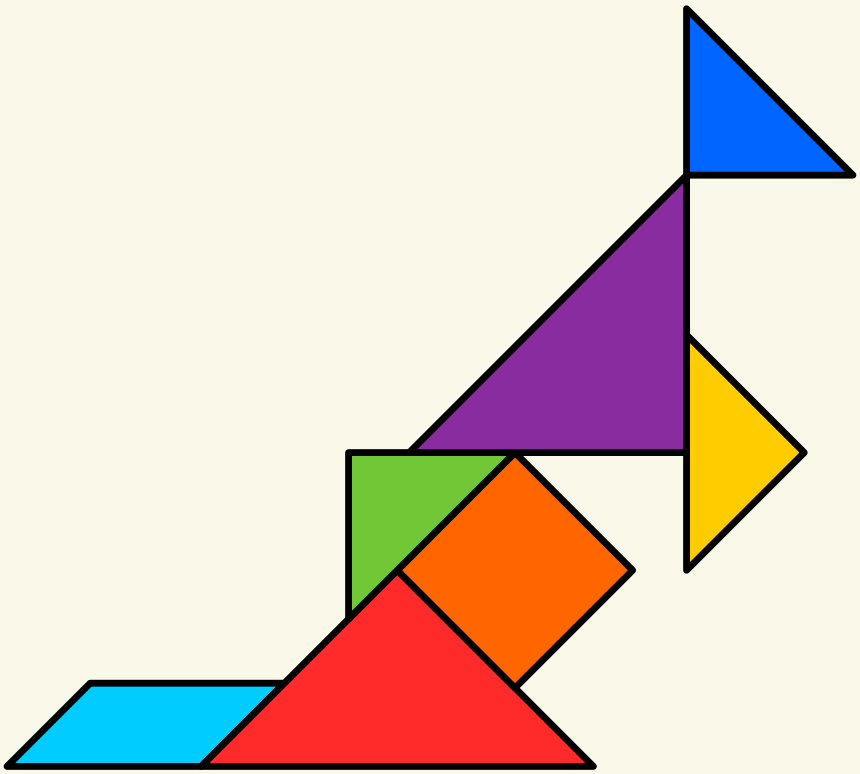
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA

Ekspertas

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI



2022

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2022. Ekspertas

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autoriai ir sudarytojai
Paulius Drungilas, Ugnė Gudžinskaitė, Lukas Maciulevičius, Juozas Juvencijus Mačys, Aivaras Novikas

Redaktorius
Juozas Juvencijus Mačys

Maketavo
Ugnė Gudžinskaitė

© Paulius Drungilas, Ugnė Gudžinskaitė, Lukas Maciulevičius, Juozas Juvencijus Mačys, Aivaras Novikas, 2024
© *Kengūros* konkurso organizavimo komitetas, 2024

Turinys

Pratarmė **3**

Sąlygos **4**

Užduočių sprendimai **8**

Pratarmė

Matematikas mokytojas Peter O'Halloran iš Sidnėjaus aštuntajame praėjusio amžiaus dešimtmetyje pradėjo organizuoti matematikos konkursą australų mokiniams, kuris sulaukė stulbinančio pasisekimo. Konkurso užduotys buvo testinės (reikėjo pasirinkti vieną iš keleto pateiktų atsakymų), o dalyvių atsakymai tikrinami kompiuteriais.

1991 m. prancūzų pedagogų Deledicq šeima, įkvėpti australų sėkmės, suorganizavo panašų matematikos konkursą *Kengūra*, kuriame pirmaisiais metais dalyvavo per 120 tūkstančių mokinių iš Prancūzijos. 1994 m. šis konkursas prasiplėtė į dar 7 šalis: Baltarusiją, Ispaniją, Lenkiją, Olandiją, Rumuniją, Rusiją ir Vengriją. 1994 m. įsteigta asociacija „Kengūra be sienų" vienija konkurso *Kengūra* šalis-nares. Kasmet vykstančiame asociacijai priklausančių šalių atstovų suvažiavime parenkamos konkurso užduotys ir sprendžiami organizaciniai klausimai.

Nuo 2011 m. konkurse visame pasaulyje kasmet dalyvauja per 6 milijonai mokinių, o asociacija „Kengūra be sienų" vienija per 60 šalių. Daugiau informacijos apie matematikos konkursą *Kengūra* galima rasti čia:

`http://aksf.org/`

Lietuvoje konkursas *Kengūra* pradėtas rengti nuo 1995 m. Konkursas organizuojamas 6 amžiaus grupėms: *Nykštukas* (1–2 kl.), *Mažylis* (3–4 kl.), *Bičiulis* (5–6 kl.), *Kadetas* (7–8 kl.), *Junioras* (9–10 kl.) ir *Senjoras* (11–12 kl.).

Konkursas kasmet vyksta trečiąjį kovo ketvirtadienį. Kiekvienas konkurso dalyvis gauna užduočių lapą ir dalyvio kortelę, kurioje pažymi atsakymus. Visų dalyvių kortelės nuskenuojamos ir apdorojamos kompiuteriu. Kasmet (nuo 2000 m.) paruošiamos uždavinių sprendimo knygelės, kurias galima rasti čia:

`http://kengura.lt/`

2015 m. atsirado nauja *Kengūros* dalyvių grupė nebemokiniams – *Ekspertas*. Šiai grupei konkursas buvo organizuotas „online" režimu.

Konkurso metu sprendžiama 30 uždavinių, kurių sprendimas vertinamas taip: jei uždavinio atsakymas yra teisingas, skiriami visi prie jo sąlygos nurodyti taškai (3, 4 arba 5); jei atsakymas neteisingas – atimamas ketvirtadalis uždaviniui numatytų taškų; už nepažymėtą atsakymą taškai neskiriami (0 taškų). Be to, kiekvienas dalyvis konkurso pradžioje turi 30 taškų (taigi net visų uždavinių atsakymus pažymėjus neteisingai, iš viso surenkama 0 taškų).

Šioje knygelėje ženklu **!** pažymėti griežti matematiniai sprendimai. Tačiau norint pasirinkti teisingą atsakymo variantą ne visada reikia griežto matematinio sprendimo. Kartais pakanka paaiškinti, kodėl kiti nurodyti atsakymo variantai netinka. Tokie sprendimai pažymėti ženklu **?**. Kai vienų ar kitų sprendimų pateikiama daugiau, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse pakanka net ir klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad skaitytojas nepatingės išsiaiškinti viską iki galo.

Daugiau informacijos apie *Eksperto* grupę galima rasti čia:

`http://www.ekspertas.kengura.lt/`

Viliamės, kad *Eksperto* grupė gausės – juk loginis mąstymas svarbus ne vien mokiniams, jis svarbus žmogui visą gyvenimą. Nestandartinių uždavinių sprendimas leidžia pasitikrinti ir pagilinti matematinius įgūdžius, ugdyti matematinę kultūrą.

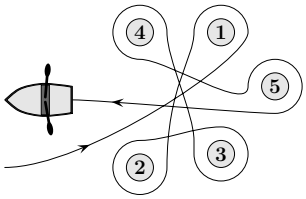
Organizatoriai

2022 m. *Eksperto* užduočių sąlygos

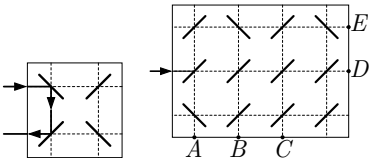
Klausimai po 3 taškus

1. Kiek daugiausia pirmadienių gali pasitaikyti per 45 iš eilės einančias dienas?
A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

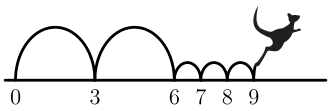
2. Sofija valtimi apiplaukė aplink penkis plūdurus, kaip parodyta paveikslėlyje. Kuriuos plūdurus ji apiplaukė pagal laikrodžio rodyklę?
A) 2, 3 ir 4 **B)** 1, 2 ir 3 **C)** 1, 3 ir 5 **D)** 2, 4 ir 5 **E)** 2, 3 ir 5



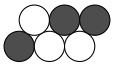
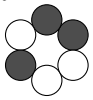
3. Lazerio spindulys atsispindi nuo veidrodžių taip, kaip parodyta pirmajame paveikslėlyje. Kurią raidę antrame paveikslėlyje pasieks lazerio spindulys?
A) *A* **B)** *B* **C)** *C* **D)** *D* **E)** *E*



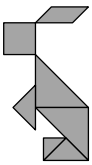
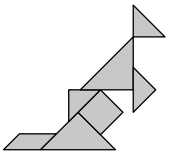
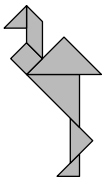
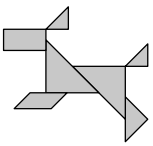
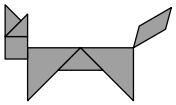
4. Kengūrėlė šokinėja skaičių tiese ir pradeda nuo skaičiaus 0. Ji visada padaro du didelius šuolius, tada tris mažus šuolius, kaip parodyta paveikslėlyje, ir taip daro vėl ir vėl. Ant kurio iš žemiau išvardytų skaičių kengūrėlė užšoks?
A) 82 **B)** 83 **C)** 84 **D)** 85 **E)** 86



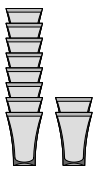
5. Juodai baltas vikšras, pavaizduotas paveikslėlyje dešinėje, susirangė miegoti. Kaip dabar gali atrodyti vikšras?

A)  **B)**  **C)** **D)** **E)**

6. Marija turi septynias figūrėles ir gali iš jų sudėlioti keturis iš žemiau pavaizduotų paveikslėlių. Kurio paveikslėlio Marija sudėti negali?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

7. Ramintos spintelėje atstumas tarp dviejų lentynų yra 36 cm. Raminta žino, kad bokšto iš 8 vienodų stiklinių, sudėtų viena į kitą, aukštis lygus 42 cm, o bokšto iš 2 tokių stiklinių aukštis lygus 18 cm (žr. pav.). Kiek daugiausiai stiklinių gali būti bokšte, kurį galima pastatyti į Ramintos spintelę?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7



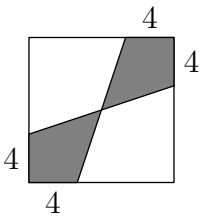
8. Mokinių prezidento rinkimuose dalyvauja penki kandidatai. Suskaičiavus 90% balsų, gauti tokie išankstiniai rezultatai:

Audra	Aušra	Audrys	Aušrinė	Audronė
14	11	10	8	2

Kiek kandidatų vis dar turi galimybę laimėti šiuos rinkimus?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

9. Trijų seserų amžiai yra trys skirtingi natūralieji skaičiai, kurių vidurkis lygus 10. Kiekviena iš seserų apskaičiavo kitų dviejų seserų amžių vidurkį. Vienas iš tų vidurkių lygus 11, o kitas – lygus 12. Kiek metų vyriausiajai seseriai?
A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 16

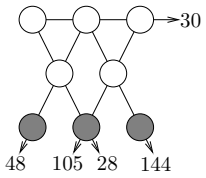
10. Paveikslėlyje pavaizduoto kvadrato kraštinės ilgis lygus 12. Kam lygus užtušuotos figūros plotas?
A) 48 **B)** 46 **C)** 44 **D)** 40 **E)** 36



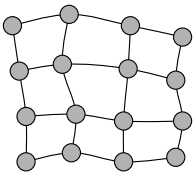
Klausimai po 4 taškus

11. Austėjos kambaryje yra du laikrodžiai. Vienas iš laikrodžių skuba viena minute per valandą, o kitas – vėluoja dviem minutėmis per valandą. Vakar Austėja abiejuose laikrodžiuose nustatė teisingą laiką. Šiandien Austėjos brolis Adomas, pažvelgęs į tuos laikrodžius, pamatė, kad vienas iš jų rodo 11:00, o kitas – 12:00. Kuriuo laiku vakar Austėja nustatė abu laikrodžius?
A) 23:00 **B)** 19:40 **C)** 15:40 **D)** 14:00 **E)** 11:20

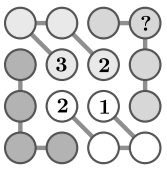
12. Į kiekvieną paveikslėlyje pavaizduotą apskritimą Gerda įrašė po vieną natūralųjį skaičių nuo 1 iki 8. Rodyklė rodo trijų skaičių, esančių tos rodyklės linijoje, sandaugą. Kam lygi trijuose apatiniuose apskritimuose įrašytų skaičių suma?
A) 11 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 17 **E)** 19



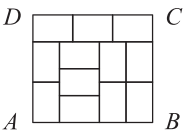
13. Vienoje šalyje yra 16 miestų, sujungtų keliais taip, kaip parodyta paveikslėlyje. Kai kuriuose miestuose reikia pastatyti elektrines, kad jos aprūpintų elektra visus miestus. Kiekviena elektrinė aprūpins tik savo miestą bei gretimus (t. y. su juo kelio atkarpa sujungtus) miestus. Kiek mažiausiai elektrinių reikia pastatyti?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7



14. Andrius nori taip įrašyti po skaičių į kiekvieną tuščią skrituliuką (žr. pav.), kad kiekvienoje eilutėje, kiekviename stulpelyje ir kiekviename atkarpomis sujungtų skrituliukų ketverte būtų skaičiai 1, 2, 3, 4. Ką jam reikia įrašyti vietoj klaustuko?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Neįmanoma nustatyti

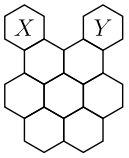


15. Stačiakampis $ABCD$ padalytas į 12 vienodų stačiakampėlių, kaip parodyta paveikslėlyje. Koks yra atkarpų AD ir DC ilgių santykis?
A) 8:9 **B)** 5:6 **C)** 7:8 **D)** 2:3 **E)** Kitas atsakymas



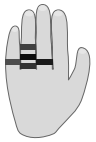
16. Iš natūraliojo skaičiaus n daliklių, mažesnių už patį n, didžiausias yra 2022. Kam lygi skaičiaus n skaitmenų suma?
A) 6 **B)** 7 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 14

17. Bitė Zvimbytė gali perropoti iš vienos korio akutės tiesiai į kitą, jei šios turi bendrą kraštinę. Ji nori nuropoti iš akutės X į akutę Y septyniomis likusiomis pavaizduotomis akutėmis, kiekvieną iš jų aplankydama po lygiai vieną kartą. Keliais būdais ji tai gali padaryti?



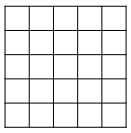
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

18. Keliais būdais nuo rankos, pavaizduotos paveikslėlyje, galima po vieną numauti visus penkis žiedus?



A) 16 **B)** 20 **C)** 24 **D)** 30 **E)** 45

19. Kiek mažiausiai langelių reikia užtušuoti 5×5 lentelėje, kad kiekvieno šios lentelės 1×4 ir 4×1 stačiakampio bent vienas langelis būtų užtušuotas?



A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

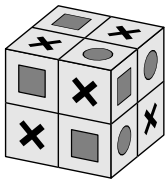
20. Mauglis zebrui ir panterai uždavė klausimą: „Kokia savaitės diena buvo vakar?“. Pirmadieniais, antradieniais ir trečiadieniais zebras visada meluoja, o kitomis savaitės dienomis – visada sako tiesą. Ketvirtadieniais, penktadieniais ir šeštadieniais pantera visada meluoja, o kitomis savaitės dienomis – visada sako tiesą. Zebras atsakė: „Vakar buvo viena iš tų savaitės dienų, kai aš meluoju.“ Pantera taip pat atsakė: „Vakar buvo viena iš tų savaitės dienų, kai aš meluoju.“ Kokia savaitės diena šiandien?
A) Ketvirtadienis **B)** Penktadienis **C)** Šeštadienis **D)** Sekmadienis **E)** Pirmadienis

Klausimai po 5 taškus

21. Raminta tiesėje pažymėjo keletą taškų. Julija tarp kiekvienų dviejų gretimų jau pažymėtų taškų pažymėjo po vieną naują tašką. Julija šį procesą pakartojo dar tris kartus. Tada paaiškėjo, kad tiesėje pažymėti lygiai 225 taškai. Kiek taškų Raminta pažymėjo tiesėje?
A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 25

22. Septyniuose parkuose gyvena 2022 kengūros ir tam tikras skaičius koalų. Kiekviename parke gyvenančių kengūrų skaičius lygus likusiuose parkuose gyvenančių koalų skaičiui. Kiek iš viso koalų gyvena šiuose septyniuose parkuose?
A) 288 **B)** 337 **C)** 576 **D)** 674 **E)** 2022

23. Kiekviena $2 \times 2 \times 2$ kubo siena padalyta į keturis vienetinius langelius. Kiekviename langelyje nupieštas vienas simbolis: skritulys (S), kvadratas (Kv) arba kryželis (Kr). Simboliai bet kuriuose dviejuose langeliuose, turinčiuose bendrą kraštinę, skirtingi (vienas galimas pavyzdys – paveikslėlyje). Kurį simbolių rinkinį galima būtų aptikti ant tokio kubo?



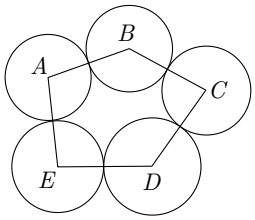
A) 6 S, 8 Kv, visi kiti Kr **B)** 7 S, 8 Kv, visi kiti Kr **C)** 5 S, 8 Kv, visi kiti Kr
D) 7 S, 7 Kv, visi kiti Kr **E)** Nė vieno iš pateiktųjų

24. Vienos salos gyventojai kalba vien klausimais. Kiekvienas gyventojas yra arba teigūnas, kurio kiekvieno klausimo teisingas atsakymas yra „taip“, arba neigenis, kurio kiekvieno klausimo teisingas atsakymas yra „ne“. Du salos gyventojai Aras ir Ara kartą sutiko svetimšalį. Ara jam pasakė: „Ar aš ir Aras abu esame neigeniai?“ Kas tokie yra Aras ir Ara?
A) Abu teigūnai **B)** Abu neigeniai **C)** Aras teigūnas, Ara neigenė
D) Aras neigenis, Ara teigūnė **E)** Trūksta informacijos

25. Dvidešimtkampio viršūnės sunumeruotos skaičiais nuo 1 iki 20. Kiekvienos jo kraštinės galuose yra skaičiai, kurie skiriasi 1 arba 2. Kraštinės, jungiančios skaičius, kurie skiriasi tik 1, nudažytos raudonai. Kiek raudonų kraštinių turi dvidešimtkampis?
A) 1 **B)** 2 **C)** 5 **D)** 10 **E)** Tai priklauso nuo viršūnių numeracijos

26. Natūraliojo skaičiaus N skaitmenų sandauga lygi 20. Kuris skaičius **negali** būti skaičiaus $N+1$ skaitmenų sandauga?
A) 40 **B)** 30 **C)** 25 **D)** 35 **E)** 24

27. Penki apskritimai su centrais A, B, C, D, E liečia vieni kitus, kaip parodyta paveikslėlyje. Kuris taškas yra apskritimo su didžiausiu spinduliu centras, jei $AB = 16$, $BC = 14$, $CD = 17$, $DE = 13$, $AE = 14$?

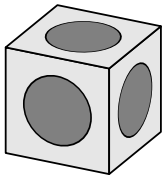


A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

28. Dvylika svarmenų sudėti po keturis į tris dėžes. Svarmenų masės kilogramais yra 12 skirtingų natūraliųjų skaičių 1, 2, 3, ..., 12. Vienoje dėžėje esančių svarmenų bendra masė yra 41 kg, o kitoje – 26 kg. Kurios masės svarmuo guli vienoje dėžėje su 9 kg svarmeniu?
A) 3 kg **B)** 5 kg **C)** 7 kg **D)** 8 kg **E)** 10 kg

29. Dvylika svarmenų sudėti po keturis į tris dėžes. Svarmenų masės kilogramais yra 12 skirtingų natūraliųjų skaičių 1, 2, 3, ..., 12. Vienoje dėžėje esančių svarmenų bendra masė yra 41 kg, o kitoje – 26 kg. Kurios masės svarmuo guli vienoje dėžėje su 9 kg svarmeniu?
A) 3 kg **B)** 5 kg **C)** 7 kg **D)** 8 kg **E)** 10 kg

30. Kiekvienoje kubo sienoje išpjauta pusrutulio formos ertmė. Visi pusrutuliai lygūs, o jų centrai sutampa su atitinkamų sienų centrais. Bet kurių gretimų kubo sienų ertmės liečiasi viename taške (t. y. atitinkami pusrutuliai liečiasi). Koks yra kiekvienos ertmės gylis (decimetrais), jei kubo briaunos ilgis lygus 2 dm?



A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** 1 **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Eksperto užduočių sprendimai

1. Ⓒ 7

! Įsivaizduokime, jog kalendoriuje apvedėme 45 iš eilės einančias dienas. Dabar, pradėdami nuo pirmos apvestos, kas 7 dienas padėkime kablelį. Iš viso padėsime 6 kablelius, nes 45 padaliję iš 7 gauname dalmenį 6 ir liekaną 3. Kiekviename kableliais išskirtame intervale bus po vieną pirmadienį, ir dar daugiausia vienas pirmadienis gali patekti į trijų dienų likutį (pateks, jei pirma apvesta diena bus šeštadienis, sekmadienis arba pirmadienis). Taigi daugiausia galėjo būti apvesti $6 + 1 = 7$ pirmadieniai.

Teisingas atsakymas **C**.

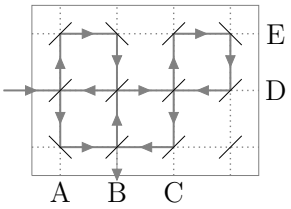
2. Ⓔ 2, 3 ir 5

! Uždavinio paveikslėlyje matyti, kad Sofija 2, 3 ir 5 plūdurus apiplaukė pagal laikrodžio rodyklę, o 1 ir 4 plūdurus – prieš laikrodžio rodyklę.

Teisingas atsakymas **E**.

3. Ⓑ *B*

! Iš 1 paveikslėlio matome, jog kampas tarp krintančio ir atsispindinčio spindulio turi būti status. (Be to, spindulys ne pereina per veidrodį, o iš tiesų atsispindi.) Remdamiesi tuo, pavaizduojame spindulio kelią. Dabar matome, jog spindulys pasieks raidę *B*.

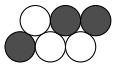


Teisingas atsakymas **B**.

4. Ⓒ 84

! Kengūrėlė, pradėjusi nuo skaičiaus 9 ir atlikusi du didelius šuolius, o tada tris mažus, užšoks ant skaičių $9 + 3 = 12$, $9 + 6 = 15$, $9 + 7 = 16$, $9 + 8 = 17$ ir $9 + 9 = 18$. Pradėdama nuo skaičiaus 18 ir atlikusi du didelius šuolius, o tada tris mažus, Kengūrėlė užšoks ant skaičių $18 + 3 = 21$, $18 + 6 = 24$, $18 + 7 = 25$, $18 + 8 = 26$ ir $18 + 9 = 27$. Taigi Kengūrėlė užšoks ant kiekvieno skaičiaus, kurio dalybos iš 9 liekana lygi 0, 3, 6, 7 ir 8 ir neužšoks nė ant vieno skaičiaus, kurio dalybos iš 9 liekana lygi 1, 2, 4 ir 5. Kadangi skaičių 82, 83, 84, 85 ir 86 dalybos iš 9 liekanos atitinkamai lygios 1, 2, 3, 4 ir 5, tai Kengūrėlė užšoks ant skaičiaus 84, bet neužšoks ant skaičių 82, 83, 85 ir 86.

Teisingas atsakymas **C**.

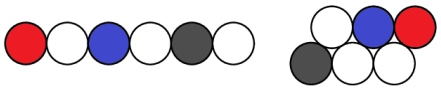
5. (A) 

! Lygiai vienas uždavinio paveikslėlyje pavaizduoto vikšro baltas narelis liečiasi tik su vienu juodu nareliu, o kiekvienas iš likusių baltų narelių liečiasi su dviem juodais nareliais. Vadinasi, ne daugiau negu vienas susirangiusio vikšro baltas narelis liečiasi su lygiai vienu juodu nareliu. Todėl atsakymai **B** ir **C** netinka.

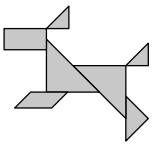
Be to, netinka ir atsakymas **D**, kuriame vienas baltas narelis nesiliečia nė su vienu juodu nareliu.

Panašiai gauname, kad ne daugiau negu vienas susirangiusio vikšro narelis liečiasi su lygiai vienu baltu nareliu. Todėl netinka ir atsakymas **E**.

Kita vertus, vikšras gali susirangyti miegoti taip, kaip pavaizduota atsakyme **A** (žr. pav.).



Teisingas atsakymas **A**.

6. (D) 

? Visi paveikslėliai sudėlioti iš 7 figūrėlių. Pastebime, kad keturi paveikslėliai **A**, **B**, **C** ir **E** sudėlioti tik iš trikampių, kvadratų ir lygiagretainių. Vieninteliame **D** paveikslėlyje yra stačiakampis. Vadinasi, Marijos rinkinyje nebuvo stačiakampio, taigi ji negali sudėlioti **D** paveikslėlio.

! Iki „griežto“ sprendimo tetrūksta patikrinti, ar likusius keturis paveikslėlius galima sudėlioti iš tų pačių figūrėlių: 5 trikampių, 1 lygiagretainio ir 1 kvadrato. **A**, **B**, **C** ir **E** atvejais tai galima padaryti, o **D** paveikslėlio nepavyks sudėlioti, nes trūksta stačiakampio.

7. (D) 6

! Į stiklinių bokštą įdėjus vieną papildomą stiklinę, šio bokšto aukštis padidėja $\frac{42-18}{8-2} = 4$ cm. Bokšto iš 7 stiklinių aukštis lygus $42-4 = 38$ cm, o bokšto iš 6 stiklinių aukštis lygus $38-4 = 34$ cm. Taigi bokšte, kurį galima pastatyti į Ramintos spintelę, daugiausiai gali būti 6 stiklinės.

Teisingas atsakymas **D**.

8. Ⓒ 3

! Išanksktiniuose rezultatuose atsispindi

$$14 + 11 + 10 + 8 + 2 = 45$$

rinkėjų balsai. Tai yra 90% balsų, todėl rinkimuose iš viso dalyvavo $45 \cdot \frac{100}{90} = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$ rinkėjų. Taigi liko nesuskaičiuoti $50 - 45 = 5$ balsai. Šį rezultatą galima gauti ir kitaip: jei 45 balsai sudaro 90% visų balsų, tai $45 : 9 = 5$ balsai sudaro likusius $10\% = 90\% : 9$ balsų.

Net jei Aušrinė, kol kas turinti 8 balsus, gautų visus likusius 5 balsus, tai vis tiek turėtų jų mažiau nei Audra, jau turinti 14 balsų. Tuo labiau negali laimėti Audronė, teturinti 2 balsus. Kita vertus, yra įmanoma, kad visus likusius 5 balsus gaus Audrys ir, kitų kandidatų balsams nepakitus, turės 15 balsų – daugiau nei kiti. Taigi Audrys gali laimėti. Analogiškai yra įmanoma, kad laimės Audra arba Aušra. Vadinasi, yra trys kandidatai, vis dar galintys laimėti rinkimus.

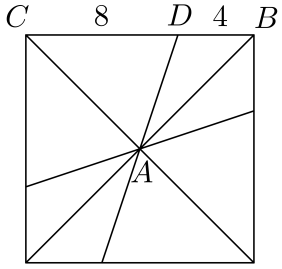
9. Ⓔ 16

! Kadangi trijų seserų amžių vidurkis lygus 10, tai jų amžių suma lygi $3 \cdot 10 = 30$. Dviejų seserų amžių vidurkis lygus 11, todėl jų amžių suma lygi $2 \cdot 11 = 22$. Todėl vienos iš seserų amžius lygus $30 - 22 = 8$. Panašiai, dar dviejų seserų amžių suma lygi $2 \cdot 12 = 24$, nes atitinkamas vidurkis lygus 12. Todėl vienos iš seserų amžius lygus $30 - 24 = 6$. Vadinasi, trečiosios sesers amžius lygus $30 - 8 - 6 = 16$.

Teisingas atsakymas **E**.

10. Ⓐ 48

! Uždavinio sąlygoje pavaizduotos užtušuotos figūros plotas yra 4 kartus didesnis už trikampo ABD plotą (žr. pav.).



Trikampio ABC plotas lygus ketvirtadaliui kvadrato ploto, t. y. lygus $\frac{1}{4} \cdot 12 \cdot 12 = 36$. Trikampiai ABD ir ABC turi bendrą aukštinę, todėl jų plotų santykis lygus atitinkamai $\frac{DB}{CB} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Taigi trikampio ABD plotas lygus $\frac{1}{3} \cdot 36 = 12$. Vadinasi, užtušuotos figūros plotas lygus $4 \cdot 12 = 48$.

Teisingas atsakymas **A**.

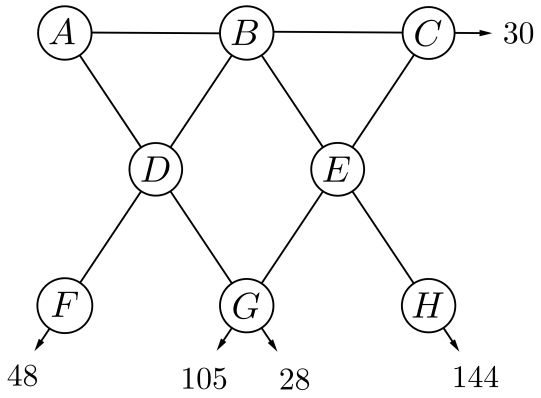
11. Ⓒ 15:40

! Vėluojantis laikrodis nuo skubančio laikrodžio atsilieka 3 minutėmis per valandą. Tuo momentu, kai Adomas pažvelgė į laikrodžius, jų rodomi laikai skyrėsi 60 minučių. Vadinasi, Austėja laikrodžius nustatė lygiai prieš $\frac{60}{3} = 20$ valandų. Nuo to momento po 20 valandų skubantis laikrodis parodys 20 minučių daugiau negu teisingas laikas. Todėl kai Adomas pažvelgė į laikrodžius, teisingas laikas buvo 11:40. Vadinasi, vakar Austėja laikrodžius nustatė 15:40.

Teisingas atsakymas **C**.

12. Ⓓ 17

! Į apskritimus įrašytus skaičius pažymėkime A, B, C, D, E, F, G ir H (žr. pav.).



Lygiai vienas iš skaičių nuo 1 iki 8 dalijasi iš 5 ir lygiai vienas iš jų dalijasi iš 7. Kadangi $ABC = 30 = 5 \cdot 6$ ir $CEG = 105 = 5 \cdot 21$, tai $C = 5$. Panašiai, iš lygybių $CEG = 105 = 7 \cdot 15$ ir $ADG = 28 = 7 \cdot 4$ gauname $G = 7$. Tada

$$E = \frac{CEG}{CG} = \frac{105}{5 \cdot 7} = 3.$$

Be to,

$$AB = \frac{ABC}{C} = \frac{30}{5} = 6.$$

Skaičių 6 dviejų natūraliųjų skaičių sandauga galima išreikšti lygiai dviem būdais: $6 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ ir $6 = 1 \cdot 6 = 6 \cdot 1$. Kadangi $E = 3$, tai $A \neq 3$ ir $B \neq 3$. Todėl $A = 1$ ir $B = 6$ arba $A = 6$ ir $B = 1$. Tačiau sandauga $ADG = 28$ nesidalija iš 6, vadinasi $A = 1$ ir $B = 6$. Tuomet

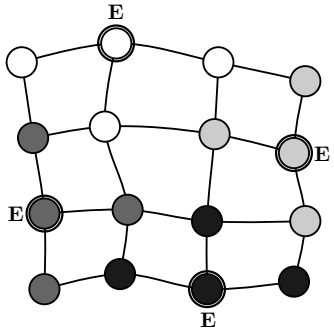
$$H = \frac{BEH}{BE} = \frac{144}{6 \cdot 3} = 8, \quad D = \frac{ADG}{AG} = \frac{28}{1 \cdot 7} = 4, \quad F = \frac{BDF}{BD} = \frac{48}{6 \cdot 4} = 2.$$

Taigi trijuose apatiniuose apskritimuose įrašytų skaičių suma lygi $F + G + H = 2 + 7 + 8 = 17$.

Teisingas atsakymas **D**.

13. Ⓑ 4

! Atkreipkime dėmesį į keturis vienas nuo kito nutolusius miestus – „kampinius“, kurių kiekvienas turi tik po du gretimus miestus. Jokia elektrinė neaprūpins elektra dviejų iš šių miestų, todėl elektrinių reikės pastatyti mažiausiai keturias.



Kita vertus, keturias elektrines pastačius, kaip parodyta paveikslėlyje, elektra bus aprūpinti visi miestai.

Vadinasi, mažiausias elektrinių, elektra aprūpinančių visus miestus, skaičius lygus 4.

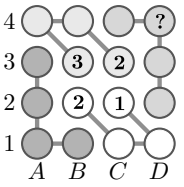
!! Visus miestus elektra gali aprūpinti keturios elektrinės. Tai galima pagrįsti pavyzdžiu, nurodant tinkamus keturis miestus (žr. **!** dalį).

Kita vertus, kiekvienas miestas turi daugiausiai keturis gretimus. Todėl kiekviena pastatyta elektrinė elektra aprūpins daugiausiai penkis miestus. Kadangi $3 \cdot 5 < 16$, tai trijų elektrinių nepakaks.

Vadinasi, mažiausias elektrinių, elektra aprūpinančių visus miestus, skaičius lygus 4.

14. Ⓑ 2

! Patogumo dėlei sužymėkime skrituliukus panašiai kaip šachmatų lentoje. Skrituliukas su klaustuku bus $D4$.



Panagrinėkime skrituliukų ketvertą $B3$, $A4$, $B4$ ir $C3$. Skaičiai 2 ir 3 jau įrašyti, todėl likusiuose skrituliukuose $A4$ ir $B4$ kuria nors tvarka turėsime įrašyti skaičius 1 ir 4. Tuomet viršutinėje eilutėje, skrituliukuose $C4$ ir $D4$ kuria nors tvarka turėsime įrašyti skaičius 2 ir 3. Tačiau į $C4$ rašyti 2 negalima, todėl į $C4$ įrašysime 3, o į $D4$ – skaičių 2.

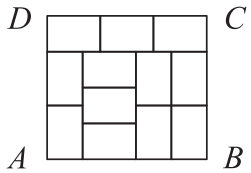
Taigi teisingas atsakymas **B**.

!! Įsitikinkime, kad uždavinio sąlyga korektiška – galima užpildyti ir likusius skrituliukus. Nesunku suvokti, jog reikia pildyti taip:

$$C1-4,\ D1-3,\ B1-1,\ A1-2,\ B4-4,\ A4-1,\ A3-4,\ A2-3,\ D2-4,\ D3-1.$$

15. Ⓐ 8 : 9

! Kiekvieno iš 12 stačiakampėlių matmenis pažymėkime $a \times b$ (čia $a > b$). Paveikslėlyje matome, kad



$$AB = b + a + b + b = a + 3b, \qquad CD = a + a + a = 3a.$$

Todėl $a + 3b = 3a$ ir $3b = 2a$. Galime pažymėti $a = 3x,\ b = 2x$. Tada

$$AD = a + a + b = 8x, \qquad DC = 3a = 9x, \qquad AD : DC = 8 : 9.$$

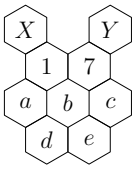
16. (D) 12

! Kadangi 2022 yra lyginis skaičius, tai 2 yra skaičiaus n daliklis. Tuomet $\frac{n}{2}$ yra didžiausias n daliklis, mažesnis už patį n. Taigi $\frac{n}{2} = 2022$, ir $n = 4044$. Vadinasi, skaičiaus n skaitmenų suma lygi $4 + 0 + 4 + 4 = 12$.

Teisingas atsakymas **D**.

17. (D) 5

! Čia tenka perrinkti galimybes. Septynias korio akutes numeruokime natūraliaisiais skaičiais nuo 1 iki 7, taip nurodydami jų aplankymo tvarką.



Akutės, kurias reikia pažymėti skaičiais 1 ir 7, nustatomos vienareikšmiškai. Skaičiai 2 ir 6 neišvengiamai yra du iš skaičių a, b ir c (žr. pav.). Yra trys galimybės:

(i) jei $b = 2$, tai $c = 6$, $e = 5$, $d = 4$, $a = 3$; čia gauname vieną būdą, kaip gali keliauti bitė;

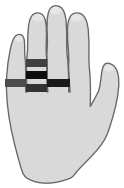
(ii) jei $b = 6$, tai $a = 2$, $d = 3$, $e = 4$, $c = 5$; vėl gauname vieną būdą, kaip gali keliauti bitė;

(iii) jei $b \neq 2$ ir $b \neq 6$, tai $a = 2$, $c = 6$; čia kiekvienai galimai b reikšmei 3, 4, 5 gauname po vieną būdą, kaip gali keliauti bitė; taigi gauname tris būdus.

Iš viso gauname $1 + 1 + 3 = 5$ būdus, kaip gali keliauti bitė.

18. (B) 20

! Nuo bevardžio piršto su trimis žiedais viršutinis žiedas turi būti numautas anksčiau nei vidurinis, o vidurinis – anksčiau nei apatinis. Tuo tarpu likę du žiedai (nuo mažylio ir didžiojo piršto) gali būti numauti bet kada.

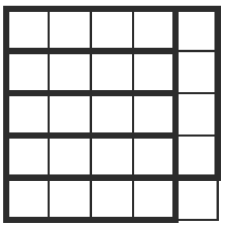


Pirmiausiai pasirinkime, kelintas iš penkių žiedų bus numautas mažylio žiedas. Tam yra 5 galimybės. Toliau pasirinkime, kelintas iš penkių žiedų bus numautas didžiojo piršto žiedas. Padarius pirmąjį pasirinkimą, antrajam lieka 4 galimybės. Padarę abu pasirinkimus, gauname lygiai vieną penkių žiedų numovimo būdą: toliau bevardžio piršto trijų žiedų numovimo tvarka nustatoma vienareikšmiškai.

Vadinasi, iš viso yra $5 \cdot 4 = 20$ būdų, kaip numauti žiedus.

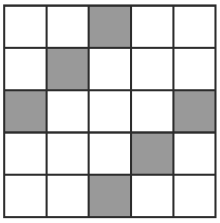
19. Ⓑ 6

! Pastebėkime, kad 5×5 lentelėje galima pažymėti penkis 4×1 stačiakampius ir vieną 1×4 stačiakampį (žr. 1 pav.).



1 pav.

Vadinasi, 5×5 lentelėje reikia užtušuoti mažiausiai 6 langelius. Kita vertus, 5×5 lentelėje galima taip užtušuoti 6 langelius, kad kiekvieno šios lentelės 1×4 ir 4×1 stačiakampio bent vienas langelis būtų užtušuotas. Toks užtušavimas pavaizduotas 2 paveikslėlyje. Matome, kad kiekvienas 1×4 ir 4×1 stačiakampis turės lygiai vieną iš 6 užtušuotų langelių.



2 pav.

Teisingas atsakymas **B**.

20. Ⓐ Ketvirtadienis

! Jei šiandien zebras sako tiesą, tai vakar jis būtų melavęs. Vienintelė savaitės diena, kai zebras sako tiesą, o dieną prieš meluoja, yra ketvirtadienis. Taigi jei šiandien zebras sako tiesą, tai šiandien yra ketvirtadienis.

Jei šiandien zebras meluoja, tai vakar jis būtų sakęs tiesą. Vienintelė savaitės diena, kai zebras meluoja, o dieną prieš sako tiesą, yra pirmadienis. Taigi jei šiandien zebras meluoja, tai šiandien yra pirmadienis.

Vadinasi, iš zebro atsakymo sužinome, kad šiandien yra pirmadienis arba ketvirtadienis. Panašiai iš panteros atsakymo sužinome, kad šiandien yra ketvirtadienis arba sekmadienis. Taigi iš zebro ir panteros atsakymų išplaukia, kad šiandien yra ketvirtadienis.

Teisingas atsakymas **A**.

21. Ⓒ 15

! Tarkime, kad Raminta tiesėje pažymėjo n taškų. Julijai tarp kiekvienų dviejų gretimų jau pažymėtų taškų pažymėjus po vieną naują tašką, tiesėje buvo pažymėta $n + (n-1) = 2n-1$ taškas. Šią procedūrą Julija pakartojo dar tris kartus, ir po kiekvieno karto tiesėje buvo pažymėta atitinkamai $2(2n-1)-1 = 4n-3$, $2(4n-3)-1 = 8n-7$ ir $2(8n-7)-1 = 16n-15$ taškų. Taigi $16n-15 = 225$, ir iš čia randame $n = 15$.

Teisingas atsakymas **C**.

22. Ⓑ 337

! Pirmame, antrame, trečiame, ketvirtame, penktame, šeštame ir septintame parke gyvenančių kengūrų skaičių pažymėkime atitinkamai a, b, c, d, e, f ir g, o koalų skaičių pažymėkime atitinkamai A, B, C, D, E, F ir G. Septyniuose parkuose gyvenančių koalų skaičių pažymėkime S. Tada $S = A+B+C+D+E+F+G$. Pirmame parke gyvenančių kengūrų skaičius a lygus likusiuose parkuose gyvenančių koalų skaičiui $B+C+D+E+F+G = S-A$. Taigi $a = S-A$. Panašiai gauname lygybes $b = S-B$, $c = S-C$, $d = S-D$, $e = S-E$, $f = S-F$ ir $g = S-G$. Sudėję šias lygybes, gauname

$$a+b+c+d+e+f+g =$$

$$= (S-A)+(S-B)+(S-C)+(S-D)+(S-E)+(S-F)+(S-G) =$$

$$= 7S-(A+B+C+D+E+F+G) = 7S-S = 6S.$$

Suma $a+b+c+d+e+f+g$ lygi septyniuose parkuose gyvenančių kengūrų skaičiui, kuris pagal uždavinio sąlygą lygus 2022. Taigi $6S = 2022$, ir iš či $S = 337$.

Teisingas atsakymas **B**.

23. Ⓔ Nė vieno iš pateiktųjų

! Iš pirmo žvilgsnio gali atrodyti, kad yra daug būdų, kaip pažymėti kubą simboliais, ir galima pasimesti, ieškant būdų, atitinkančių atsakymus **A**–**D**. Mėginkime ieškoti dėsningumų, kaip gali būti išdėstyti simboliai.

Kubas turi 6 sienas, o kiekvienoje iš jų yra 4 langeliai. Taigi turime iš viso $6 \cdot 4 = 24$ langelius. Juos galima suskirtyti į 8 trejetus, imant po tris langelius ties kiekviena iš kubo 8 viršūnių. Nagrinėkime bet kurį tokį langelių trejetą. Bet kurie du iš šių trijų langelių turi bendrą kraštinę. Taigi trijuose langeliuose ties viena kubo viršūne turi būti visi trys simboliai: po vieną skritulį, kvadratą ir kryželį. Kadangi kiekviename langelių trejete trijų simbolių yra po lygiai, tai ir imant visą kubą, imant visus aštuonis langelių trejetus, trijų simbolių turi būti po lygiai: iš viso 8 skrituliai, 8 kvadratai ir 8 kryželiai. Tai vienintelė galimybė. Kadangi ji neatitinka nė vieno iš atsakymų **A**–**D**, tai teisingas yra atsakymas **E**.

24. Ⓒ Aras teigūnas, Ara neigenė

! Nagrinėkime Arą ir jos užduotą klausimą. Šis klausimas yra susijęs su teiginiu „tiek Ara yra neigenė, tiek Aras yra neigenis“. Jei teiginys teisingas, tai teisingas atsakymas į Aros klausimą yra „taip“, o jei teiginys klaidingas, tai teisingas atsakymas yra „ne“. Pirmuoju atveju gauname prieštarą: viena vertus, teisingas teiginys teigia, kad Ara neigenė, o kita vertus, Ara, uždavusi klausimą, į kurį reikia atsakyti teigiamai, turi būti teigūnė. Vadinasi, teisingas atsakymas į Aros klausimą yra „ne“, tad Ara yra neigenė. Tuo pačiu tai reiškia, kad teiginys klaidingas, t. y. bent vienas iš dviejų salos gyventojų nėra neigenis. Kadangi Ara neigenė, tai Aras teigūnas. Vadinasi, galime vienareikšmiškai nustatyti dviejų gyventojų tapatybę: Aras teigūnas, Ara neigenė.

!! Pakanka patikrinti keturias galimybes, nurodytas atsakymuose **A**–**D**. Kiekvienu iš keturių atvejų galime nustatyti teisingą atsakymą į Aros klausimą:

Ara\Aras	Teigūnas	Neigenis
Teigūnė	ne	ne
Neigenė	ne	taip

Teisingas atsakymas į Aros klausimą privalo atitikti Aros tapatybę: jei ji teigūnė, tai „taip“, o jei neigenė, tai „ne“. Taigi lentelės antroje eilutėje turime ieškoti atsakymo „taip“, o trečioje eilutėje – atsakymo „ne“. Yra vienintelis tinkamas langelis: atsakymas „ne“ trečioje eilutėje. Šis langelis ir nusako vienintelį įmanomą atvejį: Aras teigūnas, Ara neigenė.

25. Ⓑ 2

! Dvidešimtkampio forma uždaviniui reikšmės neturi, tad dėl patogumo galime įsivaizduoti, kad jis taisyklingasis. Nagrinėkime viršūnę 1 ir jai priešingą viršūnę t. Kiekvienoje pusėje nuo šias viršūnes jungiančios įstrižainės yra po 9 viršūnes. Tarkime, kad vienoje pusėje, einant nuo viršūnės 1 iki viršūnės t, viršūnės iš eilės pažymėtos skaičiais x_1, x_2, …, x_9, o kitoje pusėje – skaičiais y_1, y_2, …, y_9. Tada:

- skaičiai x_1 ir y_1, gretimi skaičiui 1, tegali būti lygūs 2 ir 3; dėl simetrijos galime tarti, kad $x_1 = 2$ ir $y_1 = 3$;
- skaičiai x_2 ir y_2, gretimi skaičiams 2 ir 3, tegali būti lygūs 4 ir 5; tinka tik galimybė $x_2 = 4$ ir $y_2 = 5$;
- analogiškai iš eilės gauname

$$x_3 = 6 \text{ ir } y_3 = 7, \qquad x_4 = 8 \text{ ir } y_4 = 9, \qquad \ldots, \qquad x_9 = 18 \text{ ir } y_9 = 19;$$

- likęs nežinomas skaičius t lygus 20.

Vadinasi, iš esmės tėra vienintelis viršūnių numeracijos būdas: pasirenkamos dvi gretimos viršūnės, kurios bus pažymėtos skaičiais 1 ir 2, o tada iš eilės ratu viršūnės pažymimos skaičiais

$$1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,\ 18,\ 20,\ 19,\ 17,\ 15,\ \ldots,\ 7,\ 5,\ 3 \text{ (ir vėl 1).}$$

Taigi raudonai nudažytos lygiai dvi dvidešimtkampio kraštinės – tos, kurios jungia viršūnes 1 ir 2 bei 20 ir 19.

!! Dvidešimtkampio viršūnės, gretimos viršūnei 1, tegali būti pažymėtos skaičiais 2 ir 3. Pradėję nuo viršūnės 1 ir iš eilės ratu imdami viršūnes, gauname skaičius 1, $x_1 = 2$, x_2, x_3, …, x_9, t, kuriems $x_2 \leqslant 4$, $x_3 \leqslant 6$, …, $x_9 \leqslant 18$, $t \leqslant 20$. Pradėję nuo viršūnės 1 ir apeidami viršūnes kita kryptimi, gauname skaičius 1, $y_1 = 3$, y_2, y_3, …, y_9, t, kuriems $y_2 \leqslant 5$, $y_3 \leqslant 7$, …, $y_9 \leqslant 19$. Iš gautųjų nelygybių išplaukia:

- $t = 20$, o taip gali būti, tik jei gretimų narių skirtumas sekoje x_1, x_2, …, x_9, t visada lygus 2;
- $y_9 = 19$, o taip gali būti, tik jei gretimų narių skirtumas sekoje 1, y_1, y_2, …, y_9 visada lygus 2.

Taigi raudonai nudažytos lygiai dvi dvidešimtkampio kraštinės – tos, kurios jungia viršūnes 1 ir 2 bei 20 ir 19.

26. Ⓓ 35

? Pastebėjus, kad $20 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, natūralu patikrinti galimybes $N = 45$, $N = 54$, $N = 522$. Atitinkamai skaičiaus $N + 1$ skaitmenų sandauga lygi

$$4 \cdot 6 = 24, \qquad 5 \cdot 5 = 25, \qquad 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30.$$

Taip atmetame atsakymus **E**, **C**, **B**. Kad atmestume dar vieną atsakymą, nepraleiskime galimybės, kai skaičius N turi skaitmenį 1. Pavyzdžiui, tinka $N = 451$. Tada skaičiaus $N + 1$ skaitmenų sandauga lygi $4 \cdot 5 \cdot 2 = 40$. Atmetame ir atsakymą **A**.

Renkamės atsakymą **D**.

?? Pastebėkime, kad skaičius 20 nesidalija iš 9, todėl skaičiaus N paskutinis skaitmuo negali būti lygus 9. Tai reiškia, kad skaičiai N ir $N + 1$ skiriasi tik paskutiniu skaitmeniu.

Atsakymas **D)** 35 turėtų atrodyti įtartinas. Skaičius 35 dalijasi iš 7. Jis galėtų būti skaičiaus $N+1$ skaitmenų sandauga, tik skaičiui $N+1$ turint skaitmenį 7. Jei šis skaitmuo būtų nepaskutinis, tai ir skaičius N turėtų skaitmenį 7. O jei skaičius $N + 1$ baigtųsi skaitmeniu 7, tai skaičius N turėtų skaitmenį 6. Tačiau skaičiaus N skaitmenų sandauga 20 nei iš 7, nei iš 6 nesidalija. Vadinasi, skaičiaus $N + 1$ skaitmenų sandauga negali būti lygi 35.

Renkamės atsakymą **D**.

! Pastebėkime, kad skaičius 20 nesidalija iš 9, todėl skaičiaus N paskutinis skaitmuo a negali būti lygus 9. Tai reiškia, kad skaičiai N ir $N + 1$ skiriasi tik paskutiniu skaitmeniu: skaičius N turi skaitmenį a, o skaičius $N + 1$ turi skaitmenį $a + 1$.

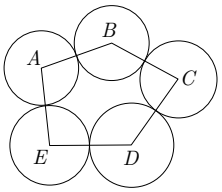
Skaičius a yra skaičiaus 20 vienženklis daliklis, taigi vienintelės galimos a reikšmės yra 1, 2, 4, 5. Prie skaičiaus N pridėjus 1, paskutinis skaitmuo atitinkamai tampa lygus 2, 3, 5, 6, o skaitmenų sandauga atitinkamai padidėja $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$ karto. Atitinkamai skaičiaus $N + 1$ skaitmenų sandauga gali būti lygi nebent šiems skaičiams:

$$20 \cdot \frac{2}{1} = 40, \qquad 20 \cdot \frac{3}{2} = 30, \qquad 20 \cdot \frac{5}{4} = 25, \qquad 20 \cdot \frac{6}{5} = 24.$$

Vadinasi, skaičiaus $N + 1$ skaitmenų sandauga negali būti lygi 35. Baigdami sprendimą pastebėkime, kad skaitmenų sandaugos reikšmės 40, 30, 25 ir 24 yra įmanomos (žr. **?** dalį).

27. (A) A

! Penkių apskritimų, kurių centrai yra A, B, C, D, E, spindulio ilgius atitinkamai pažymėkime a, b, c, d, e. Tada



$$a+b=AB=16, \qquad b+c=BC=14, \qquad c+d=CD=17,$$

$$d+e=DE=13, \qquad e+a=EA=14;$$

$$74=16+14+17+13+14=(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+e)+(e+a)=$$

$$=2a+2b+2c+2d+2e, \qquad a+b+c+d+e=37.$$

Dabar galime rasti visus spindulio ilgius:

$$a=37-(b+c)-(d+e)=37-14-13=10,$$

$$b=AB-a=6, \quad c=BC-b=8, \quad d=CD-c=9, \quad e=DE-d=4.$$

Didžiausias iš skaičių a, b, c, d, e yra apskritimo su centru A spindulio ilgis a.

!! Penkių apskritimų, kurių centrai yra A, B, C, D, E, spindulio ilgius atitinkamai pažymėkime a, b, c, d, e. Pažymėkime $S=a+b+c+d+e$. Reikia nustatyti didžiausiąjį iš skaičių a, b, c, d, e. Vietoj to galima mėginti nustatyti, kuris iš šių penkių skaičių mažiausias:

$$S-a=(b+c)+(d+e)=BC+DE, \qquad S-b=(c+d)+(e+a)=CD+EA,$$

$$S-c=(d+e)+(a+b)=DE+AB, \qquad S-d=(e+a)+(b+c)=EA+BC,$$

$$S-e=(a+b)+(c+d)=AB+CD.$$

Galima nustatyti visus šiuos penkis skaičius. Tačiau vien pažvelgus į duotus ilgius AB, BC, CD, DE, EA, iš karto galima pastebėti, kad reikia pasirinkti dviejų mažiausių iš jų sumą $BC+DE=S-a$. Atitinkamai didžiausias iš skaičių a, b, c, d, e yra apskritimo su centru A spindulio ilgis a.

28. (C) 7 kg

? Keturių sunkiausių svarmenų bendra masė $9+10+11+12=42$ (kg) yra tik 1 kg didesnė už svarmenų masę 41 kg vienoje iš dėžių. Tai pastebėjus natūralu spėti, kad toje dėžėje yra 12 kg, 11 kg, 10 kg ir $41-12-11-10=8$ (kg) svarmenys. Panašiai, imdami keturis sunkiausius iš likusių 8 svarmenų (9 kg, 7 kg, 6 kg, 5 kg), gausime 27 kg masę, o 26 kg gausime, vietoj 5 kg svarmens imdami $26-9-7-6=4$ (kg) svarmenį. Taip gauname tinkamą pavyzdį, kaip svarmenys gali būti sudėti dėžėse:

$$41=12+11+10+8, \qquad 26=9+7+6+4, \qquad 5+3+2+1(=11).$$

Vadinasi, 9 kg svarmuo gali būti vienoje dėžėje su 7 kg svarmeniu.

Renkamės atsakymą **C**.

! Keturių vienos dėžės svarmenų, kurių bendra masė yra 41 kg, mases kilogramais didėjimo tvarka pažymėkime x_1, x_2, x_3, x_4. Keturių vienos dėžės svarmenų, kurių bendra masė yra 26 kg, mases kilogramais didėjimo tvarka pažymėkime y_1, y_2, y_3, y_4.

Jei x_2, x_3, x_4 reikšmės nėra didžiausios galimos (10, 11, 12), tai $x_2 < 10$ ir

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 8 + 9 + 11 + 12 < 41.$$

Todėl $x_2 = 10$, $x_3 = 11$, $x_4 = 12$ ir $x_1 = 41 - x_2 - x_3 - x_4 = 8$.

Jei y_2, y_3, y_4 reikšmės nėra didžiausios (6, 7, 9) iš likusių galimų, tai $y_2 < 6$ ir

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leqslant 4 + 5 + 7 + 9 < 26.$$

Todėl $y_2 = 6$, $y_3 = 7$, $y_4 = 9$ ir $y_1 = 26 - y_2 - y_3 - y_4 = 4$.

Vadinasi, 9 kg svarmuo yra vienoje dėžėje su 7 kg svarmeniu, ir toje dėžėje nėra svarmenų, kurių masės yra 3, 5, 8 arba 10 kilogramų.

29. Ⓒ 7 kg

? Keturių sunkiausių svarmenų bendra masė $9 + 10 + 11 + 12 = 42$ (kg) yra tik 1 kg didesnė už svarmenų masę 41 kg vienoje iš dėžių. Tai pastebėjus natūralu spėti, kad toje dėžėje yra 12 kg, 11 kg, 10 kg ir $41 - 12 - 11 - 10 = 8$ (kg) svarmenys. Panašiai, imdami keturis sunkiausius iš likusių 8 svarmenų (9 kg, 7 kg, 6 kg, 5 kg), gausime 27 kg masę, o 26 kg gausime, vietoj 5 kg svarmens imdami $26 - 9 - 7 - 6 = 4$ (kg) svarmenį. Taip gauname tinkamą pavyzdį, kaip svarmenys gali būti sudėti dėžėse:

$$41 = 12 + 11 + 10 + 8, \qquad 26 = 9 + 7 + 6 + 4, \qquad 5 + 3 + 2 + 1 (= 11).$$

Vadinasi, 9 kg svarmuo gali būti vienoje dėžėje su 7 kg svarmeniu.

Renkamės atsakymą **C**.

! Keturių vienos dėžės svarmenų, kurių bendra masė yra 41 kg, mases kilogramais didėjimo tvarka pažymėkime x_1, x_2, x_3, x_4. Keturių vienos dėžės svarmenų, kurių bendra masė yra 26 kg, mases kilogramais didėjimo tvarka pažymėkime y_1, y_2, y_3, y_4.

Jei x_2, x_3, x_4 reikšmės nėra didžiausios galimos (10, 11, 12), tai $x_2 < 10$ ir

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 8 + 9 + 11 + 12 < 41.$$

Todėl $x_2 = 10$, $x_3 = 11$, $x_4 = 12$ ir $x_1 = 41 - x_2 - x_3 - x_4 = 8$.

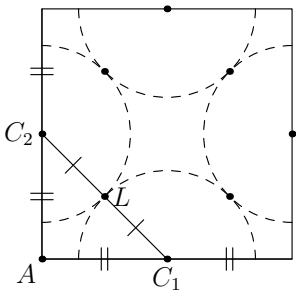
Jei y_2, y_3, y_4 reikšmės nėra didžiausios (6, 7, 9) iš likusių galimų, tai $y_2 < 6$ ir

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leqslant 4 + 5 + 7 + 9 < 26.$$

Todėl $y_2 = 6$, $y_3 = 7$, $y_4 = 9$ ir $y_1 = 26 - y_2 - y_3 - y_4 = 4$.

Vadinasi, 9 kg svarmuo yra vienoje dėžėje su 7 kg svarmeniu, ir toje dėžėje nėra svarmenų, kurių masės yra 3, 5, 8 arba 10 kilogramų.

30. (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$



! Ertmės gylis lygus išpjauto pusrutulio spindulio ilgiui, tad jį ir turime nustatyti.

Teisingas toks bendras pastebėjimas: jei du rutuliai su centrais C_1 ir C_2, esantys vienas kito išorėje, liečiasi taške L, tai taškas L yra atkarpoje C_1C_2, o atkarpos C_1L ir C_2L yra tų rutulių spinduliai. Pritaikykime šį pastebėjimą mūsų situacijai. Pasirinkime bet kurias dvi kubo sienas, turinčias bendrą briauną. Tos briaunos vidurio tašką pažymėkime A, sienų (ir atitinkamų dviejų pusrutulių) centrus pažymėkime C_1 ir C_2, o atitinkamų pusrutulių lietimosi tašką pažymėkime L. Per taškus A, C_1, C_2 eina plokštuma α, lygiagreti su dviem priešingomis kubo sienomis (ir dalijanti kubą į dvi lygias dalis). Taškas L ne tik yra atkarpoje C_1C_2, bet ir dalija ją pusiau, nes pusrutulių spindulio ilgiai lygūs. Plokštumos α sankirta su kubu yra $2\,\text{dm}\times 2\,\text{dm}$ kvadratas. Taškas A yra šio kvadrato viršūnė, o C_1 ir C_2 yra jo gretimų kraštinių vidurio taškai (žr. pav.).

Taigi $AC_1 = AC_2 = 1\,\text{dm}$ ir

$$C_1C_2 = \sqrt{AC_1^2 + AC_2^2} = \sqrt{2}\,\text{dm},$$

o ieškomas ertmės gylis lygus $C_1L = C_2L = C_1C_2 : 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{dm}$.

Ekspertas

Nr.	Atsakymas
1	C
2	E
3	B
4	C
5	A
6	D
7	D
8	C
9	E
10	A
11	C
12	D
13	B
14	B
15	A
16	D
17	D
18	B
19	B
20	A
21	C
22	B
23	E
24	C
25	B
26	D
27	A
28	C
29	C
30	A