parodo jai, kiek laiko tą savaitę ji sugaišo keturioms programėlėms. Kartą Danutės telefonas parodė dešinėje pavaizduotą diagramą. Kitą savaitę Danutė telefonu naudojos trumpiau: nors dvi iš keturių naudojimosi programėlėmis trukmių nepakito, kitos dvi sumažėjo perpus. Kuris paveikslėlis gali būti naujoji telefono diagrama?



- A) B) C) D) E)

9. Plokštuma padalyta į vienetinius langelius, joje nubrėžtos keturios tiesės, dalijančios pilnąjį kampą į 8 lygius kampus, ir keli apskritimai (žr. pav.). Kurio iš pažymėtųjų lankų ilgis lygus mažiausiojo apskritimo ilgiui?

- A)  $A$  B)  $B$  C)  $C$  D)  $D$  E)  $E$



10. Mokinių prezidento rinkimuose dalyvauja penki kandidatai. Suskaičiavus 90% balsų, gauti tokie išankstiniai rezultatai:

| Audra | Aušra | Audrys | Aušrinė | Audronė |
|-------|-------|--------|---------|---------|
| 14    | 11    | 10     | 8       | 2       |

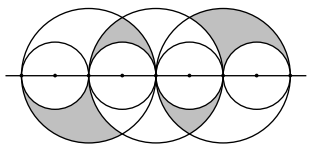
Kiek kandidatų vis dar turi galimybę laimėti šiuos rinkimus?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

### Klausimai po 4 taškus

11. Trys lygūs didieji apskritimai ir keturi lygūs mažieji apskritimai liečia vieni kitus, kaip parodyta paveikslėlyje. Mažojo apskritimo spindulio ilgis yra 1. Koks yra nuspaltintos srities plotas?

- A)  $\pi$  B)  $2\pi$  C)  $3\pi$  D)  $4\pi$  E)  $6\pi$



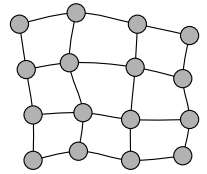
12. Dainora sudėjo 2022 kubelius į vieną eilę. Tada vaikai ėmė sau kubelius tokia tvarka: Česlovas paėmė kas šestą kubelį; Barbora – kas penktą kubelį iš likusiųjų; tada Antanas – kas ketvirtą kubelį iš likusiųjų. Kiek kubelių liko eilėje?

- A) 0 B) 337 C) 674 D) 1011 E) 1348

13. Vienoje šeimoje yra lygiai šeši broliai. Jų amžiai (metais) yra šeši iš eilės einantys natūralieji skaičiai. Kiekvieno iš tų brolių jų senelė paklausė: „Kiek metų vyriausiam iš tavo brolių?“ Kuris skaičius **negali** būti šešių teisingų atsakymų į šį klausimą suma?

- A) 95 B) 125 C) 167 D) 203 E) 205

14. Vienoje šalyje yra 16 miestų, sujungtų keliais taip, kaip parodyta paveikslėlyje. Kai kuriuose miestuose reikia pastatyti elektrines, kad jos aprūpintų elektrą visus miestus. Kiekviena elektrinė aprūpins tik savo miestą bei gretimus (t. y. su juo kelio atkarpa sujungtus) miestus. Kiek mažiausiai elektrinių reikia pastatyti?



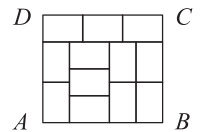
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

15. Trys vaikai spėliojo, kiek metų yra jų senelei. Vienas spėjo, kad jai 75-eri, kitas – kad 78-eri, o trečias – kad 81-eri. Tai išgirdusi, senelė pasakė, kad kažkuris anūkas apsiriko tik vieneriais metais, o kiti du apsiriko dvejais ir ketveriais metais. Kiek metų senelei?

A) 76 B) 77 C) 79 D) 80 E) Vienareikšmiškai nustatyti neįmanoma

16. Stačiakampis  $ABCD$  padalytas į 12 vienodų stačiakampėlių, kaip parodyta paveikslėlyje. Koks yra atkarpų  $AD$  ir  $DC$  ilgių santykis?

A) 8:9 B) 5:6 C) 7:8 D) 2:3 E) Kitas atsakymas

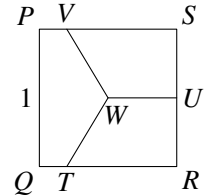


17. Ožys ir ežys lenktyniavo, bėgdami 550 metrų ilgio apskritimu. Jie išbėgo iš vieno taško (kuris yra ir finišo taškas) vienu metu, bet priešingomis kryptimis. Kai jie susitiko, ožys nubėgo toliau, o ežys apsisuko ir ėmė bėgti iš paskos. Ožys ir ežys visą laiką bėgo pastoviais greičiais, atitinkamai lygiais 10 m/s ir 1 m/s, kol pasiekė finišą. Kiek laiko teko laukti ežio ožiui, pasiekusiam finišą?

A) 45 s B) 50 s C) 55 s D) 100 s E) 505 s

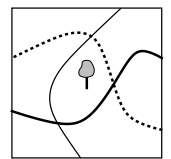
18. Kvadratas  $PQRS$  padalytas į tris lygiaplotes dalis, kaip parodyta paveikslėlyje. Čia  $U$  yra atkarpos  $RS$  vidurio taškas,  $W$  yra kvadrato centras, ir  $PQ = 1$ . Koks yra atkarpos  $SV$  ilgis?

A)  $\frac{1}{2}$  B)  $\frac{2}{3}$  C)  $\frac{3}{4}$  D)  $\frac{4}{5}$  E)  $\frac{5}{6}$



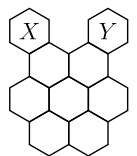
19. Per pievą eina trys takeliai, ir joje auga vienintelis medis, kaip parodyta paveikslėlyje. Kiek mažiausiai medžių reikia pasodinti pievoje, kad abiejose pusėse nuo kiekvieno takelio būtų po lygiai medžių?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



20. Bitė Zvimbytė gali perropoti iš vienos korio akutės tiesiai į kitą, jei šios turi bendrą kraštinę. Ji nori nuropoti iš akutės  $X$  į akutę  $Y$  septyniomis likusiomis pavaizduotomis akutėmis, kiekvieną iš jų aplankydama po lygiai vieną kartą. Keliais būdais ji tai gali padaryti?

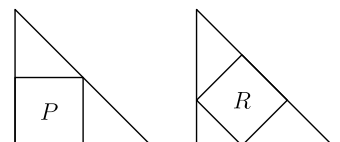
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6



### Klausimai po 5 taškus

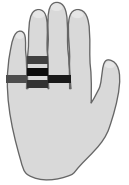
21. Kvadratai įbrėžti į du lygius lygiašonius stačiuosius trikampius, kaip parodyta paveikslėlyje. Koks yra kvadrato  $R$  plotas, jei kvadrato  $P$  plotas lygus 45?

A) 35 B) 40 C) 45 D) 50 E) 60



22. Keliais būdais nuo rankos, pavaizduotos paveikslėlyje, galima po vieną numauti visus penkis žiedus?

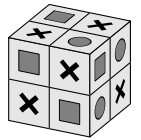
A) 16 B) 20 C) 24 D) 30 E) 45



23. Piratai pasidalijo 200 auksinių ir 600 sidabrinių monetų. Vadeivos gavo po 5 auksines ir po 10 sidabrinių monetų. Jūreiviai – po 3 auksines ir po 8 sidabrines monetas. Jungos – po 1 auksinę ir po 6 sidabrines monetas. Kiek piratų pasidalijo lobį?

A) 50 B) 60 C) 72 D) 80 E) 90

24. Kiekviena  $2 \times 2 \times 2$  kubo siena padalyta į keturis vienetinius langelius. Kiekviename langelyje nupieštas vienas simbolis: skritulys (S), kvadratas (Kv) arba kryželis (Kr). Simboliai bet kuriuose dviejuose langeliuose, turinčiuose bendrą kraštinę, skirtingi (vienas galimas pavyzdys – paveikslėlyje). Kurį simbolių rinkinį galima būtų aptikti ant tokio kubo?



A) 6 S, 8 Kv, visi kiti Kr B) 7 S, 8 Kv, visi kiti Kr C) 5 S, 8 Kv, visi kiti Kr  
D) 7 S, 7 Kv, visi kiti Kr E) Nė vieno iš pateiktųjų

25. Vienos salos gyventojai kalba vien klausimais. Kiekvienas gyventojas yra arba teigūnas, kurio kiekvieno klausimo teisingas atsakymas yra „taip“, arba neigenis, kurio kiekvieno klausimo teisingas atsakymas yra „ne“. Du salos gyventojai Aras ir Ara kartą sutiko svetimšalį. Ara jam pasakė: „Ar aš ir Aras abu esame neigeniai?“ Kas tokie yra Aras ir Ara?

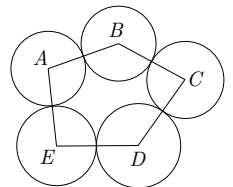
A) Abu teigūnai B) Abu neigeniai C) Aras teigūnas, Ara neigenė  
D) Aras neigenis, Ara teigūnė E) Trūksta informacijos

26. Dvidešimtkampio viršūnės sunumeruotos skaičiais nuo 1 iki 20. Kiekvienos jo kraštinės galuose yra skaičiai, kurie skiriasi 1 arba 2. Kraštinės, jungiančios skaičius, kurie skiriasi tik 1, nudažytos raudonai. Kiek raudonų kraštinių turi dvidešimtkampis?

A) 1 B) 2 C) 5 D) 10 E) Tai priklauso nuo viršūnių numeracijos

27. Penki apskritimai su centrais  $A, B, C, D, E$  liečia vieni kitus, kaip parodyta paveikslėlyje. Kuris taškas yra apskritimo su didžiausiu spinduliu centras, jei  $AB = 16, BC = 14, CD = 17, DE = 13, AE = 14$ ?

A)  $A$  B)  $B$  C)  $C$  D)  $D$  E)  $E$



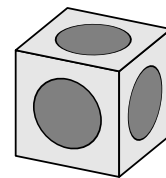
28. Natūraliojo skaičiaus  $N$  skaitmenų sandauga lygi 20. Kuris skaičius **negali** būti skaičiaus  $N+1$  skaitmenų sandauga?

A) 40 B) 30 C) 25 D) 35 E) 24

29. Dvylika svarmenų sudėti po keturis į tris dėžes. Svarmenų masės kilogramais yra 12 skirtingų natūraliųjų skaičių 1, 2, 3, ..., 12. Vienoje dėžėje esančių svarmenų bendra masė yra 41 kg, o kitoje – 26 kg. Kurios masės svarmuo guli vienoje dėžėje su 9 kg svarmeniu?

A) 3 kg B) 5 kg C) 7 kg D) 8 kg E) 10 kg

30. Kiekvienoje kubo sienoje išpjauta pusrutulio formos ertmė. Visi pusrutuliai lygūs, o jų centrai sutampa su atitinkamų sienų centrais. Bet kurių gretimų kubo sienų ertmės liečiasi viename taške (t. y. atitinkami pusrutuliai liečiasi). Koks yra kiekvienos ertmės gylis (decimetrais), jei kubo briaunos ilgis lygus 2 dm?



- A)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     B)  $\frac{1}{2}$     C) 1    D)  $\frac{3}{4}$     E)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

# Junioro užduočių sprendimai

1. (D) 9

! Paveikslėlyje matome, kad skaitmeniui 2 reikia penkių degtukų, o skaitmeniui 0 – šešių. Todėl skaičių 2022 Liudas sudarys iš  $5 + 6 + 5 + 5 = 21$  degtuko, o jam liks  $30 - 21 = 9$  degtukai.

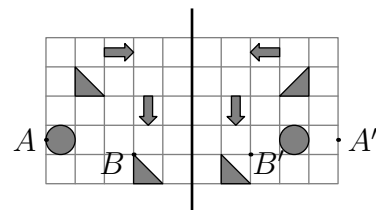


2. (A) 9

! Kvadrato kraštinės ilgį pažymėkime  $a$ . Lygiakraščio trikampio perimetras lygus  $12 \cdot 3 = 36$ . Kvadrato perimetras yra toks pats:  $4a = 36$ . Vadinasi,  $a = 36 : 4 = 9$ .

3. (C) 3

! Perlenkus lapelį dvi figūros sutaps, jei yra simetriškos paryškintos linijos atžvilgiu. Tokios yra trys figūrų poros trijose viršutinėse lapelio eilutėse. Skrituliai ir trikampiai dviejose apatinėse eilutėse nėra simetriški paryškintos linijos atžvilgiu: pavyzdžiui, taškai  $A$  ir  $B$  priklauso skrituliui ir trikampiui (žr. pav.), bet atitinkami taškai  $A'$  ir  $B'$ , simetriški taškams  $A$  ir  $B$ , nepriklauso nupieštoms figūroms.

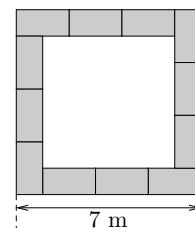


4. (C) 12

? Galima nuspėti, kad nurodytu būdu sustačius stalus pagal  $7\text{ m} \times 7\text{ m}$  kvadratą, šio kvadrato viduje liks  $5\text{ m} \times 5\text{ m}$  formos ertmė (iš kraštinės ilgio  $7\text{ m}$  du kartus atimamas stalo plotis  $1\text{ m}$ ). Tokiu atveju stalų dengiamos kvadrato dalies plotas lygus  $7^2 - 5^2 = 24\text{ (m}^2\text{)}$ . Kadangi kiekvieno stalo paviršiaus plotas yra  $2\text{ m}^2$ , tai stalų iš viso panaudota  $24 : 2 = 12$ .

Renkamės atsakymą C.

! Paveikslėlis parodo, kad panaudota 12 stalų. Tokį paveikslėlį lengva įsivaizduoti mintyse, be kruopščios braižybos, suvokus dėsninę: ties kiekviena  $7\text{ m}$  kraštine turi būti trys vienodai pasukti stalai, sudarantys  $6\text{ m} \times 1\text{ m}$  stačiakampį. Tokius keturis stačiakampius (po tris stalus kiekviename iš jų) sudėjus ratu, gaunama reikiama figūra. Taip ir gauname  $3 \cdot 4 = 12$  stalų.



5. **(D)** 10

- ? Daugybės lentelės fragmentas parodo, kad  $(x+1) \cdot (y+1) = 77 = 7 \cdot 11$ . Kadangi  $x > y$ , tai natūralu spėti, kad  $x+1 = 11$  ir  $x = 10$ .

Renkamės atsakymą **D**.

|       |  |     |       |
|-------|--|-----|-------|
|       |  | $x$ | $x+1$ |
|       |  |     |       |
| $y$   |  |     |       |
| $y+1$ |  |     | 77    |

- ! Daugybės lentelės fragmentas parodo, kad  $(x+1) \cdot (y+1) = 77$ . Čia  $y+1$  yra skaičiaus  $77 = 7 \cdot 11$  natūralusis daliklis, didesnis už 1. Todėl  $y+1 = 7, 11$  arba  $77$ . Kadangi  $x+1 = \frac{77}{y+1} > y+1$ , tai tinka tik  $y+1 = 7$ . Vadinasi,  $x+1 = 11$  ir  $x = 10$ .

6. **(B)** -1

- ? Galima patikrinti penkis pateiktus atsakymus. Sąlygą „sudėtas su savo kvadartu tampa nuli“ tenkina tik **B)** -1 ir **C)** 0. Tačiau skaičius 0 nėra mažesnis už pusę savęs (tiesą pasakius, jis lygus pusei savęs).

Renkamės atsakymą **B**.

- ! Žodinę uždavinio sąlygą galima užrašyti formaliau:

$$x < \frac{x}{2}, \quad x + x^2 = 0.$$

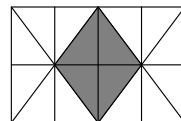
Patogu pradėti nuo antrosios sąlygos:

$$x + x^2 = 0, \quad x(1+x) = 0, \quad x = 0 \text{ arba } x = -1.$$

Iš dviejų gautų sprendinių sąlygą  $x < \frac{x}{2}$  tenkina tik  $x = -1$ . Vadinasi, šis skaičius ir yra tas, apie kurį kalba uždavinys.

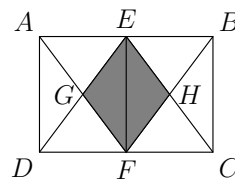
7. **(E)**  $\frac{1}{4}$ 

- ? Stačiakampį padalykime į 16 stačiųjų trikampių, kaip parodyta paveikslėlyje. Galima nuspėti (o prireikus ir įrodyti), kad visi šie trikampiai lygūs. Kadangi nuspalvintą sritį sudaro 4 iš 16 lygių trikampių, tai jos plotas lygus ketvirtadaliui stačiakampio ploto.



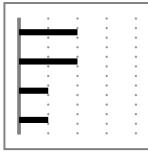
Renkamės atsakymą **E**.

- ! Taškus pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje. Keturkampis  $ADFE$  yra lygiagretainis (kraštinės  $AE$  ir  $DF$  yra lygios ir lygiagrečios; tuo pačiu  $ADFE$  yra ir stačiakampis). Šio lygiagretainio įstrižainės dalija viena kitą pusiau, o patį lygiagretainį – į keturis lygiapločius trikampius  $AEG$ ,  $EFG$ ,  $FDG$ ,  $DAG$  (bet kurie du gretimi iš jų turi bendrą aukštinę, nuleistą į lygias kraštines).



Taigi trikampio  $EFG$  plotas lygus keturkampio  $ADFE$  ploto ketvirtadaliui. Analogiškai trikampio  $EFH$  plotas lygus keturkampio  $BCFE$  ploto ketvirtadaliui. Vadinasi, nuspalvintojo keturkampio  $EHFG$  plotas lygus didžiojo stačiakampio  $ABCD$  ploto ketvirtadaliui.

8. ③



? Diagramose vienos padalos plotį galime laikyti lygiu 1. Tada pirmosios savaitės Danutės telefono diagramą nusako skaičiai 4, 2, 2, 1. Atsakymų diagramas nusako skaičiai

A)  $2, 1, 1, \frac{1}{2}$ ; B) 4, 2, 1, 1; C) 2, 2, 1, 1; D)  $3, 1, 1, \frac{1}{2}$ ; E) 2, 1, 1, 1.

Naujosios diagramos skaičiai iš skaičių 4, 2, 2, 1 gaunami, du iš jų padalijus iš 2. Tinka ketvertas C)  $4 : 2 = 2$ ,  $2 : 2 = 1$ , 1.

Renkamės atsakymą C.

! Užbaikime ? dalies sprendimą pastebėdami, kad atsakymai A, B, D, E netinka, nes, du iš skaičių 4, 2, 2, 1 padaliję iš 2, būtinai gausime vieną iš skaičių ketvertų

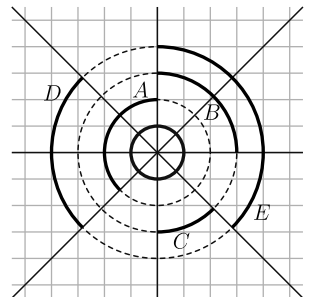
$2, 2, 1, 1$ ;  $2, 2, 2, \frac{1}{2}$ ;  $4, 2, 1, \frac{1}{2}$ ;  $4, 1, 1, 1$

(atitinkamai pakeitę skaičius 4 ir 2; 4 ir 1; 2 ir 1; 2 ir 2).

9. ④ D

? Iš apskritimo ilgio formulės  $2\pi r$  išplaukia, kad apskritimo ilgis yra tiesiogiai proporcingas apskritimo spindulio ilgiui  $r$ . Didžiausiojo apskritimo paveikslėlyje spindulys yra 4 kartus ilgesnis nei mažiausiojo apskritimo spindulys. Todėl ir pats didžiausias apskritimas yra 4 kartus ilgesnis už mažiausiąjį, o didžiausiojo apskritimo ketvirtis – lankas D – savo ilgiu yra lygus mažiausiajam apskritimui.

Renkamės atsakymą D.



! Langeliai, į kuriuos padalyta plokštuma, yra vienetiniai, todėl keturių pavaizduotųjų apskritimų spindulių ilgiai didėjimo tvarka lygūs 1, 2, 3, 4. Apskritimų ilgiai atitinkamai lygūs

$$c_1 = 2\pi \cdot 1 = 2\pi, \quad c_2 = 2\pi \cdot 2 = 4\pi, \quad c_3 = 2\pi \cdot 3 = 6\pi, \quad c_4 = 2\pi \cdot 4 = 8\pi.$$

Kiekvieną iš lankų A, B, C, D, E sudaro vienas ar keli vieno iš apskritimų aštuntadaliai. Šių lankų ilgiai atitinkamai lygūs

$$\frac{3}{8} \cdot c_2 = \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{2}{8} \cdot c_3 = \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{1}{8} \cdot c_3 = \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{2}{8} \cdot c_4 = 2\pi, \quad \frac{3}{8} \cdot c_4 = 3\pi.$$

Skaičiui  $c_1 = 2\pi$  yra lygus lanko D ilgis.

10. **C** 3

! Išansktiniuose rezultatuose atsispindi

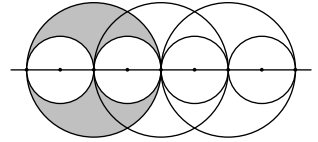
$$14 + 11 + 10 + 8 + 2 = 45$$

rinkėjų balsai. Tai yra 90% balsų, todėl rinkimuose iš viso dalyvavo  $45 \cdot \frac{100}{90} = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$  rinkėjų. Taigi liko nesuskaičiuoti  $50 - 45 = 5$  balsai. Šį rezultatą galima gauti ir kitaip: jei 45 balsai sudaro 90% visų balsų, tai  $45 : 9 = 5$  balsai sudaro likusius  $10\% = 90\% : 9$  balsų.

Net jei Aušrinė, kol kas turinti 8 balsus, gautų visus likusius 5 balsus, tai vis tiek turėtų jų mažiau nei Audra, jau turinti 14 balsų. Tuo labiau negali laimėti Audronė, teturinti 2 balsus. Kita vertus, yra įmanoma, kad visus likusius 5 balsus gaus Audrys ir, kitų kandidatų balsams nepakitęs, turės 15 balsų – daugiau nei kiti. Taigi Audrys gali laimėti. Analogiškai yra įmanoma, kad laimės Audra arba Aušra. Vadinasi, yra trys kandidatai, vis dar galintys laimėti rinkimus.

11. **B**  $2\pi$ 

! Nuspaltvintą sritį sudaro keturios dalys. Kiekvienos dalies ploto atskirai ieškoti nebūtina. Du didieji apskritimai liečiasi. Dėl simetrijos jų bendros liestinės atžvilgiu dvi iš keturių srities dalių galima pakeisti kitomis, kaip parodyta paveikslėlyje. Srities plotas nuo to nepakinta.



Dabar galime nagrinėti tik kairįjį didįjį apskritimą ir jame įbrėžtus du mažuosius apskritimus. Naują nuspaltvintą sritį sudaro didžiojo apskritimo vidaus taškai, nesantys mažųjų apskritimų vidaus taškais. Taigi srities plotą gausime, iš didžiojo skritulio ploto atėmę dvigubą mažojo skritulio plotą.

Mažojo skritulio spindulio ilgis lygus 1, o didžiojo skritulio skersmuo lygus dvigubam mažojo skritulio skersmeniui. Todėl didžiojo skritulio spindulio ilgis lygus 2, o nuspaltvintos srities plotas lygus

$$\pi \cdot 2^2 - 2 \cdot (\pi \cdot 1^2) = 2\pi.$$

12. **D** 1011

? Kai turime kubelių eilę ir iš jos pašalinamas, pavyzdžiui, kas septintas kubelis, tai eilėje lieka *apytiksliai* šeši septintadaliai kubelių. Toks apytikslis įvertinimas yra tikslus, jei pradinis kubelių skaičius dalijasi iš 7 be liekanos. Kadangi penki atsakymai **A–E** gana smarkiai skiriasi vienas nuo kito, tai tikslumu galime nesirūpinti. Tiesiog pastebėkime, kad po Česlovo veiksmo eilėje liko apytiksliai  $2022 \cdot \frac{5}{6}$  kubelių, po Barboros veiksmo jų liko apytiksliai  $2022 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5}$ , po Antano veiksmo – apytiksliai

$$2022 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = 2022 \cdot \frac{3}{6} = \frac{2022}{2} = 1011.$$

Renkamės atsakymą **D**.

! Apytiksliai ? dalies skaičiavimus paverskime tiksliais. Kadangi skaičius  $x_1 = 2022$  baigiasi lyginiu skaitmeniu, o jo skaitmenų suma dalijasi iš 3, tai  $x_1$  dalijasi iš  $2 \cdot 3 = 6$ . Todėl po Česlovo veiksmo eilėje liko lygiai  $x_2 = x_1 \cdot \frac{5}{6} = \frac{2022}{6} \cdot 5$  kubelių. Skaičius  $\frac{2022}{6}$  sveikasis, todėl  $x_2$  dalijasi iš 5. Taigi po Barboros veiksmo kubelių liko lygiai  $x_3 = x_2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{2022}{6} \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = \frac{2022}{6} \cdot 4$ . Skaičius  $x_3$  dalijasi iš 4, todėl po Antano veiksmo kubelių liko lygiai

$$x_4 = x_3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{2022}{6} \cdot 4 \cdot \frac{3}{4} = \frac{2022}{6} \cdot 3 = 1011.$$

Tai ir yra galutinis eilėje likusių kubelių skaičius.

### 13. (E) 205

? Vyriausiojo iš senelės šešių anūkų amžių (metais) pažymėkime  $n$ . Likę penki anūkai į senelės klausimą turėjo atsakyti, nurodydami šio anūko amžių  $n$ . Tačiau paties vyriausiojo anūko atsakymas į senelės klausimą turėjo būti kitoks: vyriausiajam iš šio anūko penkių brolių yra vieneriais metais mažiau, t. y.  $n - 1$ . Vadinasi, visų šešių atsakymų (jei jie teisingi) suma lygi

$$n + n + n + n + n + (n - 1) = 6n - 1.$$

Natūraliojo skaičiaus  $n$  reikšmės nustatyti negalime: yra įmanomos įvairios reikšmės. Tačiau suma  $6n - 1$  yra visai ne bet koks natūralusis skaičius: prie jo pridėjus 1, skaičius turi dalytis iš 6 (t. y. skaičius  $6n - 1$  dalijasi iš 6 su liekana 5). Šios sąlygos netenkina atsakymas (E) 205, nes  $205 + 1 = 206$  nesidalija iš 3 (jo skaitmenų suma nesidalija iš 3). Vadinasi, šis skaičius negali būti šešių anūkų teisingų atsakymų suma.

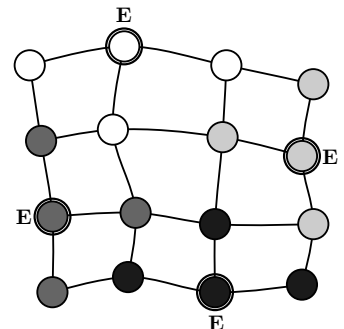
! Užbaikime ? dalies sprendimą pastebėjimu, kad kiekvienas iš pateiktų atsakymų A–D gali būti anūkų teisingų atsakymų suma, kai šešiams anūkam atitinkamai yra: **A)** nuo 11 iki 16 metų; **B)** nuo 16 iki 21 metų; **C)** nuo 23 iki 28 metų; **D)** nuo 29 iki 34 metų. (Čia, pavyzdžiui, atveju **A** imame  $95 = 6n - 1$  ir gauname galimą vyriausiojo anūko amžių  $n = 16$ .)

### 14. (B) 4

! Atkreipkime dėmesį į keturis vienas nuo kito nutolusius miestus – „kampinius“, kurių kiekvienas turi tik po du gretimus miestus. Jokia elektrinė neaprupins elektra dviejų iš šių miestų, todėl elektrinių reikės pastatyti mažiausiai keturias.

Kita vertus, keturias elektrines pastačius, kaip parodyta paveikslėlyje, elektra bus aprūpinti visi miestai.

Vadinasi, mažiausias elektrinių, elektra aprūpinančių visus miestus, skaičius lygus 4.



!! Visus miestus elektra gali aprūpinti keturios elektrinės. Tai galima pagrįsti pavyzdžiu, nurodant tinkamus keturis miestus (žr. ! dalį).

Kita vertus, kiekvienas miestas turi daugiausiai keturis gretimus. Todėl kiekviena pastatyta elektrinė elektra aprūpins daugiausiai penkis miestus. Kadangi  $3 \cdot 5 < 16$ , tai trijų elektrinių nepakaks.

Vadinasi, mažiausias elektrinių, elektra aprūpinančių visus miestus, skaičius lygus 4.

15. **E** Vienareikšmiškai nustatyti neįmanoma

! Tikrinant duotus atsakymus, galima pastebėti, kad senelės amžius metais **B**) 77 tenkina uždavinio sąlygą. Tačiau atsakymas **E** verčia nesirinkti atsakymo **B**, kol neįsitikiname, kad senelės amžius negali būti kitoks. O tas amžius gali būti kitoks: tinka ir **C**) 79 metai. Vadinasi, senelės amžiaus neįmanoma nustatyti vienareikšmiškai.

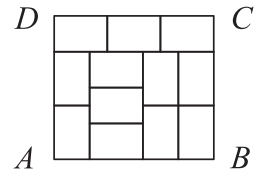
!! Senelės amžių metais pažymėkime  $n$ . Tai bet koks natūralusis skaičius, kuriam skaičiai  $|n - 75|$ ,  $|n - 78|$ ,  $|n - 81|$  yra tam tikra tvarka užrašyti skaičiai 1, 2, 4. Iš  $|n - 75| \leq 4$  ir  $|n - 81| \leq 4$  atitinkamai gauname  $n \leq 79$  ir  $n \geq 77$ . Patikrinę  $n = 77, 78, 79$  gauname, kad tinka tiek  $n = 77$ , tiek  $n = 79$ . Vadinasi, senelės amžiaus neįmanoma nustatyti vienareikšmiškai.

!!! Skaičių tiesėje taškai 75 ir 81 yra simetriški taško 78 atžvilgiu. Dėl šios simetrijos bet kurie du natūralieji skaičiai  $78 + x$  ir  $78 - x$  galimą senelės amžių metais nusako arba abu, arba nė vienas. Senelės amžius nėra 78 metai, todėl šio amžiaus galimų reikšmių skaičius yra lyginis. Vadinasi, senelės amžiaus neįmanoma nustatyti vienareikšmiškai.

16. **A** 8 : 9

! Kiekvieno iš 12 stačiakampėlių matmenis pažymėkime  $a \times b$  (čia  $a > b$ ). Paveikslėlyje matome, kad

$$AB = b + a + b + b = a + 3b, \quad CD = a + a + a = 3a.$$



Todėl  $a + 3b = 3a$  ir  $3b = 2a$ . Galime pažymėti  $a = 3x$ ,  $b = 2x$ . Tada

$$AD = a + a + b = 8x, \quad DC = 3a = 9x, \quad AD : DC = 8 : 9.$$

17. **A** 45 s

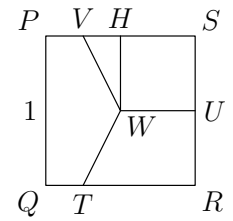
! Ožys nubėgo visus 550 m, todėl jis bėgo  $550 : 10 = 55$  sekundes, o toliau laukė ežio. Tarkime, kad ežys ir ožys bėgo priešingomis kryptimis  $t$  sekundžių. Tada iki susitikimo jie kartu nubėgo  $10t + 1 \cdot t = 11t = 550$  metrų atstumą, ir  $t = 550 : 11 = 50$  (s). Taigi ežys 50 sekundžių bėgo viena kryptimi (ir nubėgo  $50 \cdot 1 = 50$  metrų), o tada apsigrėžęs bėgo tą patį atstumą ir todėl tiek pat laiko (dar 50 s), tik jau ožio bėgimo kryptimi. Iš viso ežys bėgo  $50 + 50 = 100$  sekundžių, kol pasiekė finišą. Vadinasi, ožys laukė ežio  $100 - 55 = 45$  sekundes.

!! Kadangi ožys yra 10 kartų greitesnis už ežį, tai, jiems susitikus ir per abu nubėgus 550 metrų, ožys ir ežys atitinkamai buvo nubėgę 500 m ir 50 m. Toliau iš susitikimo taško ožys ir ežys abu bėgo link finišo 50 m atstumą. Ožys šį atstumą bėgo  $50 : 10 = 5$  sekundes, o ežys jį bėgo  $50 : 1 = 50$  sekundžių. Vadinasi, ožys ties finišu turėjo laukti ežio  $50 - 5 = 45$  sekundes.

18. (E)  $\frac{5}{6}$ 

! Kvadrato  $PQRS$  plotas lygus 1, todėl kiekvienos iš jo trijų lygiapločių dalių plotas lygus  $\frac{1}{3}$ . Atskiru atveju keturkampio  $USVW$  plotas lygus  $S_0 = \frac{1}{3}$ .

Iš taško  $W$  išveskime statmenį  $WH$  į kvadrato  $PQRS$  kraštinę  $PS$ . Kadangi  $W$  yra šio kvadrato centras, tai  $WH = WU = \frac{1}{2}$ . Statmuo  $WH$  dalija keturkampį  $USVW$  į kvadratą  $HSUW$ , kurio plotas yra  $S_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ , ir statųjį trikampį  $HVW$ , kurio plotas yra  $S_2 = \frac{HV \cdot HW}{2} = \frac{HV}{4}$ . Tada  $S_0 = S_1 + S_2$  ir



$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{HV}{4}, \quad HV = \frac{1}{3}, \quad SV = SH + HV = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

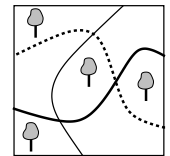
!! Taškai  $W$  ir  $U$  yra kvadrato  $PQRS$  (horizontalioje) simetrijos ašyje, todėl atkarpa  $WU$  yra lygiagreti su kvadrato kraštinę  $PS$ , o keturkampis  $USVW$  yra trapecija. Be to,  $US = UW = \frac{1}{2}$ . Kvadrato  $PQRS$  plotas lygus 1, todėl kiekvienos iš jo trijų lygiapločių dalių plotas lygus  $\frac{1}{3}$ . Atskiru atveju trapecijos  $USVW$  plotas lygus

$$\frac{1}{3} = \frac{UW + SV}{2} \cdot US = \frac{UW + SV}{4}.$$

Vadinasi,  $UW + SV = \frac{4}{3}$  ir  $SV = \frac{4}{3} - UW = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ .

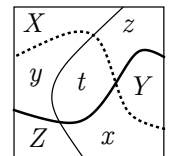
19. (C) 3

! Akivaizdu, kad reikia pasodinti bent vieną medį. Svarbus toks pastebėjimas: kad ir kur tą papildomą medį pasodinsime, jis bent vieno takelio atžvilgiu bus toje pačioje pusėje su jau augančiu medžiu. Tai reiškia, kad kitoje to takelio pusėje turi būti pasodinti dar bent du medžiai. Taigi reikia pasodinti bent tris medžius. Kita vertus, trijų medžių pakanka (žr. pav.).



Vadinasi, mažiausias medžių, kuriuos reikia pasodinti, skaičius lygus 3.

!! Takeliai dalija pievą į 7 dalis. Tarkime, kad pievoje pasodinus medžius jų skaičius kiekvienoje pievos dalyje yra toks, kaip parodyta paveikslėlyje. Jei medžiai pasodinti tinkamai, tai galioja lygybės:



$$X + y + Z = x + Y + z + t, \quad X + Y + z = x + y + Z + t, \quad x + Y + Z = X + y + z + t.$$

Čia  $t \geq 1$  (vienas medis pievoje jau augo). Sudėkime visas tris lygybes:

$$2X + 2Y + 2Z + x + y + z = X + Y + Z + 2x + 2y + 2z + 3t,$$

$$X + Y + Z = x + y + z + 3t \geq 3.$$

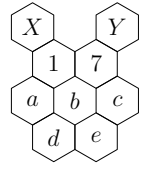
Taigi  $X + Y + Z \geq 3$ , ir reikia pasodinti bent tris medžius. Dėl simetrijos natūralu patikrinti galimybę  $X = Y = Z = 1$ . Tada, pasirinkus minimalias kitų nežinomųjų reikšmes  $x = y = z = 0$ ,  $t = 1$ , gaunama situacija, tenkinanti uždavinio sąlygą. Ši situacija gaunama, pasodinus tris medžius.

Vadinasi, mažiausias medžių, kuriuos reikia pasodinti, skaičius lygus 3.

## 20. (D) 5

! Čia tenka perrinkti galimybes. Septynias korio akutes numeruokime natūraliaisiais skaičiais nuo 1 iki 7, taip nurodydami jų aplankymo tvarką.

Akutės, kurias reikia pažymėti skaičiais 1 ir 7, nustatomos vienareikšmiškai. Skaičiai 2 ir 6 neišvengiamai yra du iš skaičių  $a, b$  ir  $c$  (žr. pav.). Yra trys galimybės:

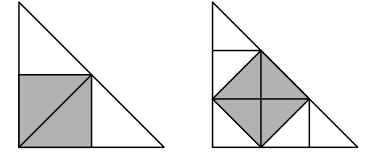


- (i) jei  $b = 2$ , tai  $c = 6, e = 5, d = 4, a = 3$ ; čia gauname vieną būdą, kaip gali keliauti bitė;
- (ii) jei  $b = 6$ , tai  $a = 2, d = 3, e = 4, c = 5$ ; vėl gauname vieną būdą, kaip gali keliauti bitė;
- (iii) jei  $b \neq 2$  ir  $b \neq 6$ , tai  $a = 2, c = 6$ ; čia kiekvienai galimai  $b$  reikšmei 3, 4, 5 gauname po vieną būdą, kaip gali keliauti bitė; taigi gauname tris būdus.

Iš viso gauname  $1 + 1 + 3 = 5$  būdus, kaip gali keliauti bitė.

## 21. (B) 40

? Galima nuspėti, kad kvadratą  $P$  gausime, lygiašonį statųjį trikampį padaliję į keturis lygius trikampius ir apjungę du iš jų, o kvadratą  $R$  gausime, lygiašonį statųjį trikampį padaliję į devynis lygius trikampius ir apjungę keturis iš jų (žr. pav.). Tai reiškia, kad  $P$  plotas lygus pusei kiekvieno iš dviejų didžiųjų lygiašonių stačiųjų trikampių ploto  $S$ , o  $R$  plotas lygus  $\frac{4}{9}S$ . Vadinasi,  $S = 2 \cdot 45 = 90$ , o  $R$  plotas lygus  $90 \cdot \frac{4}{9} = 40$ .

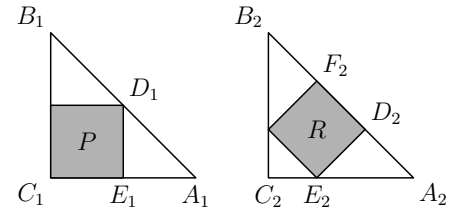


Renkamės atsakymą **B**.

! Taškus pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje. Kvadratų  $P$  ir  $R$  kraštinių ilgius atitinkamai pažymėkime  $a$  ir  $b$ .

Trikampis  $A_1D_1E_1$  yra statusis, o kadangi turi  $45^\circ$  kampą, tai ir lygiašonis. Todėl

$$A_1E_1 = D_1E_1 = a, \quad A_1C_1 = A_1E_1 + E_1C_1 = a + a = 2a.$$



Trikampis  $A_2D_2E_2$  yra statusis, o kadangi turi  $45^\circ$  kampą, tai ir lygiašonis. Todėl

$$A_2D_2 = D_2E_2 = b \quad \text{ir analogiškai } B_2F_2 = b,$$

$$A_2B_2 = A_2D_2 + D_2F_2 + F_2B_2 = b + b + b = 3b.$$

Du didieji lygiašoniai statieji trikampiai lygūs, taigi

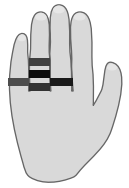
$$A_2B_2 : A_1C_1 = \sqrt{2}, \quad \left(\frac{3b}{2a}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2, \quad 9b^2 = 2 \cdot 4a^2 = 8a^2.$$

Vadinasi, kvadratų  $P$  ir  $R$  plotų santykis lygus  $a^2 : b^2 = 9 : 8$ .

Kadangi  $a^2 = 45$ , tai kvadrato  $R$  plotas lygus  $\frac{8}{9} \cdot 45 = 40$ .

## 22. (B) 20

! Nuo bevardžio piršto su trimis žiedais viršutinis žiedas turi būti numautas anksčiau nei vidurinis, o vidurinis – anksčiau nei apatinis. Tuo tarpu likę du žiedai (nuo mažylio ir didžiojo piršto) gali būti numauti bet kada.



Pirmiausiai pasirinkime, kelintas iš penkių žiedų bus numautas mažylio žiedas. Tam yra 5 galimybės. Toliau pasirinkime, kelintas iš penkių žiedų bus numautas didžiojo piršto žiedas. Padarius pirmąjį pasirinkimą, antrajam lieka 4 galimybės. Padarę abu pasirinkimus, gauname lygiai vieną penkių žiedų numovimo būdą: toliau bevardžio piršto trijų žiedų numovimo tvarka nustatoma vienareikšmiškai.

Vadinasi, iš viso yra  $5 \cdot 4 = 20$  būdų, kaip numauti žiedus.

## 23. (D) 80

? Tarkime, kad tarp piratų buvo  $x$  vadeivų,  $y$  jūreivių ir  $z$  jungų. Piratai pasidalijo  $200 = 5x + 3y + z$  auksinių ir  $600 = 10x + 8y + 6z$  sidabrinių monetų. Galima nuspėti, kad, šiose dviejose lygtyse įrašius vieno iš nežinomųjų konkrečią reikšmę, gauta dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistema turės vienintelį sprendinį. Tačiau tas sprendinys gali ir netikti (galbūt gautos nežinomųjų reikšmės nebus sveikosios arba bus neigiamos). Visgi toks pastebėjimas verčia susimąstyti, kad dvi turimas lygtis galbūt tenkina daug tinkamų trejetų  $(x, y, z)$ . Iš tiesų taip ir yra: nežinomųjų  $x, y, z$  iš lygybių vienareikšmiškai negausime, tačiau galima pamėginti atspėti vieno nežinomojo tinkamą reikšmę ir gauti kitų dviejų nežinomųjų reikšmes. Pavyzdžiui, įrašius lygtyse  $x = 10$  ir išsprendus lygčių sistemą, gaunamas pradinių lygčių sistemos sprendinys  $(x, y, z) = (10, 40, 30)$ . Šie piratų skaičiai yra galimi.

Vadinasi, piratų galėjo būti iš viso  $x + y + z = 10 + 40 + 30 = 80$ .

Renkamės atsakymą D.

! Tarkime, kad tarp piratų buvo  $x$  vadeivų,  $y$  jūreivių ir  $z$  jungų. Piratai pasidalijo  $200 = 5x + 3y + z$  auksinių ir  $600 = 10x + 8y + 6z$  sidabrinių monetų. Atlikdami veiksmus su šiomis dviem lygtimis, elimuodami nežinomuosius, galime du nežinomuosius išreikšti per likusį trečią. Pavyzdžiui, patogiu atlikti tokius veiksmus:

$$600 = 10x + 8y + 6z, \quad | : 2 \quad 300 = 5x + 4y + 3z,$$

$$100 = 300 - 200 = (5x + 4y + 3z) - (5x + 3y + z) = y + 2z, \quad y = 100 - 2z,$$

$$200 = 5x + 3y + z = 5x + (300 - 6z) + z, \quad 5x = 5z - 100, \quad x = z - 20.$$

Taigi  $x$  ir  $y$  išreiškėme per  $z$ . Paties nežinomojo  $z$  reikšmės nerasime: tinka daugiau nei viena  $z$  reikšmė, o pradinių lygčių sistema turi daug tinkamų sprendinių  $(x, y, z)$ . Tačiau visų šių sprendinių perranka nereikalinga, nes kiekvienam iš jų ieškomas bendras piratų skaičius lygus

$$x + y + z = (z - 20) + (100 - 2z) + z = 80.$$

!! Tarkime, kad tarp piratų buvo  $x$  vadeivų,  $y$  jūreivių ir  $z$  jungų. Piratai pasidalijo  $200 = 5x + 3y + z$  auksinių ir  $600 = 10x + 8y + 6z$  sidabrinių monetų. Atkreipkime dėmesį į šių lygčių koeficientus  $(5, 3, 1)$  ir  $(10, 8, 6)$  bei pastebėkime dėsninę:

$$10 - 5 = 8 - 3 = 6 - 1.$$

Jis parodo, kad verta iš antrosios lygties atimti pirmąją:

$$400 = 600 - 200 = (10x + 8y + 6z) - (5x + 3y + z) = 5x + 5y + 5z.$$

Vadinasi, piratų iš viso buvo  $x + y + z = 400 : 5 = 80$ .

24. **(E)** Nė vieno iš pateiktųjų

! Iš pirmo žvilgsnio gali atrodyti, kad yra daug būdų, kaip pažymėti kubą simboliais, ir galima pasimesti, ieškant būdų, atitinkančių atsakymus **A–D**. Mėginkime ieškoti dėsningumų, kaip gali būti išdėstyti simboliai.

Kubas turi 6 sienas, o kiekvienoje iš jų yra 4 langeliai. Taigi turime iš viso  $6 \cdot 4 = 24$  langelius. Jus galima suskirti į 8 trejetus, imant po tris langelius ties kiekviena iš kubo 8 viršūnių. Nagrinėkime bet kurį tokių langelių trejetą. Bet kurie du iš šių trijų langelių turi bendrą kraštinę. Taigi trijuose langeliuose ties viena kubo viršūne turi būti visi trys simboliai: po vieną skritulį, kvadratą ir kryželį. Kadangi kiekviename langelių trejete trijų simbolių yra po lygiai, tai ir imant visą kubą, imant visus aštuonis langelių trejetus, trijų simbolių turi būti po lygiai: iš viso 8 skrituliai, 8 kvadratai ir 8 kryželiai. Tai vienintelė galimybė. Kadangi ji neatitinka nė vieno iš atsakymų **A–D**, tai teisingas yra atsakymas **E**.

25. **(C)** Aras teigūnas, Ara neigenė

! Nagrinėkime Arą ir jos užduotą klausimą. Šis klausimas yra susijęs su teiginiu „tiek Ara yra neigenė, tiek Aras yra neigenis“. Jei teiginys teisingas, tai teisingas atsakymas į Aros klausimą yra „taip“, o jei teiginys klaidingas, tai teisingas atsakymas yra „ne“. Pirmuoju atveju gauname prieštarą: viena vertus, teisingas teiginys teigia, kad Ara neigenė, o kita vertus, Ara, uždavusi klausimą, į kurį reikia atsakyti teigiamai, turi būti teigūnė. Vadinasi, teisingas atsakymas į Aros klausimą yra „ne“, tad Ara yra neigenė. Tuo pačiu tai reiškia, kad teiginys klaidingas, t. y. bent vienas iš dviejų salos gyventojų nėra neigenis. Kadangi Ara neigenė, tai Aras teigūnas. Vadinasi, galime vienareikšmiškai nustatyti dviejų gyventojų tapatybę: Aras teigūnas, Ara neigenė.

!! Pakanka patikrinti keturias galimybes, nurodytas atsakymuose **A–D**. Kiekvienu iš keturių atvejų galime nustatyti teisingą atsakymą į Aros klausimą:

| Ara \ Aras | Teigūnas | Neigenis |
|------------|----------|----------|
| Teigūnė    | ne       | ne       |
| Neigenė    | ne       | taip     |

Teisingas atsakymas į Aros klausimą privalo atitikti Aros tapatybę: jei ji teigūnė, tai „taip“, o jei neigenė, tai „ne“. Taigi lentelės antroje eilutėje turime ieškoti atsakymo „taip“, o trečioje eilutėje – atsakymo „ne“. Yra vienintelis tinkamas langelis: atsakymas „ne“ trečioje eilutėje. Šis langelis ir nusako vienintelį įmanomą atvejį: Aras teigūnas, Ara neigenė.

## 26. (B) 2

! Dvidešimtkampio forma uždaviniui reikšmės neturi, tad dėl patogumo galime įsivaizduoti, kad jis taisyklingasis. Nagrinėkime viršūnę 1 ir jai priešingą viršūnę  $t$ . Kiekvienoje pusėje nuo šias viršūnes jungiančios įstrižainės yra po 9 viršūnes. Tarkime, kad vienoje pusėje, einant nuo viršūnės 1 iki viršūnės  $t$ , viršūnės iš eilės pažymėtos skaičiais  $x_1, x_2, \dots, x_9$ , o kitoje pusėje – skaičiais  $y_1, y_2, \dots, y_9$ . Tada:

- skaičiai  $x_1$  ir  $y_1$ , gretimi skaičiui 1, tegali būti lygūs 2 ir 3; dėl simetrijos galime tarti, kad  $x_1 = 2$  ir  $y_1 = 3$ ;
- skaičiai  $x_2$  ir  $y_2$ , gretimi skaičiams 2 ir 3, tegali būti lygūs 4 ir 5; tinka tik galimybė  $x_2 = 4$  ir  $y_2 = 5$ ;
- analogiškai iš eilės gauname

$$x_3 = 6 \text{ ir } y_3 = 7, \quad x_4 = 8 \text{ ir } y_4 = 9, \quad \dots, \quad x_9 = 18 \text{ ir } y_9 = 19;$$

- likęs nežinomas skaičius  $t$  lygus 20.

Vadinasi, iš esmės tėra vienintelis viršūnių numeracijos būdas: pasirenkamos dvi gretimos viršūnės, kurios bus pažymėtos skaičiais 1 ir 2, o tada iš eilės ratu viršūnės pažymimos skaičiais

$$1, 2, 4, 6, 8, \dots, 18, 20, 19, 17, 15, \dots, 7, 5, 3 \text{ (ir vėl 1)}.$$

Taigi raudonai nudažytos lygiai dvi dvidešimtkampio kraštinės – tos, kurios jungia viršūnes 1 ir 2 bei 20 ir 19.

!! Dvidešimtkampio viršūnės, gretimos viršūnei 1, tegali būti pažymėtos skaičiais 2 ir 3. Pradėję nuo viršūnės 1 ir iš eilės ratu imdami viršūnes, gauname skaičius 1,  $x_1 = 2, x_2, x_3, \dots, x_9, t$ , kuriems  $x_2 \leq 4, x_3 \leq 6, \dots, x_9 \leq 18, t \leq 20$ . Pradėję nuo viršūnės 1 ir apeidami viršūnes kita kryptimi, gauname skaičius 1,  $y_1 = 3, y_2, y_3, \dots, y_9, t$ , kuriems  $y_2 \leq 5, y_3 \leq 7, \dots, y_9 \leq 19$ . Iš gautųjų nelygybių išplaukia:

- $t = 20$ , o taip gali būti, tik jei gretimų narių skirtumas sekoje  $x_1, x_2, \dots, x_9, t$  visada lygus 2;
- $y_9 = 19$ , o taip gali būti, tik jei gretimų narių skirtumas sekoje  $1, y_1, y_2, \dots, y_9$  visada lygus 2.

Taigi raudonai nudažytos lygiai dvi dvidešimtkampio kraštinės – tos, kurios jungia viršūnes 1 ir 2 bei 20 ir 19.

## 27. (A) A

! Penkių apskritimų, kurių centrai yra  $A, B, C, D, E$ , spindulio ilgį atitinkamai pažymėkime  $a, b, c, d, e$ . Tada

$$a + b = AB = 16, \quad b + c = BC = 14, \quad c + d = CD = 17,$$

$$d + e = DE = 13, \quad e + a = EA = 14;$$

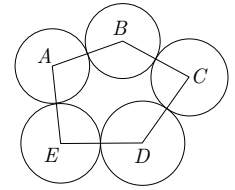
$$\begin{aligned} 74 &= 16 + 14 + 17 + 13 + 14 = (a + b) + (b + c) + (c + d) + (d + e) + (e + a) = \\ &= 2a + 2b + 2c + 2d + 2e, \quad a + b + c + d + e = 37. \end{aligned}$$

Dabar galime rasti visus spindulio ilgį:

$$a = 37 - (b + c) - (d + e) = 37 - 14 - 13 = 10,$$

$$b = AB - a = 6, \quad c = BC - b = 8, \quad d = CD - c = 9, \quad e = DE - d = 4.$$

Didžiausias iš skaičių  $a, b, c, d, e$  yra apskritimo su centru  $A$  spindulio ilgis  $a$ .



!! Penkių apskritimų, kurių centrai yra  $A, B, C, D, E$ , spindulio ilgį atitinkamai pažymėkime  $a, b, c, d, e$ . Pažymėkime  $S = a + b + c + d + e$ . Reikia nustatyti didžiausią iš skaičių  $a, b, c, d, e$ . Vietoj to galima mėginti nustatyti, kuris iš šių penkių skaičių mažiausias:

$$S - a = (b + c) + (d + e) = BC + DE, \quad S - b = (c + d) + (e + a) = CD + EA,$$

$$S - c = (d + e) + (a + b) = DE + AB, \quad S - d = (e + a) + (b + c) = EA + BC,$$

$$S - e = (a + b) + (c + d) = AB + CD.$$

Galima nustatyti visus šiuos penkis skaičius. Tačiau vien pažvelgus į duotus ilgį  $AB, BC, CD, DE, EA$ , iš karto galima pastebėti, kad reikia pasirinkti dviejų mažiausių iš jų sumą  $BC + DE = S - a$ . Atitinkamai didžiausias iš skaičių  $a, b, c, d, e$  yra apskritimo su centru  $A$  spindulio ilgis  $a$ .

## 28. (D) 35

? Pastebėjus, kad  $20 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5$ , natūralu patikrinti galimybes  $N = 45, N = 54, N = 522$ . Atitinkamai skaičiaus  $N + 1$  skaitmenų sandauga lygi

$$4 \cdot 6 = 24, \quad 5 \cdot 5 = 25, \quad 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30.$$

Taip atmetame atsakymus **E, C, B**. Kad atmetume dar vieną atsakymą, nepraleiskime galimybių, kai skaičius  $N$  turi skaitmenį 1. Pavyzdžiui, tinka  $N = 451$ . Tada skaičiaus  $N + 1$  skaitmenų sandauga lygi  $4 \cdot 5 \cdot 2 = 40$ . Atmetame ir atsakymą **A**.

Renkamės atsakymą **D**.

?? Pastebėkime, kad skaičius 20 nesidalija iš 9, todėl skaičiaus  $N$  paskutinis skaitmuo negali būti lygus 9. Tai reiškia, kad skaičiai  $N$  ir  $N + 1$  skiriasi tik paskutiniu skaitmeniu.

Atsakymas **D**) 35 turėtų atrodyti įtartinas. Skaičius 35 dalijasi iš 7. Jis galėtų būti skaičiaus  $N + 1$  skaitmenų sandauga, tik skaičiui  $N + 1$  turint skaitmenį 7. Jei šis skaitmuo būtų nepaskutinis, tai ir skaičius  $N$  turėtų skaitmenį 7. O jei skaičius  $N + 1$  baigtųsi skaitmeniu 7, tai skaičius  $N$  turėtų skaitmenį 6. Tačiau skaičiaus  $N$  skaitmenų sandauga 20 nei iš 7, nei iš 6 nesidalija. Vadinas, skaičiaus  $N + 1$  skaitmenų sandauga negali būti lygi 35.

Renkamės atsakymą **D**.

! Pastebėkime, kad skaičius 20 nesidalija iš 9, todėl skaičiaus  $N$  paskutinis skaitmuo  $a$  negali būti lygus 9. Tai reiškia, kad skaičiai  $N$  ir  $N + 1$  skiriasi tik paskutiniu skaitmeniu: skaičius  $N$  turi skaitmenį  $a$ , o skaičius  $N + 1$  turi skaitmenį  $a + 1$ .

Skaičius  $a$  yra skaičiaus 20 vienženklis daliklis, taigi vienintelės galimos  $a$  reikšmės yra 1, 2, 4, 5. Prie skaičiaus  $N$  pridėjus 1, paskutinis skaitmuo atitinkamai tampa lygus 2, 3, 5, 6, o skaitmenų sandauga atitinkamai padidėja  $\frac{2}{1}$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{5}{4}$ ,  $\frac{6}{5}$  karto. Atitinkamai skaičiaus  $N + 1$  skaitmenų sandauga gali būti lygi nebent šiems skaičiams:

$$20 \cdot \frac{2}{1} = 40, \quad 20 \cdot \frac{3}{2} = 30, \quad 20 \cdot \frac{5}{4} = 25, \quad 20 \cdot \frac{6}{5} = 24.$$

Vadinas, skaičiaus  $N + 1$  skaitmenų sandauga negali būti lygi 35. Baigdami sprendimą pastebėkime, kad skaitmenų sandaugos reikšmės 40, 30, 25 ir 24 yra įmanomos (žr. ? dalį).

29. **C** 7 kg

? Keturių sunkiausių svarmenų bendra masė  $9 + 10 + 11 + 12 = 42$  (kg) yra tik 1 kg didesnė už svarmenų masę 41 kg vienoje iš dėžių. Tai pastebėjus natūralu spėti, kad toje dėžėje yra 12 kg, 11 kg, 10 kg ir  $41 - 12 - 11 - 10 = 8$  (kg) svarmenys. Panašiai, imdami keturis sunkiausius iš likusių 8 svarmenų (9 kg, 7 kg, 6 kg, 5 kg), gausime 27 kg masę, o 26 kg gausime, vietoj 5 kg svarmens imdami  $26 - 9 - 7 - 6 = 4$  (kg) svarmenį. Taip gauname tinkamą pavyzdį, kaip svarmenys gali būti sudėti dėžėse:

$$41 = 12 + 11 + 10 + 8, \quad 26 = 9 + 7 + 6 + 4, \quad 5 + 3 + 2 + 1 (= 11).$$

Vadinas, 9 kg svarmuo gali būti vienoje dėžėje su 7 kg svarmeniu.

Renkamės atsakymą **C**.

! Keturių vienos dėžės svarmenų, kurių bendra masė yra 41 kg, masės kilogramais didėjimo tvarka pažymėkime  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Keturių vienos dėžės svarmenų, kurių bendra masė yra 26 kg, masės kilogramais didėjimo tvarka pažymėkime  $y_1, y_2, y_3, y_4$ .

Jei  $x_2, x_3, x_4$  reikšmės nėra didžiausios galimos (10, 11, 12), tai  $x_2 < 10$  ir

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 8 + 9 + 11 + 12 < 41.$$

Todėl  $x_2 = 10, x_3 = 11, x_4 = 12$  ir  $x_1 = 41 - x_2 - x_3 - x_4 = 8$ .

Jei  $y_2, y_3, y_4$  reikšmės nėra didžiausios (6, 7, 9) iš likusių galimų, tai  $y_2 < 6$  ir

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 4 + 5 + 7 + 9 < 26.$$

Todėl  $y_2 = 6, y_3 = 7, y_4 = 9$  ir  $y_1 = 26 - y_2 - y_3 - y_4 = 4$ .

Vadinasi, 9 kg svarmuo yra vienoje dėžėje su 7 kg svarmeniu, ir toje dėžėje nėra svarmenų, kurių masės yra 3, 5, 8 arba 10 kilogramų.

30. (A)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

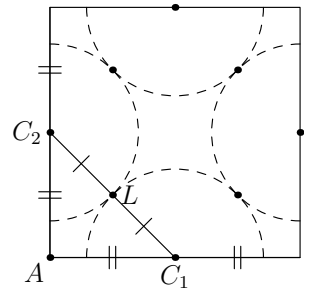
! Ertmės gylis lygus išpjauto pusrutulio spindulio ilgiui, tad jį ir turime nustatyti.

Teisingas toks bendras pastebėjimas: jei du rutuliai su centrais  $C_1$  ir  $C_2$ , esantys vienas kito išorėje, liečiasi taške  $L$ , tai taškas  $L$  yra atkarpoje  $C_1C_2$ , o atkarpos  $C_1L$  ir  $C_2L$  yra tų rutulių spinduliai. Pritaikykime šį pastebėjimą mūsų situacijai. Pasirinkime bet kurias dvi kubo sienas, turinčias bendrą briauną. Tos briaunos vidurio tašką pažymėkime  $A$ , sienų (ir atitinkamų dviejų pusrutulių) centrus pažymėkime  $C_1$  ir  $C_2$ , o atitinkamų pusrutulių lietimosi tašką pažymėkime  $L$ . Per taškus  $A, C_1, C_2$  eina plokštuma  $\alpha$ , lygiagreti su dviem priešingomis kubo sienomis (ir dalijanti kubą į dvi lygias dalis). Taškas  $L$  ne tik yra atkarpoje  $C_1C_2$ , bet ir dalija ją pusiau, nes pusrutulių spindulio ilgiai lygūs. Plokštumos  $\alpha$  sankirta su kubu yra  $2\text{ dm} \times 2\text{ dm}$  kvadratas. Taškas  $A$  yra šio kvadrato viršūnė, o  $C_1$  ir  $C_2$  yra jo gretimų kraštinių vidurio taškai (žr. pav.).

Taigi  $AC_1 = AC_2 = 1\text{ dm}$  ir

$$C_1C_2 = \sqrt{AC_1^2 + AC_2^2} = \sqrt{2}\text{ dm},$$

o ieškomas ertmės gylis lygus  $C_1L = C_2L = C_1C_2 : 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{ dm}$ .



# Atsakymai

| Uždavinio nr. | Atsakymas |
|---------------|-----------|
| 1             | D         |
| 2             | A         |
| 3             | C         |
| 4             | C         |
| 5             | D         |
| 6             | B         |
| 7             | E         |
| 8             | C         |
| 9             | D         |
| 10            | C         |
| 11            | B         |
| 12            | D         |
| 13            | E         |
| 14            | B         |
| 15            | E         |
| 16            | A         |
| 17            | A         |
| 18            | E         |
| 19            | C         |
| 20            | D         |
| 21            | B         |
| 22            | B         |
| 23            | D         |
| 24            | E         |
| 25            | C         |
| 26            | B         |
| 27            | A         |
| 28            | D         |
| 29            | C         |
| 30            | A         |