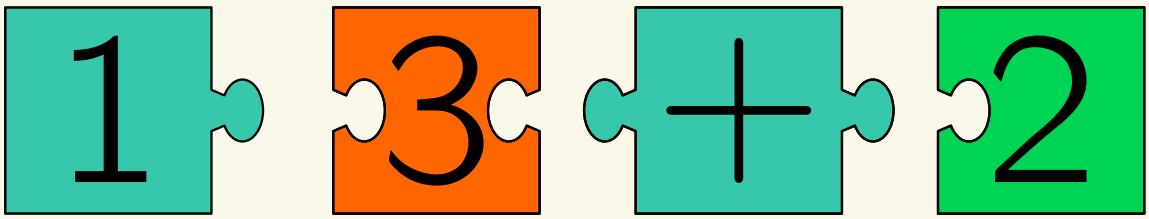
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA Mažylis

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI



2021

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2021. Mažylis

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Juozas Juvencijus Mačys

Maketavo
Ugnė Gudžinskaitė

© Juozas Juvencijus Mačys, 2021
© *Kengūros* konkurso organizavimo komitetas, 2021

Turinys

Pratarmė **3**

Sąlygos **5**

Užduočių sprendimai **11**

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 17000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2021 metais. Nors, žinoma, šiais metais viskas dėl tos nelemtos pandemijos atrodė, pakrypo ir klostėsi visiškai kitaip negu iki šiol. Pasitvirtino visiems teoriškai gerai girdėta išmintis, kad karantininis gyvenimas yra pilnas staigmenų ir netikėtumų: konkursas iš trečiojo kovo ketvirtadienio nusikėlė į vėlesnę datą ir vyko nuotoliniu būdu.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo

ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2021 metų kovo 18 dieną keliavo ir gausiai sprendė 3–4 klasių (*Mažylio* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

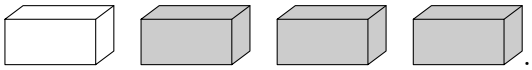
Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

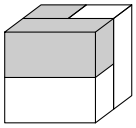
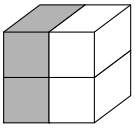
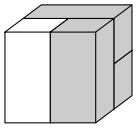
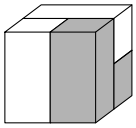
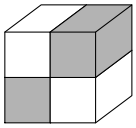
Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

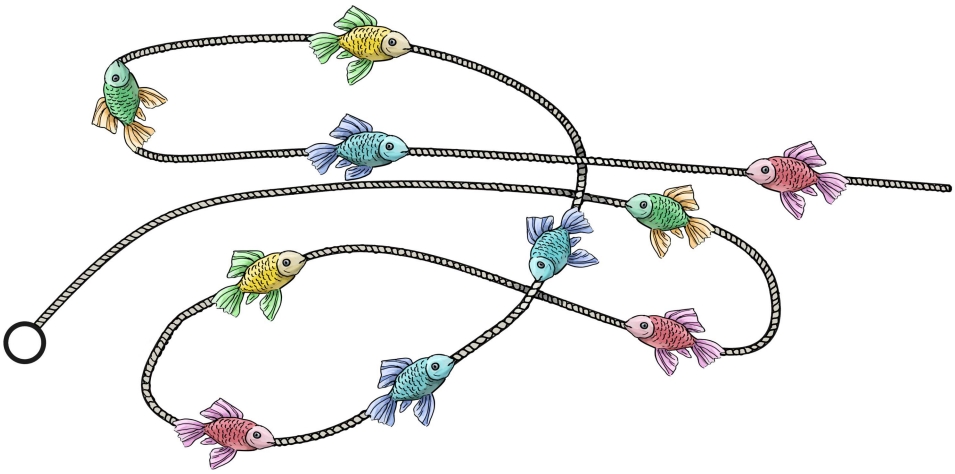
2021 m. *Mažylio* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Matas turi 4 trinkeles:  . Kurį kubą jis gali sudėti?

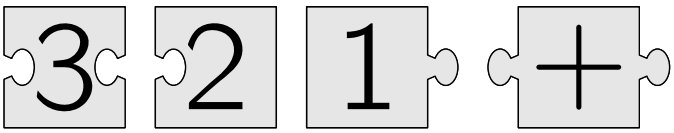
A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

2. Kelių žuvyčių galva bus nukreipta į žiedą, kai virvelę ištiesinsime?



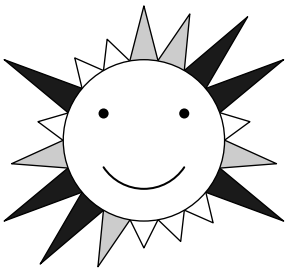
A) 3 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

3. Kai teisingai sujungsi keturias dėlionės detales, susidarys stačiakampis, kuriame parašyta sudėtis. Koks bus sudėties rezultatas?



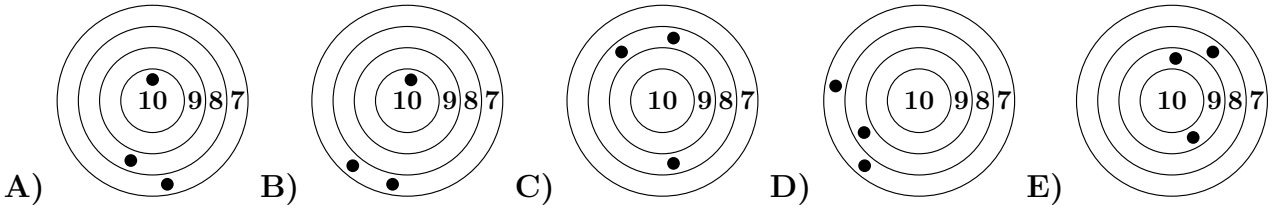
A) 6 **B)** 15 **C)** 18 **D)** 24 **E)** 33

4. Adelė nupiešė saulę. Kuris paveikslėlis **nėra** jos piešinio dalis?



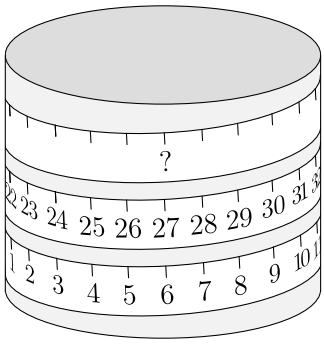
A) **B)** **C)** **D)** **E)**

5. Kiekvienas iš penkių berniukų šovė į savo taikinį tris kartus. Daugiausiai taškų surinko Rytis. Kuris taikinys Ryčio?



6. Ritinys apvyniotas matavimo juosta. Koks skaičius turėtų būti klaustuko vietoje?

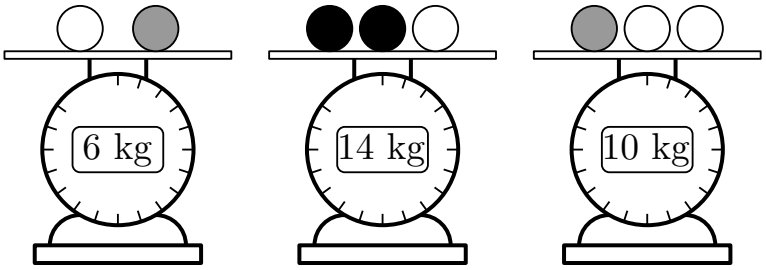
A) 33 **B)** 42 **C)** 48 **D)** 53 **E)** 69



7. Močiutė pasivaikščiojimo metu rado 20 grybų. Tai buvo kazlėkai ir ūmėdės, ir ūmėdžių buvo šešiomis daugiau nei kazlėkų. Kiek ūmėdžių rado močiutė?

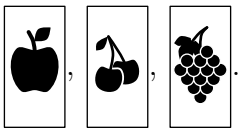
A) 9 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 15

8. Ant svarstyklių padėti trijų spalvų rutuliai. Tos pačios spalvos rutuliai sveria vienodai. Kiek sveria vienas juodas rutulys?

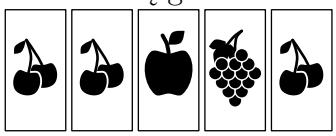


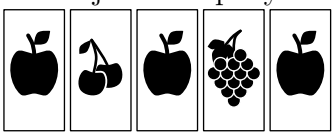
A) 3 kg **B)** 4 kg **C)** 5 kg **D)** 6 kg **E)** 7 kg

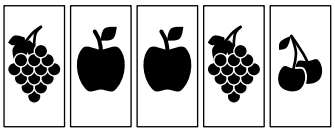
Klausimai po 4 taškus

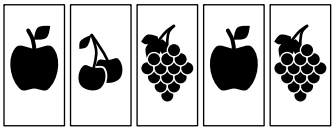
9. Kiekvienas iš žemiau pavaizduotų penketukų sudarytas iš trijų rūšių kortų:  .

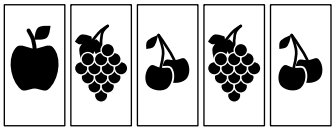
Emilija nori kiekviename penketuke taip sukeisti dvi kortas vietomis, kad visos tos pačios rūšies kortos būtų greta. Kuriame penketuke jai tai nepavyks?

A) 

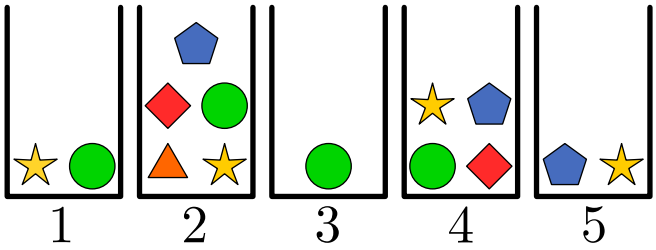
B) 

C) 

D) 

E) 

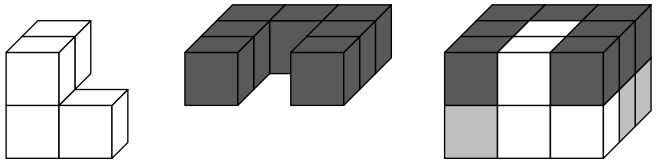
10. Jorė nori iš penkių dėžučių pasiimti penkias skirtingas figūrėles. Ji gali imti tik po vieną figūrėlę iš kiekvienos dėžutės. Kokią figūrėlę ji turi paimti iš 4-tos dėžutės?



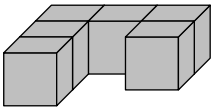
A) **B)** **C)** **D)** **E)**

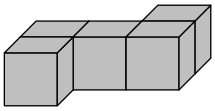
11. Lukas atskirai suklijavo baltus kubelius (1 pav.), atskirai – juodus kubelius (2 pav.) ir atskirai – pilkus kubelius. Iš tų trijų dalių jis sustatė stačiakampį statinį, susidedantį iš 18 kubelių (3 pav.).

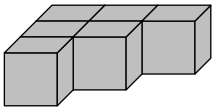
Kuriame iš paveikslėlių pavaizduota Luko statinio pilkoji dalis?

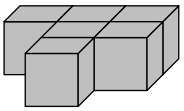


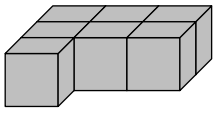
1 pav. 2 pav. 3 pav.

A) 

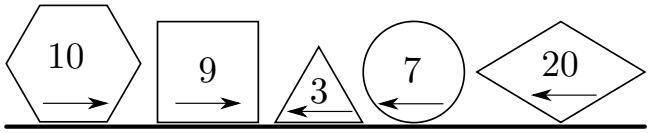
B) 

C) 

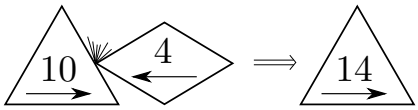
D) 

E) 

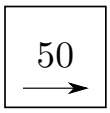
12. Sykį 5 figūros su pažymėtais jose skaičiais išsiruošė į mūšį. Jos visos judėjo ta pačia linija, tik kiekviena figūra judėjo kryptimi, nurodyta rodykle.



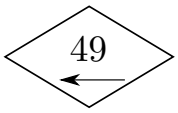
Kai dvi figūros, judančios priešingomis kryptimis, susiduria, tai figūra su didesniu skaičiumi praryja figūrą su mažesniu skaičiumi. Nugalėjusi figūra nekeičia savo formos ir judėjimo krypties, o jos skaičius padidėja nugalėtosios figūros skaičiumi, kaip kad pavaizduota šiame pavyzdyje:



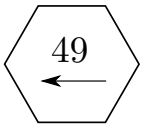
Koks bus galutinis tų penkių figūrų susirėmimo rezultatas?

A) 

B)

C) 

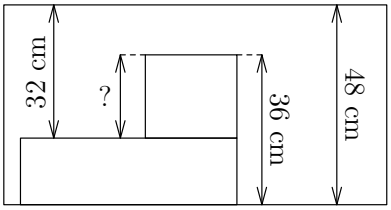
D)

E) 

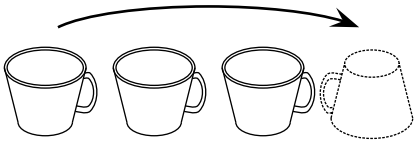
13. Pradedant darbo dieną, ledainės kasoje buvo kažkiek pinigų. Pardavus 6 ledų porcijas, kasoje buvo 70 eurų. Kai buvo parduota iš viso 16 porcijų, kasoje jau buvo 120 eurų. Kiek eurų buvo kasoje pradedant darbą?
A) 20 **B)** 30 **C)** 40 **D)** 50 **E)** 60

14. Koala skabė lapus nuo trijų šakų. Kiekviena šaka turėjo 20 lapų. Iš pradžių koala suėdė kažkiek lapų nuo pirmos šakos. Tada ji suėdė tiek lapų nuo antros šakos, kiek jų buvo likę ant pirmos šakos. Pagaliau ji suėdė 2 lapus nuo trečios šakos. Kiek lapų liko ant visų trijų šakų?
A) 20 **B)** 22 **C)** 28 **D)** 32 **E)** 38

15. Paveikslėlyje pavaizduoti stačiakampiai ir nurodyti kai kurie jų matmenys. Kas turėtų būti parašyta vietoje klaustuko?
A) 12 cm **B)** 14 cm **C)** 16 cm **D)** 20 cm **E)** 22 cm



16. Dominykas žaidžia ant virtuvės stalo su trimis puodeliais. Kiekvienu ėjimu jis ima kairįjį puodelį, apverčia jį ir perkėlęs per kitus du deda ant stalo. Paveikslėlyje pavaizduotas pirmas ėjimas. Kaip atrodys puodeliai po 10 ėjimų?



A)
B)
C)
D)
E)

Klausimai po 5 taškus

17. Luknė turi penkis lipdukus: .

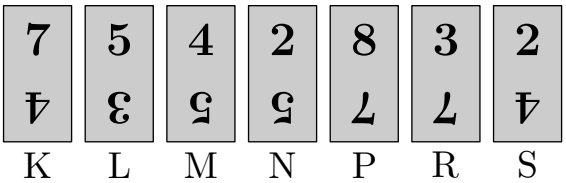
Ji suklijavo lipdukus po vieną į penkis langelius

1	2	3	4	5

taip, kad nėra 5-ame langelyje, yra 1-ame langelyje, o yra greta ir greta . Į kurį langelį Luknė įklijavo lipduką ?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

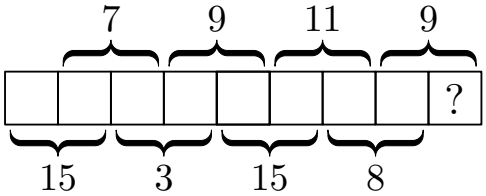
18. Septynios kortelės surikiuotos kaip pavaizduota.



Kiekvienoje kortelėje įrašyti du skaičiai, vienas – viršuje, kitas apverstas – apačioje. Amelija nori pertvarkyti korteles taip, kad viršutinės eilutės skaičių suma būtų lygi apatinės eilutės skaičių sumai. Tai galima padaryti pasukus vieną kortelę viršumi į apačią. Kurią kortelę turi pasukti Amelija?

A) K **B)** M **C)** N **D)** R **E)** S

19. Skaičiai nuo 1 iki 9 slepiasi pavaizduotuose langeliuose. Paveikslėlyje nurodytos visos dviejų gretimų skaičių sumos. Koks skaičius slepiasi paskutiniame langelyje?



A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

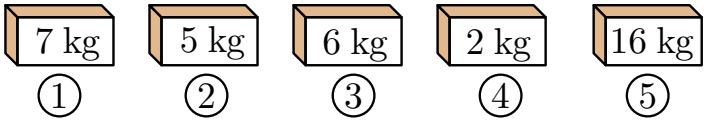
20. Nojus metė strėlytes į penkis balionus, vertus 3, 9, 13, 14 ir 18 taškų, ir surinko 30 taškų. Į kurį balioną Nojus pataikė garantuotai?

A) 3 **B)** 9 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 18

21. Dėžėje yra mažiau nei 50 sausainių. Juos galima padalyti po lygiai 2, 3 arba 4 vaikams. Juos būtų galima padalyti po lygiai 7 vaikams, jeigu sausainių būtų šešiais daugiau. Kiek sausainių yra dėžėje?

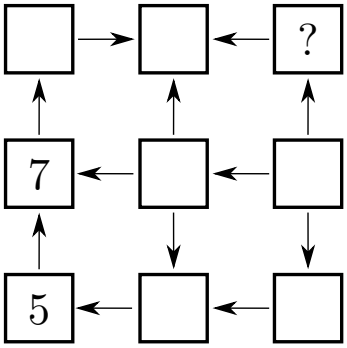
A) 12 **B)** 24 **C)** 30 **D)** 36 **E)** 48

22. Į kiekvieną iš penkių dėžių sudėti arba tik obuoliai, arba tik bananai.

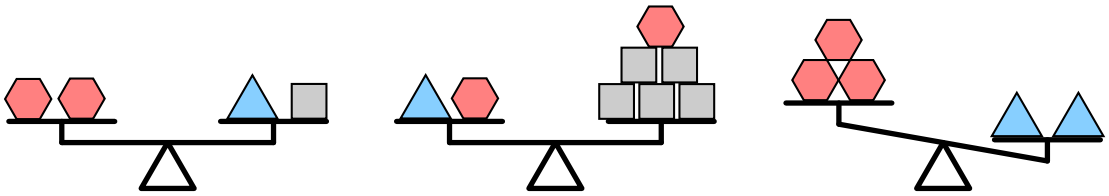


Visi bananai sveria tris kartus daugiau nei visi obuoliai. Į kurias dėžes sudėti obuoliai?
A) 1 ir 2 **B)** 2 ir 3 **C)** 2 ir 4 **D)** 3 ir 4 **E)** 1 ir 4

23. Į kvadratą reikia įrašyti visus skaičius nuo 1 iki 9 taip, kad kiekviena rodyklė eitų nuo mažesnio skaičiaus link didesnio. Viltė jau įrašė 5 ir 7. Kokį skaičių ji turi parašyti vietoje klaustuko?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

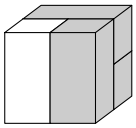


24. Kajus į trejų svarstyklių lėkštes sudėjo šešiakampius, kvadratus ir trikampius.



Ką jam reikia įdėti į trečiųjų svarstyklių kairiąją lėkštę, kad svarstyklės būtų pusiausviros?
A) **B)** **C)** **D)** **E)**

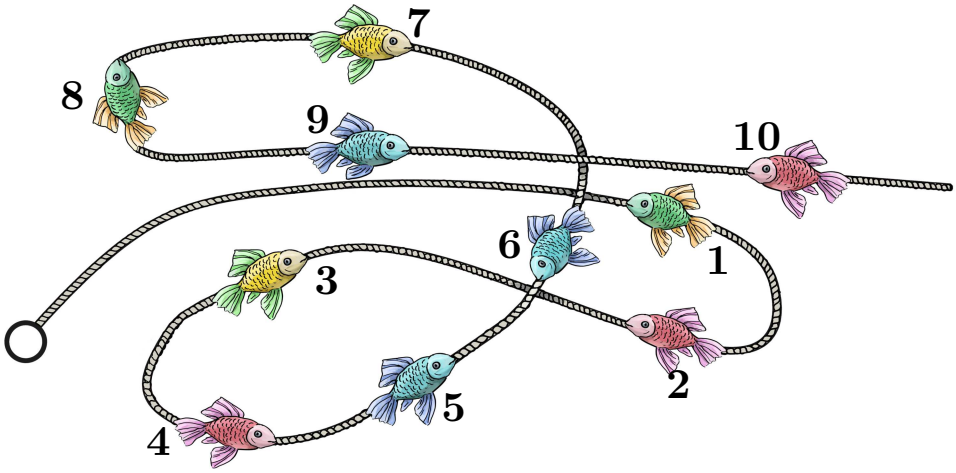
Mažylio užduočių sprendimai

1. (C) 

! Kube **A** matome 2 baltas ir 2 juodas trinkeles, kube **B** – taip pat, kube **C** – 1 baltą ir 3 juodas, kube **D** ir kube **E** – 2 baltas ir 2 juodas trinkeles. Vadinasi, sudėti kubų **A**, **B**, **D** ir **E** Matas tikrai negali – jis neturi dviejų baltų trinkelių, o štai sudėti kubą **C** – paprasta.

2. (C) 6

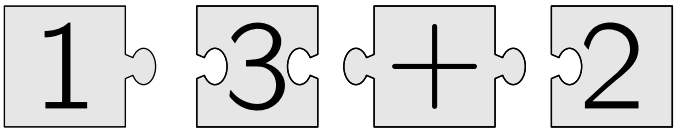
! Judėkime virvele nuo žiedo link žuvyčių. Pirmos sutiktos žuvytės iš pradžių prieiname galvą, paskui – uodegą. Priėjus antrą žuvytę, tvarka atvirkščia – pirma uodega, paskui – galva.



Taigi ištiesinus virvelę pirmos žuvytės galva bus nukreipta į žiedą, antros – ne. Panašiai trečios žuvytės galva bus nukreipta į žiedą, ketvirtos ir penktos – ne, šeštos, septintos ir aštuntos – į žiedą, devintos – ne, dešimtos – į žiedą. Taigi į žiedą bus nukreiptos 6 žuvyčių galvos

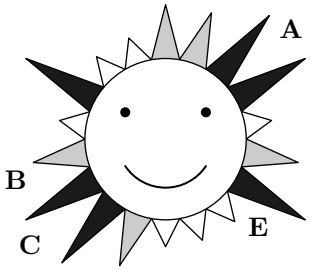
3. (B) 15

! Pirmoji eilutės detalė bus 1, nes prie jos iš kairės nebus prijungiama jokia detalė. Panašiai paskutinė bus detalė 2, – prie jos nieko negalima prijungti iš dešinės. Prie detalės 1 prijungti iš dešinės galima tik detalę 3 – ši turi išpjovą kairėje (o detalė + jos kairėje neturi). Taigi detalės bus išdėstytos tokia tvarka:



Matome, kad + sujungs detales 3 ir 2. Susidarė sudėtis, kurios rezultatas $13 + 2 = 15$.

4. (D)



! Peržiūrėkime visus atsakymus. Atsakyme **A** turime greta du aukštus juodus trikampius, o prieš juos (einant pagal laikrodžio rodyklę) – pilką trikampį, po jų – baltą trikampį. Saulėje yra tik dvi vietos su juodais trikampiais, ir iš karto aptinkame tinkamą dalį (saulės paveikslėlyje ji pažymėta **A**).

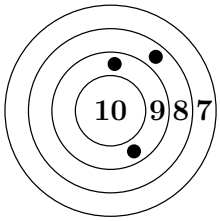
Atsakyme **B** po tamsaus trikampio eina pilkas. Tokia vieta saulėje vienintelė. Po pilko trikampio čia eina baltas ir juodas, kaip ir turi būti.

Atsakyme **C** prieš gretimus juodus eina pilkas ir baltas trikampiai. Lengvai randame tokią dalį.

Atsakyme **D** du balti trikampiai yra tarp dviejų juodų. Saulėje du balti trikampiai greta yra tik vienoje vietoje (kitoje – jų trys), bet po jų eina pilkas. Taigi dalies **D** saulės piešinyje neradome.

Atsakyme **E** prieš pat du baltus trikampius eina juodas, tada pilkas. Viršutiniai du balti saulėje netinka (prieš juos eina juodas ir baltas). Apačioje yra trys gretimi balti, bet prieš juos eina juodas ir pilkas. Taigi imdami du baltus (pirmą ir antrą pagal laikrodžio rodyklę) ir prieš juos juodą ir pilką randame dalį **E**.

Vadinasi, tik paveikslėlis **D** nėra saulės dalis.



5. (E)

? Taikinyje **A** išmušta 10, 8 ir 7 taškai – iš viso $10 + 8 + 7 = 25$ taškai. Taikinyje **B** išmušta $10 + 7 + 7 = 24$ taškai. Taikinyje **C** išmušta $8 + 8 + 8 = 24$ taškai. Taikinyje **D** išmušta $8 + 7 + 7 = 22$ taškai. Taikinyje **E** išmušta $9 + 9 + 8 = 26$ taškai. Vadinasi, daugiausia taškų išmušta taikinyje **E**, taigi Ryčio taikinys **E**.

6. (C) 48

! Ties klaustuku antroje matavimo juostos vijoje stovi skaičius 27, o pirmoje – skaičius 6. Taigi galima laikyti, kad vienos vijos ilgis yra $27 - 6 = 21$. Vadinasi, klaustuko vietoje turi stovėti skaičius, 21 didesnis už 27, t. y. $27 + 21 = 48$.

7. (D) 13

? Nesunku patikrinti atsakymus. Jei ūmėdžių būtų 9, tai kazlėkų būtų $9-6 = 3$, iš viso $3+9 = 12$ grybų, bet jų turi būti 20.

Jei ūmėdžių būtų 10, tai kazlėkų būtų 4, grybų būtų 14, – netinka.

Jei ūmėdžių būtų 12, tai kazlėkų 6, grybų 18.

Jei ūmėdžių būtų 13, tai kazlėkų būtų 7, iš viso grybų $13 + 7 = 20$, – tiek, kiek ir turi būti.

Taigi jau galima rinktis atsakymą **D**. Bet pravartu pasitikrinti, kad ir atsakymas **E** netinka. Jei ūmėdžių būtų 15, kazlėkų 9, tai grybų būtų 24.

?? Įdomiau spręsti uždavinį nežiūrint į atsakymus, ir tik išsprendus pasidžiaugti, kad toks atsakymas yra tarp nurodytųjų. Spręsti galima įvairiai – lengva netgi atspėti du skaičius, kurių suma 20, ir vienas didesnis už kitą 6 vienetais. Tai 13 ir 7.

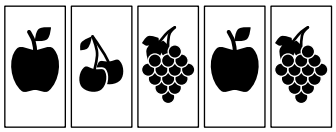
! Iš močiutės krepšelio išimkime 6 ūmėdes. Tada krepšelyje liks vienodai kazlėkų ir ūmėdžių. Kadangi dabar krepšelyje $20-6=14$ grybų, tai tiek kazlėkų, tiek ūmėdžių jame po $14:2=7$. Vadinasi, iš viso yra $7+6=13$ ūmėdžių.

!! Ūmėdžių skaičių pažymėkime U. Tada kazlėkų yra $U-6$, o iš viso grybų $U+U-6$. Bet $U+U-6=20$, todėl $U+U=26$, ir aišku, kad $U=13$. Žinoma, tai nežinomojo įvedimo metodas.

8. (C) 5 kg

! Kadangi ant trečiųjų svarstyklių 1 pilkas ir 1 baltas rutuliai kartu sveria 6 kg (tai rodo pirmosios svarstyklės), tai likusiam baltajam rutuliui lieka $10-6=4$ kg. Tada antrosios svarstyklės rodo, kad 2 juodieji rutuliai sveria $14-4=10$ kg, o vienas juodas rutulys sveria $10:2=5$ kg.

!! Gražus toks būdas. Visi rutuliai (4 balti, 2 juodi, 2 pilki) sveria $6+14+10=30$ kg. Vadinasi, 2 balti, 1 juodas ir 1 pilkas rutulys kartu sveria $30:2=15$ kg. Bet 2 balti ir 1 pilkas sveria 10 kg, todėl juodasis rutulys sveria $15-10=5$ kg.

9. (D) 

? Penketuke **A** iš karto matome, kad penktą kortą su vyšnia reikia atkelti į trečią vietą, t. y. sukeisti su trečios vietos obuoliu. Dabar vienos rūšies yra tik vyšnios, ir visos jos greta.

Penketuke **B** reikia rūpintis tik obuoliais. Juos suglaudinti galima net dviem būdais: arba penktą kortą sukeisti su antra, arba pirmą kortą sukeisti su ketvirta.

Penketuke **C** mums rūpi vynuogės. Čia kad ir kaip jas glaudinsi, viskas išeina gerai. Jeigu pirmą kortą sukeisime su trečia, obuoliai bus pirmoje ir antroje vietoje. Jeigu pirmą kortą sukeisime su penkta, obuoliai liks kur buvę. O jeigu ketvirtą kortą kelsime į antrą vietą, tai ir obuoliai nenukentės – bus trečioje ir ketvirtoje vietoje.

Ne taip viskas aišku su penketukais **D** ir **E**. Vis dėlto greitai pamatome, kad penketuke **E** nesunku suglaudinti vyšnias taip, kad ir vynuogės būtų greta: arba penktą kortą sukeisti su antra, arba trečią kortą sukeisti su ketvirta.

Taigi galime rinktis atsakymą **D**.

! Įsitikinkime, kad penketuke **D** suglaudinti vienodų kortų neįmanoma. Bandykime suglaudinti obuolius. Jei pirmą kortą su obuoliu kelsime į trečią ar penktą vietą, tai vynuogės bus ne greta. Jei ketvirtą kortą su obuoliu perkelsime į antrą vietą, tai vyšnia atsidurs ketvirtoje vietoje, o vynuogės taip ir liks ne greta.

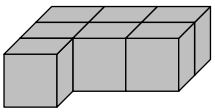
Taigi atsakymas **D** – vienintelis teisingas.

10. (E)

? Žinoma, pradėti paprasčiausia nuo trečios dėžutės – iš jos nieko kito be skritulio nepaimsi. Bet tada iš pirmos dėžutės teks imti žvaigždę. Dabar iš penktos nori nenori tenka imti penkiakampį, Jau paimti skritulys, žvaigždė ir penkiakampis, todėl iš ketvirtos dėžutės teks imti kvadratą.

Renkamės atsakymą **E**.

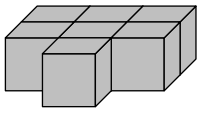
! O kaip bus su penktąja dėžute – ar neturėsime problemų? Na, žinoma, ne – joje yra visos penkios figūrėlės, ir kurios figūrėlės dar neturime, imame iš jos.

11. (E) 

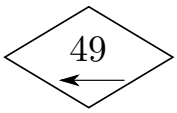
? Teisingą atsakymą iš karto gauname suskaičiavę kubelius. Baltų kubelių yra 4, juodų – 7, todėl pilkųjų kubelių turi būti $18 - 4 - 7 = 7$. Tiek jų yra tik bloke **E**.

! Nesunku įsitikinti, kad sustatyti reikiamą stačiakampį gretasienį (toks gauto statinio geometrinis pavadinimas) imant pilką bloką **E** įmanoma: paklojus **E** kaip apatinį kubelių sluoksnį, kaip tik lieka 2 vietos baltiems kubeliams. Viršutiniame sluoksnyje balti kubeliai užima dar 2 vietas, ir jie nekliudo uždėti kaip viršutinį sluoksnį juodąjį bloką.

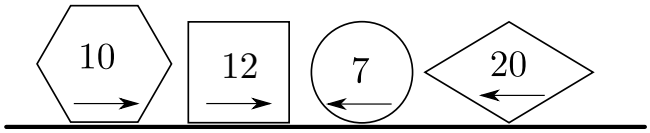
!! Patikrinti, ar viskas išeina gerai, tikrai būtina. Pavyzdžiui, jei atsakyme **D** būtų 7 kubelių blokas, pavaizduotas dešinėje, tai su juo sudėti gretasienį neišeitų (kliudytų priekinis bloko **D** kubelis).



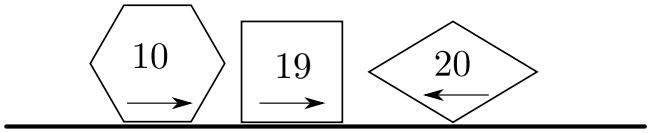
Beje, jei sąlygoje nebūtų nurodyta, kad kubelių iš viso yra 18, tai sustatyti pavaizduotą statinį pavyktų ir su bloku **A**, ir su bloku **B** (trūkstamų apatinio sluoksnio kubelių nesimatytų, tuščias vietas dengia viršutinis sluoksnis. O štai blokas **C** netiktų – dešinėje trūktų pilko kubelio.

12. (C) 

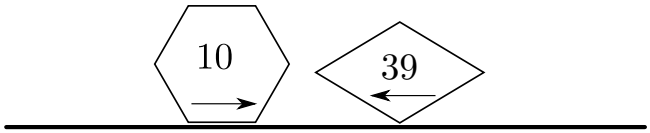
! Pirmosios susidurs kvadratas 9 ir trikampis 3. Kvadratas, turėdamas didesnį skaičių, praris trikampį ir taps kvadratu 12:



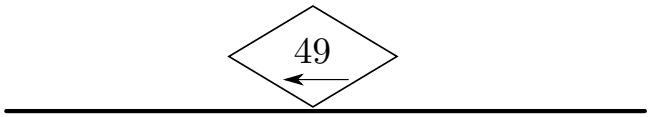
Tada susitiks kvadratas 12 ir skritulys 7. Kvadratas praris skritulį, ir taps kvadratu 19:



Susidūrus kvadratui 19 ir rombui 20, rombas praris kvadratą ir taps rombu 39:



Pagaliau, susidūrus šešiakampiui 10 ir rombui 39, rombas praris šešiakampį ir taps rombu 49:



13. (C) 40

! Nuo momento, kai kasoje buvo 70 eurų, iki momento, kai kasoje susidarė 120 eurų, buvo parduota $16 - 6 = 10$ porcijų ledų ir gauta $120 - 70 = 50$ eurų. Vadinasi, 10 porcijų kainavo 50 eurų, o viena porcija $50 : 10 = 5$ eurus.

Iš pradžių parduotos 6 porcijos kainavo $6 \cdot 5 = 30$ eurų. Vadinasi, pradedant darbą kasoje buvo $70 - 30 = 40$ eurų.

!! Žinoma, galima įsivesti ir nežinomuosius. Pradinį pinigų kiekį pažymėkime P, porcijos kainą K. Kadangi pardavus 6 porcijas kasoje buvo 70 eurų, tai

$$P + 6K = 70.$$

Kadangi pardavus 16 porcijų kasoje buvo 120 eurų, tai

$$P + 16K = 120.$$

Spręsti gautąją dviejų lygčių sistemą galima įvairiai. Atimame lygybes vieną iš kitos. Tada $10K = 50$, iš čia $K = 5$.

Vadinasi, $P = 70 - 6K = 70 - 6 \cdot 5 = 40$.

Matome, kad tai tas pats būdas **!**, tik užrašytas kiek kitaip.

!!! Palyginkime, kaip atrodys sprendimas įsivedus tik nežinomąjį K – porcijos kainą. Tada kasoje iš pradžių buvo $70 - 6K$. Pardavus 16 porcijų, pinigų kasoje padaugėjo $16K$ eurų ir pasidarė 120 eurų:

$$70 - 6K + 16K = 120.$$

Todėl $10K = 50$, $K = 5$, t. y. ledų porcija kainuoja 5 eurus. Vadinasi, iš pradžių kasoje buvo $70 - 6K = 70 - 6 \cdot 5 = 40$ eurų.

14. (E) 38

! Skaičiuojant suėstus lapus, visai vistiek, ar koala suėda kažkiek lapų nuo antros šakos, ar tiek pat lapų nuo pirmos šakos. Taigi iš pradžių ji suėda kažkiek lapų nuo pirmos šakos, o paskui – nuo antros šakos tiek, kiek jų liko ant pirmos šakos. Taigi galima skaičiuoti taip: iš pradžių ji suėdė kažkiek lapų nuo pirmos šakos, o tada – kiek liko ant pirmos šakos, t. y. sugraužia visus pirmos šakos lapus. Tai kartu yra 20 lapų. Dar 2 lapus ji sugraužia nuo trečios šakos, – iš viso 22 lapai.

Kadangi ant trijų šakų buvo $3 \cdot 20 = 60$ lapų, tai ant šakų liko $60 - 22 = 38$ lapai.

!! Žodinius samprotavimus galima pakeisti veiksmais su nežinomaisiais.

Pažymėkime nuo pirmos šakos suėstų lapų skaičių x. Tada ant pirmos šakos liko $20 - x$ lapų. Nuo antros šakos koala suėdė tiek, kiek liko ant pirmos šakos, t.y. $20 - x$ lapų. Nuo visų trijų šakų ji suėdė

$$x + 20 - x + 2 = 22 \text{ lapus.}$$

Vadinasi, ant šakų liko $60 - 22 = 38$ lapai.

15. (D) 20 cm

! Matome tris stačiakampius – didįjį, o jo viduje apatinį ir virš jo viršutinį. Kadangi didžiojo stačiakampio plotis 48 cm, o apatinio plotis mažesnis 32 cm, tai jo plotis $48 - 32 = 16$ cm. Bet apatinio ir viršutinio stačiakampių pločių suma lygi 36 cm, todėl viršutinio stačiakampio plotis $? = 36 - 16 = 20\,(\text{cm})$.

16. (**B**)

! Po pirmo ėjimo puodeliai atrodo taip, kaip paveikslėlyje **C**:

Po antro ėjimo jie atrodys taip:

Po trečio ėjimo jie atrodys taip, kaip paveikslėlyje **E**:

Po ketvirto ėjimo jie atrodys taip, kaip paveikslėlyjė **B**:

Po penko – taip, kaip paveikslėlyje **A**:

Po šešto – kaip paveikslėlyje **D** (tai – ir pradinė jų padėtis).

Dabar padėtys pradeda kartotis: po septinto ėjimo padėtis bus kaip po pirmo, taigi po dešimto ėjimo – bus kaip po ketvirto, t. y. kaip paveikslėlyje **B**.

17. (**D**) 4

! Užtenka įdėmiai skaityti sąlygą. Obuolys yra pirmame langelyje. Kadangi gėlytė yra greta skritulio ir trikampio , tai ji yra tarp jų, ir tas trejetas neišskiriamas (tiesa, nežinome, jų tvarkos: ar skritulys, gėlytė ir trikampis, ar atvirkščiai – trikampis, gėlytė ir skritulys). Vadinasi, tas trejetas užima arba 2, 3 ir 4 langelius, arba 3, 4 ir 5 langelius. Bet žvaigždė nėra penktame langelyje, todėl trejetas, be kitų langelių, užima penktą, taigi jis užima 3, 4 ir 5 langelius. Kadangi gėlytė turi būti trejeto viduryje, tai ji užima ketvirtą langelį.

!! Aišku, kad žvaigždė užima likusį 2 langelį. O štai skritulys ir trikampis užima 3 ir 5 langelius, bet gali juos užimti ir viena tvarka, ir kita.

18. (E) S

! Viršutinių skaičių suma yra

$$7+5+4+2+8+3+2=31,$$

apatinių

$$4+3+5+5+7+7+4=35.$$

Kad sumos išsilygintų, reikia, kad viršutinė suma padidėtų 2 vienetais, o apatinė sumažėtų 2 vienetais. Vadinasi, apsukti reikia kortelę, kurios apatinis skaičius 2 vienetais didesnis už viršutinį. Tokia yra tik kortelė S, joje $4-2=2$.

Pasukti reikia kortelę S.

19. (D) 4

! Visų skaičių nuo 1 iki 9 suma $1+2+3+4+5+6+7+8+9$ yra 45. Pirmųjų aštuonių skaičių suma lygi $15+3+15+8=41$. Taigi $?=45-41=4$.

!! Matome, kad viršutiniai skaičiai visai nereikalingi. Žinoma, jie padeda spręsti kitais būdais.

Kadangi antro ir trečio skaičių suma 7, tai antras skaičius 6 arba mažesnis. Bet pirmo ir antro skaičių suma 15, todėl pirmas skaičius 9. Vadinasi, antras skaičius $15-9=6$, trečias $7-6=1$, ketvirtas $3-1=2$, penktas $9-2=7$, šeštas $15-7=8$, septintas $11-8=3$, aštuntas $8-3=5$, devintas $?=9-5=4$.

!!! Kadangi trečio ir ketvirto skaičių suma 3, tai trečias skaičius 1 arba 2. Bet jei trečias skaičius būtų lygus 2, tai antras būtų $7-2=5$, pirmas $15-5=10$, o taip būti negali. Vadinasi, trečias skaičius lygus 1, o toliau – kaip anksčiau.

Pastaba. Minėjome, kad uždavinio sąlyga perteklinė. „Pataisytas“ uždavinio pirmas sakinys galėtų būti toks:

„Į kiekvieną langelį įrašytas sveikasis skaičius, mažesnis už 10 (jie nebūtinai skirtingi).“

Naujajam uždaviniui visiškai tinka sprendimas **!!!**.

20. (A) 3

! Pažiūrėkime, kaip galima sudaryti sumą 30. Jeigu į sumą imame 18, tai joje nebus nei 13, nei 14 (būtų jau per daug), o paėmus likusius 3 ir 9 bus kaip tik: $18+3+9=30$. Jei sumoje didžiausias 14, tai būtina imti 13 (kitaip neužteks), o tada $14+13=27$, taigi reikės dar paimti 3. Jei sumoje didžiausias dėmuo 13, tai suma ne didesnė kaip $13+9+3=25$, per maža. Taigi sumą 30 galima sudaryti tik dviem būdais: $3+9+18$ ir $3+13+14$. Abiem atvejais sumoje yra dėmuo 3. Taigi Nojus garantuotai pataikė į balioną 3.

!! Galima spręsti ir atvirkščiai – ne ką į sumą paimti, o ką išmesti. Kadangi visų dėmenų suma $3+9+13+14+18=57$, tai reikia išmesti dėmenis, kurių suma 27. Kitaip sakant, reikia iš kelių dėmenų sudaryti sumą 27. Jeigu į sumą imame 18, tai teks dar imti 9. Jeigu į sumą didžiausią dėmenį imame 14, tai teks dar paimti 13. O jeigu nei 18, nei 14 neimtume, tai suma būtų per maža: $3+9+13=25$. Vadinasi, išmesti reikia arba balionus 18 ir 9, arba 14 ir 13. Abiem atvejais neišmetamas balionas 3.

21. (D) 36

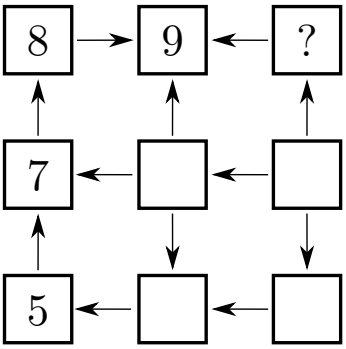
! Kadangi sausainių skaičius N dalijasi iš 3 ir iš 4, tai jis dalijasi iš 12. Kitaip sakant, jis yra skaičiaus 12 kartotinis, ir galėtų būti 12, 24, 36 arba 48. Bet $N+6$ turi dalytis iš 7, o iš skaičių 18, 30, 42 ir 54 iš 7 dalijasi tik 42. Vadinasi, dėžėje yra 36 sausainiai.

22. (E) 1 ir 4

! Bananų „krūva“ (visi bananai) sveria tris kartus daugiau nei obuolių „krūva“. Vadinasi, visi vaisiai sveria tiek, kiek keturios obuolių krūvos. Bet visi vaisiai sveria $7+5+6+2+16=36$ kg, todėl obuoliai sveria $36:4=9$ kg. Matome, kad obuoliai būtinai yra sudėti į 1 ir 4 dėžes: $7+2=9$ kg.

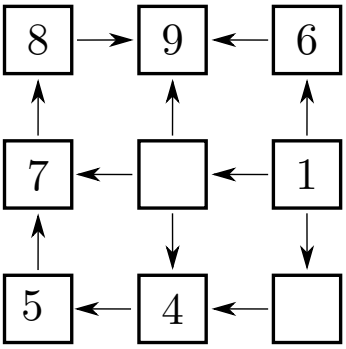
23. (D) 6

! Iš karto aišku, kad virš 7 turi būti 8: jei čia būtų 9, tai į dešinę nuo 9 turėtų būti dar daugiau. Dabar aišku, kad virš centrinio langelio bus 9:



Kadangi tuščiuose keturiuose langeliuose yra keturi skaičiai, mažesni už 5, tai juose – skaičiai 1, 2, 3 ir 4. Vadinasi, ? reiškia likusį skaičių 6.

Užpildyti lentelę dabar paprasta: kadangi po klaustuku esantis skaičius mažesnis už tris kitus, tai jis – būtinai 1. Kadangi šalia 5 esantis skaičius didesnis už 3 kitus, tai jis – būtinai 4. O štai į likusius kvadratus skaičius 2 ir 3 galima surašyti ir vienaip, ir kitaip.



24. (A) ■

! Iš antrųjų svarstyklių matome, kad 1 trikampis sveria tiek, kiek 5 kvadratai. Tada iš pirmųjų svarstyklių aišku, kad 2 šešiakampiai sveria kiek 6 kvadratai, t. y. 1 šešiakampis atsveria 3 kvadratus.

Vadinasi, trečiųjų svarstyklių kairėje – 3 šešiakampiai, arba 9 kvadratų svoris. Jų dešinėje – $2 \cdot 5 = 10$ kvadratų svoris. Vadinasi, svarstykles padarysime pusiausviras, uždėję į kairiąją lėkštę $10 - 9 = 1$ kvadrato svorį, t. y. 1 kvadratą.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	C
2	C
3	B
4	D
5	E
6	C
7	D
8	C
9	D
10	E
11	E
12	C
13	C
14	E
15	D
16	B
17	D
18	E
19	D
20	A
21	D
22	E
23	D
24	A