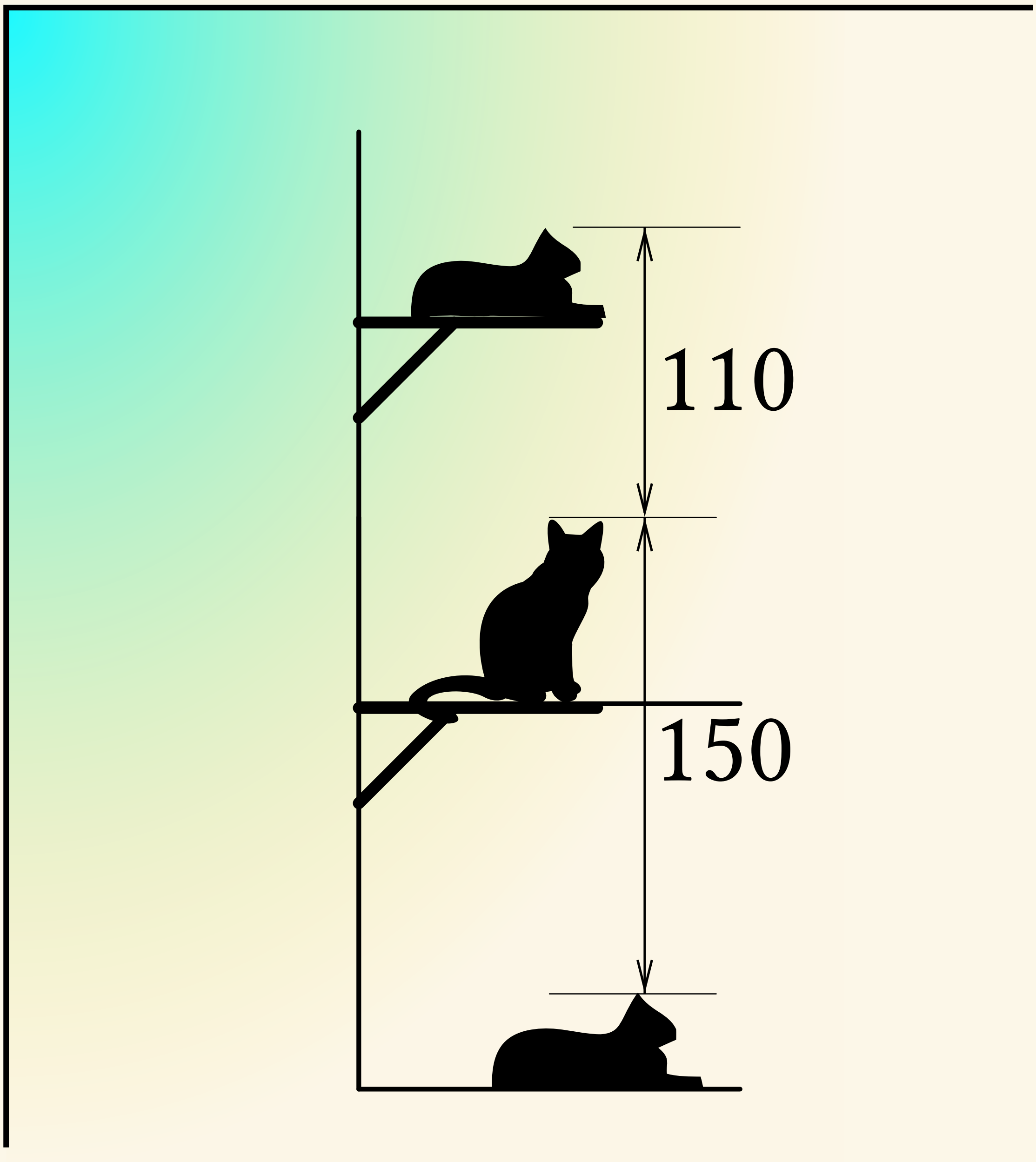
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA

Junioras



Užduotys ir sprendimai

2018

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2018. Junioras

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Maketavimas
Ugnė Šiurienė

Turinys

Pratarmė **4**

Dalyvio kortelės pavyzdys **6**

Sąlygos **7**

Užduočių sprendimai **11**

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 45000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2018 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2018 metų kovo 15 dieną keliavo ir gausiai sprendė 9–10 klasių (*Junioro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

Tarptautinis matematikos konkursas
KENGŪRA

Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą*.
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys: ☒

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras ☐☐☐☐☐☐

Mokyklos pavadinimas

Kalba

- Lietuvių ☐
- Lenkų ☐
- Rusų ☐
- Anglų ☐

Klasė	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	**7**	☐	☐	☐	☐	☐	**13**	☐	☐	☐	☐	☐	**19**	☐	☐	☐	☐	☐	**25**	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	**8**	☐	☐	☐	☐	☐	**14**	☐	☐	☐	☐	☐	**20**	☐	☐	☐	☐	☐	**26**	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	**9**	☐	☐	☐	☐	☐	**15**	☐	☐	☐	☐	☐	**21**	☐	☐	☐	☐	☐	**27**	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	**10**	☐	☐	☐	☐	☐	**16**	☐	☐	☐	☐	☐	**22**	☐	☐	☐	☐	☐	**28**	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	**11**	☐	☐	☐	☐	☐	**17**	☐	☐	☐	☐	☐	**23**	☐	☐	☐	☐	☐	**29**	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	**12**	☐	☐	☐	☐	☐	**18**	☐	☐	☐	☐	☐	**24**	☐	☐	☐	☐	☐	**30**	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25 % uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

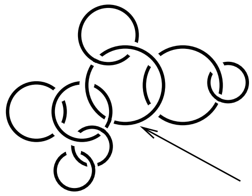
Automatinis apdorojimas, Nacionalinis egzaminų centras, 2018

2018 m. *Junioro* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

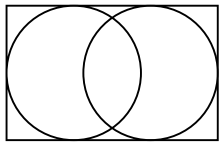
1. Pono Liūto šeimoje kiekvienas iš jo vaikų turi mažiausiai du brolius ir mažiausiai vieną seserį. Kiek mažiausiai Liūtukų (berniukų ir mergaičių) gali būti pono Liūto šeimoje?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

2. Ant stalo gulėjo keli žiedai, kai kurie iš jų buvo sukibę (žr. pav.). Į kambarį įlėkė šarka, stvėrė rodykle pažymėtą žiedą ir išskrido. Kiek žiedų išsinešė šarka?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7



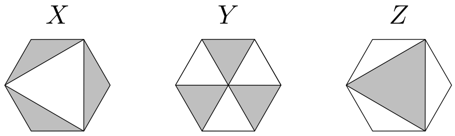
3. Trikampio dviejų kraštinių ilgiai yra 5 ir 2, o trečiosios kraštinės ilgis yra natūralusis nelyginis skaičius. Koks tai skaičius?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

4. Paveikslėlyje pavaizduotas 7×11 stačiakampis ir du apskritimai, liečiantys jo kraštines. Koks yra atstumas tarp apskritimų centrų?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5



5. Sudėjus penkis iš eilės einančius sveikuosius skaičius, gauta suma 10^{2018}. Kam lygus vidurinis skaičius?
A) 10^{2013} **B)** 5^{2017} **C)** 10^{2017} **D)** 2^{2018} **E)** $2 \cdot 10^{2017}$

6. Paveikslėlyje pavaizduoti trys lygūs taisyklingieji šešiakampiai. Virš kiekvieno šešiakampio užrašytas jo nuspalvintos dalies plotas: X, Y, Z. Kuris plotų sąryšis teisingas?



A) $X = Y = Z$ **B)** $Y = Z \neq X$ **C)** $Z = X \neq Y$ **D)** $X = Y \neq Z$
E) Visi trys plotai X, Y, Z skirtingi

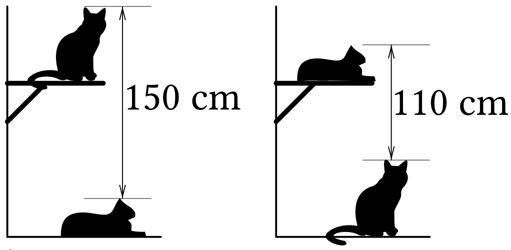
7. Senelis iš sodo parnešė 42 obuolius, 60 slyvų ir 90 vyšnių. Senelė išdalijo viską į pintines ir kiekvienam anūkui davė po pintinę. Visi anūkai gavo po tiek pat obuolių, tiek pat slyvų ir tiek pat vyšnių. Kiek daugiausiai anūkų turi seneliai?
A) 3 **B)** 6 **C)** 10 **D)** 14 **E)** 42

8. Sudėtyje stulpeliu keturi skaitmenys pakeisti raidėmis P, Q, R ir S (žr. pav.). Kam lygi suma $P + Q + R + S$?
A) 14 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 17 **E)** 24

$$\begin{array}{r} P\,4\,5 \\ +\;Q\,R\,S \\ \hline 6\,5\,4 \end{array}$$

9. Ką gausime, jei sudėsime 25% skaičiaus 2018 ir 2018% skaičiaus 25?
A) 1009 **B)** 2016 **C)** 2018 **D)** 3027 **E)** 5045

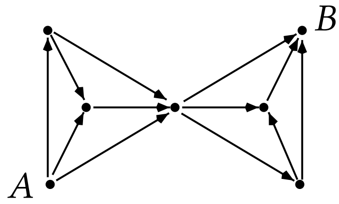
10. Kai Micius tupi ant stalo, o Rainius guli po stalu, tai Miciaus ausys yra 150 cm aukščiau nei Rainiaus. Kai Micius tupi po stalu, o Rainius guli ant stalo, tai Rainiaus ausys yra 110 cm aukščiau nei Miciaus (žr. pav.). Koks yra stalo aukštis?



A) 110 cm **B)** 120 cm **C)** 130 cm **D)** 140 cm **E)** 150 cm

Klausimai po 4 taškus

11. Keliais būdais skruzdėlė gali nuropoti iš taško A į tašką B (žr. pav.), jei ji ropoja tik rodyklėmis ir tik jų rodoma kryptimi?
A) 20 **B)** 16 **C)** 12 **D)** 9 **E)** 6



12. Nojus iš eilės užrašė natūraliuosius skaičius: $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$, kiekvieną skaičių n parašydamas n kartų. Taip jis gavo 105 skaičių sąrašą. Kiek skaičių Nojaus sąraše dalijasi iš 3?
A) 4 **B)** 12 **C)** 21 **D)** 30 **E)** 45

13. Viename iš trijų urvų paslėptas lobis, o kiti du urvai yra spąstai. Virš pirmojo urvo užrašyta: „Manyje yra lobis“, virš antrojo: „Manyje nėra lobio“, virš trečiojo: „$2 + 3 = 2 \times 3$“. Lygiai vienas užrašas yra teisingas. Kuriame urve yra lobis?
A) Pirmajame **B)** Antrajame **C)** Trečiajame **D)** Bet kuriame iš trijų
E) Pirmajame arba antrajame

14. Tarp įėjimų į bendrabučius B-I ir B-II, stovinčius vienoje Saulėlydžio gatvės pusėje, yra 250 m atstumas. Bendrabutyje B-I gyvena 100 studentų, o B-II – 150 studentų. Kurioje vietoje tarp bendrabučių turi būti įrengta autobusų stotelė, kad atstumų, kuriuos iki jos turės nueiti visi studentai, suma būtų mažiausia?
A) Bet kur tarp B-I ir B-II **B)** Priešais B-I **C)** 100 metrų nuo B-I
D) 100 metrų nuo B-II **E)** Priešais B-II

15. Kiek skaitmenų turi skaitinio reiškinio $\frac{1}{9} \times 10^{2018} \times (10^{2018} - 1)$ reikšmė?
A) 2017 **B)** 2018 **C)** 4035 **D)** 4036 **E)** 4037

16. Jonas nori pirkti matematikos žinyną, bet visai neturi pinigų. Tėvas ir du broliai paskolino Jonui reikiamą sumą. Tėvas davė Jonui pusę to, kiek broliai, vyriausiasis brolis – trečdalį to, kiek kiti du skolintojai, o vidurinysis brolis – 10 eurų. Kiek kainuoja žinynas?
A) 24 EUR **B)** 26 EUR **C)** 28 EUR **D)** 30 EUR **E)** 32 EUR

17. Išbraukus triženklio natūraliojo skaičiaus vidurinį skaitmenį, skaičius sumažėjo devynis kartus. Kiek yra tokių triženklių skaičių?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

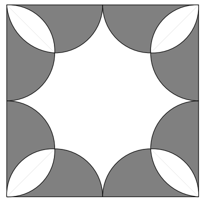
18. Kiek pošaknyje turi būti dėmenų, lygių 2018^2, kad lygybė

$$\sqrt{2018^2 + 2018^2 + ... + 2018^2} = 2018^{10}$$

būtų teisinga?
A) 5 **B)** 8 **C)** 18 **D)** 2018^8 **E)** 2018^{18}

19. Pelėdų akademijoje galima studijuoti matematiką, ūbavimą ir pelėgaudą. 35% matematikos studenčių studijuoja algebrinę geometriją. 13% visų Akademijos studenčių studijuoja kitas matematikos sritis. Jokia studentė nestudijuoja daugiau nei vienos matematikos srities. Kuri Akademijos studenčių dalis studijuoja matematiką?
A) 13% **B)** 20% **C)** 22% **D)** 48% **E)** 65%

20. Kvadrato viduje nubrėžti 8 vienodi pusapskritimiai, kaip parodyta paveikslėlyje. Koks yra nenuspalvintos kvadrato dalies plotas, jei kvadrato kraštinės ilgis yra 4?
A) 2π **B)** 3π **C)** $6+\pi$ **D)** $3\pi-2$ **E)** Kitas skaičius



Klausimai po 5 taškus

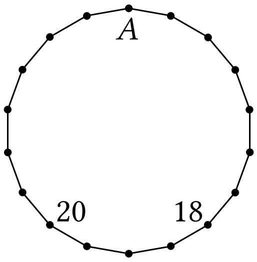
21. Robotė Rožė, gavusi skaičių sąrašą, apskaičiuoja bei užrašo jų sumą ir sandaugą. Kartą gavusi sveikųjų skaičių sąrašą, kuriame buvo ir skaičius 2018, Rožė abu kartus užrašė rezultatą 2018. Kiek skaičių galėjo būti sąraše, kurį gavo Rožė?
A) 2016 **B)** 2017 **C)** 2018 **D)** 2019 **E)** 2020

22. Robotė Roma, gavusi keturių teigiamų skaičių sąrašą, užrašo trijų iš jų aritmetinio vidurkio ir likusio ketvirto skaičiaus sumą. Gavusi tą patį sąrašą keturis kartus iš eilės ir atlikusi operaciją visais keturiais įmanomais būdais, Roma užrašė skaičius 17, 21, 23 ir 29. Koks yra didžiausias skaičius sąraše, kurį gavo Roma?
A) 12 **B)** 15 **C)** 21 **D)** 24 **E)** 29

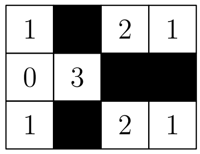
23. Taisyklingojo 2018-kampio viršūnės iš eilės ratu sunumeruotos skaičiais nuo 1 iki 2018. Įstrižainė, jungianti viršūnes 18 ir 1018, bei įstrižainė, jungianti viršūnes 1018 ir 2000, dalija daugiakampį į tris mažesnius. Po kiek viršūnių jie turi?
A) 38, 983, 1001 **B)** 37, 983, 1001 **C)** 38, 982, 1001 **D)** 37, 982, 1000
E) 37, 983, 1002

24. Penkiuose miestuose M, N, O, P ir Q prekiauja 40 pirklių. Vieną dieną kiekvienas pirklys išvyko iš savo miesto į vieną iš likusių keturių: 10 pirklių keliavo iš M arba į M, 10 pirklių – iš N arba į N, 10 pirklių – iš O arba į O, 10 pirklių – iš P arba į P. Kiek pirklių keliavo iš Q arba į Q?
A) 0 **B)** 10 **C)** 20 **D)** 30 **E)** 40

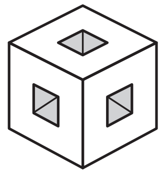
25. Taisyklingojo 18-kampio viršūnėse reikia taip įrašyti po sveikąjį skaičių, kad kiekvienas iš jų būtų lygus skaičių dviejose gretimose viršūnėse sumai. Du skaičiai jau įrašyti (žr. pav.). Kokį skaičių reikia įrašyti viršūnėje A?
A) 2018 **B)** -20 **C)** 18 **D)** 38 **E)** -38

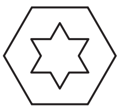
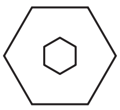
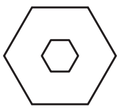
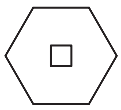
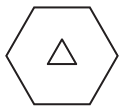


26. Kaskart Linui nubraižius stačiakampę languotą lentelę, Lina kai kuriuos lentelės langelius nudažo juodai, o kiekviename iš likusių langelių įrašo, kiek jis turi gretimų (su juo bendrą kraštinę turinčių) juodų langelių. Paveikslėlyje pateiktas tokios lentelės pavyzdys. Linas nubraižė lentelę, sudarytą iš 3×11 langelių. Kokia yra didžiausia galima suma skaičių, kuriuos joje gali įrašyti Lina?
A) 25 **B)** 30 **C)** 33 **D)** 52 **E)** 55



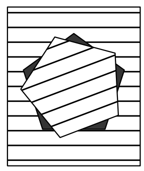
27. Iš $3 \times 3 \times 3$ kubo išimti 7 iš 27 vienetinių kubelių. Paveikslėlyje pavaizduota, kaip dabar atrodo bet kurios trys gretimos kubo sienos. Kaip atrodo skylėtojo kubo sankirta su plokštuma, kuri eina per kubo centrą ir yra statmena vienai iš keturių kubo įstrižainių?

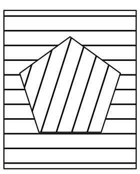
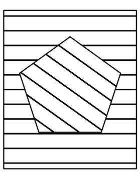
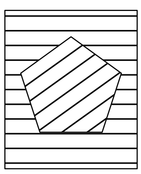
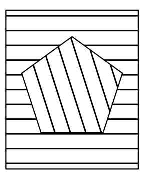
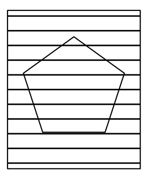


A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

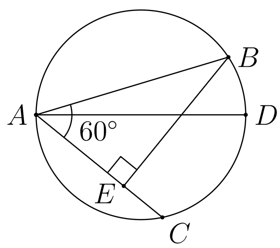
28. Į 2×3 lentelės langelius reikia taip įrašyti po vieną iš skaičių 1, 2, 3, 4, 5, 6, kad visi skaičiai lentelėje būtų skirtingi ir kad kiekvienos eilutės skaičių suma bei kiekvieno stulpelio skaičių suma dalytųsi iš 3. Keliais būdais tai galima padaryti?
A) 36 **B)** 42 **C)** 45 **D)** 48 **E)** 54

29. Iš liniuoto popieriaus lapo iškirptas (bet iš atsiradusios skylės neišimtas) taisyklingasis penkiakampis. Penkiakampį leidžiama pasukti aplink jo centrą 21° kampu prieš laikrodžio rodyklę. Paveikslėlyje parodyta padėtis po pirmojo posūkio. Kokį vaizdą gausime, kai penkiakampis pirmą kartą vėl pilnai uždengs lape atsiradusią skylę?



A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

30. Skritulyje su skersmeniu AD nubrėžtos stygos AB ir AC, sudarančios 60° kampą (žr. pav.). Atkarpoje AC pažymėtas toks taškas E, kad $BE \perp AC$, $EC = 3$. Raskite stygos BD ilgį.
A) $\sqrt{3}$ **B)** 2 **C)** 3 **D)** $2\sqrt{3}$ **E)** $3\sqrt{2}$

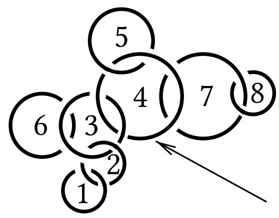


Junioro užduočių sprendimai

1. (C) 5

! Iš karto aišku, kad šeimoje yra ir berniukų, ir mergaičių. Bet kuris berniukas turi du brolius, todėl berniukų yra bent trys. Bet kuri mergaitė turi seserį, todėl mergaičių yra bent dvi, o iš viso vaikų šeimoje – bent penki. Penkių ir pakanka, kad būtų tenkinama sąlyga: kai yra trys broliai ir dvi seserys, kiekvienas iš jų turi mažiausiai du brolius ir vieną seserį.

2. (C) 5



! Nors daugelis išsprendusiųjų šį uždavinį jo atsakymą greičiausiai suvokia intuityviai, galima racionaliai paaiškinti, kada du žiedai yra sunerti. Kai žiedai kertasi, kiekviename iš dviejų sankirtos taškų vienas iš žiedų yra virš kito. Jei abiejuose taškuose vienas žiedas guli padėtas ant kito, tai tas žiedas ir yra tik uždėtas ant kito žiedo, o ne sunertas su juo. O jei viename taške vienas žiedas guli ant kito, o kitame taške tas kitas žiedas guli ant pirmojo, tai žiedai kerta vienas kito vidų ir todėl yra sunerti.

Sunerti šie žiedai: 1 ir 2, 2 ir 3, 3 ir 4, 4 ir 5, 7 ir 8, o žiedai 3 ir 6 bei 4 ir 7 nesunerti (žr. pav.). Su žiedu 4 grandinę sudaro žiedai 1, 2, 3, 5. Vadinasi, šarka pavogė šiuos 5 žiedus.

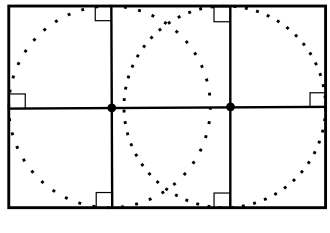
3. (C) 5

? Du pateikti atsakymai lyginiai. Iš likusių trijų lengva pasirinkti **C**, įsivaizdavus atitinkamą lygiašonį trikampį su kraštinėmis 5, 5 ir 2. Jei turime dvi kraštines, kurių kiekvienos ilgis yra 5, tai keičiant kampą tarp jų nuo $0°$ iki $180°$, trečiosios kraštinės ilgis įgyja visas reikšmes tarp 0 ir $5 + 5 = 10$, įskaitant reikšmę 2.

Renkamės atsakymą **C**.

! Ieškomas kraštinės ilgis a negali būti kitoks nei 5. Pagal trikampio nelygybę, $5 + 2 > a$ ir $a + 2 > 5$, todėl $3 < a < 7$. Vienintelis nelyginis skaičius tarp 3 ir 7 yra 5.

4. (D) 4



! Ieškomą atsumą pažymėkime a. Brėžinyje pažymėkime apskritimų centrus ir iš jų išveskime statmenis į stačiakampio kraštines (žr. pav.). Stačiakampio plotis 7 lygus tiek vieno, tiek kito apskritimo skersmeniui. Todėl apskritimų spindulys lygus $7 : 2 = 3{,}5$. Apskritimų centrai (skersmenų vidurio taškai) yra per vidurį tarp ilgųjų stačiakampio kraštinių, todėl juos jungianti atkarpa ir horizontalūs statmenys sudaro vieną atkarpą, kurios ilgis yra 11. Kita vertus, šis ilgis lygus $3{,}5 + a + 3{,}5 = 7 + a$. Todėl $a = 11 - 7 = 4$.

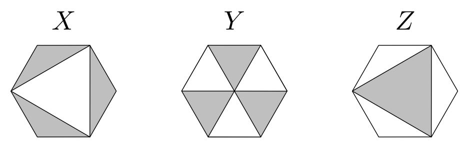
!! Vertikalūs apskritimų skersmenys (žr. **!** dalį) dalija stačiakampį į tris mažesnius. Jei vidurinį iš jų išmesime, o likusius du suglausime, tai du likę pusapskritimiai sudarys vieną apskritimą, liečiantį visas keturias naujojo stačiakampio kraštines. Naujasis stačiakampis yra kvadratas. Jo plotis nepasikeitė ir lygus 7, todėl naujasis ilgis yra 7, o išmestos vidurinės dalies ilgis yra $11 - 7 = 4$. Jis ir yra lygus atstumui tarp apskritimų centrų.

5. (**E**) $2 \cdot 10^{2017}$

! Ieškomą skaičių pažymėkime n. Tada $10^{2018} = (n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2) = 5n$ ir

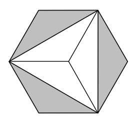
$$n = 10^{2018} : 5 = (10 \cdot 10^{2017}) : 5 = (10 : 5) \cdot 10^{2017} = 2 \cdot 10^{2017}.$$

6. (**A**) $X = Y = Z$



? Kiekvieno šešiakampio plotą pažymėkime S, o kraštinės ilgį – a. Lengva pastebėti, kad 6 trikampiai, į kuriuos padalytas vidurinis šešiakampis, yra lygūs (ir lygiakraščiai, kurių kraštinės ilgis yra a). Todėl trijų iš jų bendras plotas yra $Y = \frac{S}{2}$. Taip pat aišku, kad $X + Z = S$. Todėl arba $X = Z = \frac{S}{2}$, arba $X > \frac{S}{2} > Z$, arba $X < \frac{S}{2} < Z$. Lieka tik atsakymai **A** ir **E**.

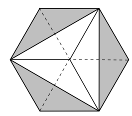
Norint pasirinkti vieną iš jų, verta įžiūrėti padalijimą į 6 lygius trikampius, iš kurių trys nuspalvinti, ir kairiajame šešiakampyje (žr. pav.). Todėl $X = Y = Z = \frac{S}{2}$.



Renkamės atsakymą **A**.

! Pagrįskime **?** dalies teiginius.

Kodėl 6 trikampiai paveikslėlyje lygūs? Jei duotąjį vidurinį šešiakampį tikrai sudaro 6 lygūs lygiakraščiai trikampiai, tai kiekvienas iš šešių trikampių paveikslėlyje yra lygiašonis, kurio šoninės kraštinės lygios a, o viršūnės kampas lygus $60° + 60° = 120°$. Todėl šie trikampiai lygūs pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų.



Bet kodėl 6 trikampiai, į kuriuos duotąjį vidurinį šešiakampį dalija įstrižainės, būtinai lygūs ir lygiakraščiai? Tai išplaukia iš tokio matematikoje gerai žinomo teiginio: apie bet kokį taisyklingąjį daugiakampį galima apibrėžti apskritimą. Turint taisyklingąjį šešiakampį ir iš apibrėžtinio apskritimo centro išvedus spidulius į visas kraštines, gaunami 6 lygiašoniai trikampiai, kurie yra lygūs pagal tris kraštines. Tada kiekvieno iš jų viršūnės kampas lygus $360° : 6 = 60°$, todėl šie lygiašoniai trikampiai lygiakraščiai. Trys gretimi $60°$ kampai sudaro $180°$ kampą, todėl išvestieji spinduliai poromis sudaro viename taške susikertančias šešiakampio tris ilgąsias įstrižaines.

(Beje, tokiu būdu lengvai gauname taisyklingojo šešiakampio ploto formulę. Kadangi vieno lygiakraščio trikampio plotas lygus $S_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60°$, tai $S = 6S_1 = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$.)

7. (B) 6

? Obuolių, slyvų ir vyšnių skaičiai turi dalytis iš anūkų skaičiaus be liekanos, nes visos sodo gėrybės išdalytos anūkams po lygiai. Kadangi 42 nesidalija iš 10, o 60 nesidalija nei iš 14, nei iš 42, tai atsakymai **C-E** netinka. Iš likusių atsakymų 3 ir 6 galime rinktis didesnįjį, nes 42, 60 ir 90 iš 6 dalijasi (6 anūkai gavo po 7 obuolius, 10 slyvų ir 15 vyšnių).

Renkamės atsakymą **B**.

! Obuolių, slyvų ir vyšnių skaičiai turi dalytis iš anūkų skaičiaus be liekanos, nes visos sodo gėrybės išdalytos anūkams po lygiai. Kadangi skaičių $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ ir $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ didžiausiasis bendrasis daliklis yra $2 \cdot 3 = 6$, tai daugiau nei 6 anūkų seneliai negali turėti. Atsakymas 6 tenkina sąlygą: 6 anūkai galėjo gauti po 7 obuolius, 10 slyvų ir 15 vyšnių.

8. (B) 15

? Iš lygybės $\overline{P45}+\overline{QRS} = 654$ gauname, kad $100P+45+100Q+10R+S = 654$ ir $100(P+Q)+$ $+10R+S = 609$. Matome, kad tinka $S = 9$, $R = 0$ ir $P+Q = 6$ (pvz., $P = Q = 3$). Gautąsias reikšmes galima greitai patikrinti, įrašant jas į duotąjį sudėties stulpeliu užrašą. Todėl tinka $P + Q + R + S = 6 + 0 + 9 = 15$.

Renkamės atsakymą **B**.

! Bandykime atkurti sudėties stulpeliu veiksmą: 1) randame $5+S$ ir rašome 4, todėl $5+S = 14$, $S = 9$ ir dešimčių skaitmenį 1 laikome mintyje; 2) randame $4+R+1$ ir rašome 5, todėl $R = 0$ ir mintyje nieko nelaikome; 3) randame $P+Q$ ir rašome 6, todėl P ir Q yra bet kokie (nenuliniai) skaitmenys, kuriems $P + Q = 6$. Gauname $P + Q + R + S = 6 + 0 + 9 = 15$.

9. (A) 1009

! Turime

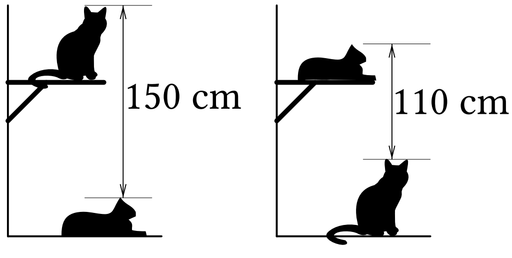
$$\frac{25\%}{100\%} \cdot 2018 + \frac{2018\%}{100\%} \cdot 25 = \frac{25 \cdot 2018 + 2018 \cdot 25}{100} = \frac{2 \cdot 25 \cdot 2018}{100} =$$

$$= \frac{50 \cdot 2018}{50 \cdot 2} = \frac{2018}{2} = 1009.$$

10. (C) 130 cm

! Tupinčio Miciaus aukštį pažymėkime a cm, gulinčio Rainiaus – b cm, o stalo – c cm. Tada $a + c$ (Miciaus ir stalo bendras aukštis) yra 150 daugiau nei b, o $b+c$ yra 110 daugiau nei a. Gauname dvi lygtis:

$$a + c = 150 + b, \quad b + c = 110 + a.$$



Tada

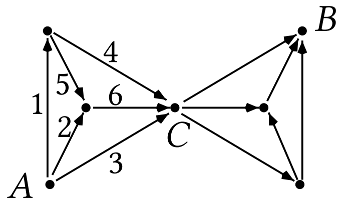
$$a - b = 150 - c = c - 110 \quad \text{ir} \quad 2c = 150 + 110 = 260.$$

Taigi, $c = 130$ (cm). Pastebėkime, kad neįmanoma rasti a ir b, bet to ir nereikia.

!! Įsivaizduokime, kad po stalu guli Rainius, ant stalo tupi Micius ir tuo pat metu ant stalo stovi dar vienas toks pats stalas, o ant jo guli dar vienas katinas, toks pats kaip Rainius. Tada atstumas nuo Rainiaus iki Miciaus ausų yra 150 cm, nuo Miciaus iki viršutinio katino ausų – 110 cm. Atstumas nuo Rainiaus iki jo dvynio ausų yra 150+110=260 (cm). Šis atstumas lygus dviejų stalų aukščiui, todėl stalo aukštis lygus $260 : 2 = 130$ (cm).

11. (B) 16

! Matematikoje taškai su juos jungiančiomis rodyklėmis vadinami orientuotuoju grafu. Matome, kad duotąjį grafą sudaro dvi dalys, jungiamos taško C (žr. pav.). Skruzdėlė iš kairiosios dalies į dešiniąją gali pakliūti tik per tašką C, iš kurio toliau visos rodyklės veda į dešiniąją dalį, bet nė viena – iš jos atgal į tašką C, tad į C grįžti jau nebus galima. Todėl natūralu nagrinėti dvi grafo dalis atskirai.



Iš taško A į tašką C galima pakliūti 4 būdais, einant šiomis rodyklėmis (žr. pav.): 1 ir 4; 1, 5 ir 6; 2 ir 6; 3 (tiesiog perrenkame visas galimybes). Lygiai taip pat gauname, kad iš taško C į tašką B galima pakliūti 4 būdais. Pirmąją ir antrąją savo kelionės dalis skruzdėlė gali pasirinkti visiškai nepriklausomai vieną nuo kitos, todėl iš viso iš A į B yra $4 \cdot 4 = 16$ kelių. Grafo išskaidymas į dvi dalis sutrumpino sprendimą: mums nereikėjo konkrečiai vardyti visų 16 galimybių ir galime būti tikri, kad nieko nepraleidome.

12. (D) 30

! Išsiaiškinkime, kokiais skaičiais baigiasi Nojaus seka. Turime 1 vienetą, 2 dvejetus, 3 trejetus ir t. t. Todėl sekoje yra $1+2+3+4$ skaičių nuo 1 iki 4, $1+2+3+\ldots+10$ skaičių nuo 1 iki 10, ir pan. Iš eilės skaičiuodami tokių sumų reikšmes, greitai gausime, kad $1+2+3+\ldots+14 = 105$. Vadinasi, sekoje yra skaičiai nuo 1 iki 14, kiekvienas skaičius n užrašytas n kartų. Iš trijų dalijasi skaičiai 3, 6, 9, 12. Jų yra atitinkamai po 3, 6, 9 ir 12, todėl iš viso jų yra $3+6+9+12 = 30$.

!! Pastebėkime, kad jei Nojaus sekoje yra skaičius $n = 3k$, dalus iš 3, ir skaičiai $n-1$ ir $n+1$, pasikartojantys atitinkamai po $n-1$ ir $n+1$ kartų, tai šių skaičių iš viso yra $(n-1)+n+(n+1) = 3n = 9k$, o iš 3 dalijasi lygiai trečdalis šių skaičių. Todėl sekoje iš eilės eina: 1 vienetas; 9 skaičiai (lygūs 2, 3 arba 4); 18 skaičių (lygių 5, 6 arba 7); 27 skaičiai (lygūs 8, 9 arba 10); 36 skaičiai (lygūs 11, 12 arba 13). Be vieneto jau turime $9+18+27+36 = 9\cdot(1+2+3+4) = 90$ skaičių, iš kurių dalūs iš 3 yra $90 : 3 = 30$. Dar sekoje yra $105 - 90 - 1 = 14$ skaičių, kurie turi būti lygūs po 13 iš eilės einančiam skaičiui 14. Vadinasi, gautieji 30 skaičių, dalūs iš 3, ir yra visi mums rūpintys skaičiai.

13. (C) Trečiajame

! Kadangi $2+3 \neq 2\times 3$, tai lygiai vienas iš pirmųjų dviejų užrašų teisingas. Bet jei teisingas pirmasis užrašas (lobis yra pirmajame urve), tai teisingas ir antrasis (lobio antrajame urve nėra). Todėl teisingas turi būti antrasis užrašas (lobio antrajame urve nėra), o pirmasis tada klaidingas (lobio nėra ir pirmajame urve). Vadinasi, lobis turi būti trečiajame urve. Iš tiesų, jei taip yra, tai antrasis užrašas teisingas, o kiti du klaidingi.

14. (**E**) Priešais B-II

? Patikrinkime atsakymus. Atstumų suma kiekvienu atveju lygi:
B) $150 \cdot 250$ m; **C)** $(100^2 + 150^2)$ m; **D)** $2 \cdot 100 \cdot 150$ m; **E)** $100 \cdot 250$ m.
Lengva pastebėti, kad $150 \cdot 250 > 2 \cdot 100 \cdot 150 > 100 \cdot 250$. Galima atmesti atsakymo variantus **A**, **B** ir **D**. Taip pat pastebėkime, kad $100^2 + 150^2 = 100 \cdot (100 + 15^2) = 100 \cdot 325 > 100 \cdot 250$. Todėl netinka ir atsakymas **C**.

Renkamės atsakymą **E**.

! Jei stotelė yra tarp bendrabučių, a metrų atstumu nuo B-I, tai 100 studentų turės eiti iki stotelės a metrų, o 150 studentų (iš B-II) turės eiti $250 - a$ metrų. Todėl visų atstumų suma lygi $100a + 150 \cdot (250 - a) = 150 \cdot 250 - 50a$ (m). Matome, kad suma tuo mažesnė, kuo skaičius a didesnis, t. y. kuo toliau nuo B-I ir arčiau B-II yra stotelė. Vadinasi, mažiausią galimą atstumų sumą gausime, kai stotelė yra priešais bendrabutį B-II.

!! Nagrinėkime visus 100-ą bendrabučio B-I studentų ir kuriuos nors 100-ą bendrabučio B-II studentų. Kadangi jų po lygiai, tai juos galima suskirstyti į poras. Kiekvienoje poroje studentų atstumų iki stotelės suma lygi 250 metrų. Todėl šiems 200 studentų jų atstumų suma nepriklauso nuo stotelės vietos tarp bendrabučių (ir, beje, tik padidėja, jei stotelė yra apskritai kitoje vietoje). Todėl atstumų suma visiems studentams bus mažiausia, kai ji mažiausia likusiems 50-iai studentų iš B-II. O ji bus mažiausia, kai šiems studentams iki stotelės apskritai nereikės eiti, t. y. kai stotelė bus priešais jų bendrabutį B-II.

15. (**D**) 4036

! Skaičių $10^{2018} - 1 = 999\ldots9$ sudaro 2018 devynetų, todėl skaičių $\frac{1}{9} \cdot (10^{2018} - 1) = 111\ldots1$ sudaro taip pat 2018 vienetų. Šį skaičių dar padauginus iš 10^{2018}, jo gale prisideda 2018 nulių. Taigi gauname iš viso $2018 + 2018 = 4036$ skaitmenų skaičių $\frac{1}{9} \cdot 10^{2018} \cdot (10^{2018} - 1) =$
$= 111\ldots1000\ldots0$.

16. (**A**) 24 EUR

! Tarkime, kad tėvas ir vyriausiasis brolis davė Jonui atitinkamai po a ir b eurų. Tada $a =$
$= \frac{1}{2}(b + 10)$ ir $b = \frac{1}{3}(a + 10)$, o rasti reikia $s = a + b + 10$. Lygtyse galima eliminuoti vieną nežinomąjį:

$$2a = b + 10, \qquad 3b = a + 10,$$

$$b = 2a - 10, \quad 3(2a - 10) = a + 10, \quad 5a = 40, \quad a = 8, \quad b = 6, \quad s = 24.$$

!! Jei brolių duotą pinigų sumą sudaro dvi lygios dalys, tai tėvas davė Jonui vieną tokią dalį. Todėl žinyno kainą sudaro $2 + 1 = 3$ dalys, o tėvas sumokėjo trečdalį visos sumos. Jei tėvo ir viduriniojo brolio duotą pinigų sumą sudaro trys lygios dalys, tai vyriausiasis brolis davė Jonui vieną tokią dalį. Todėl žinyno kainą sudaro $3 + 1 = 4$ dalys, o vyriausiasis brolis sumokėjo ketvirtadalį visos sumos. Tada viduriniojo brolio duoti 10 eurų sudaro $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ žinyno kainos. Vadinasi, žinynas kainuoja $10 \cdot \frac{12}{5} = 24$ eurus.

17. (D) 4

! Jei nagrinėjamas triženklis skaičius yra $\overline{abc}$, tai uždavinio sąlyga ekvivalenti lygybei $\overline{abc} = 9\cdot\overline{ac}$ arba $100a + 10b + c = 9(10a + c)$. Tada $10a + 10b = 8c$ ir

$$5(a + b) = 4c.$$

Kadangi $4c$ dalijasi iš 5, tai c dalijasi iš 5, todėl $c = 0$ arba 5. Bet jei $c = 0$, tai $a + b = 0$ ir $a = b = 0$, o triženklis skaičius negali prasidėti nuliu. Taigi, $c = 5$ ir $a + b = 4$. Tada $a = 1, 2, 3$ arba 4, ir atitinkamai $b = 3, 2, 1, 0$. Kadangi visais keturiais atvejais lygybė $5(a + b) = 4c$, ekvivalenti pradinei, tenkinama, tai galima ir netikrinti, kad 4 gautieji skaičiai $\overline{abc} = 135, 225, 315, 405$ tenkina sąlygą.

Taigi, yra 4 tokie triženkliai skaičiai.

!! Jei nagrinėjamas triženklis skaičius yra $\overline{abc}$, tai uždavinio sąlyga ekvivalenti lygybei $\overline{abc} = 9\cdot\overline{ac}$. Matome, kad dviženklį skaičių padauginus iš 9, paskutinis skaitmuo c nepakito. Taip gali būti, tik jei $c = 0$ arba $c = 5$. Kai $c = 0$, tai $9 \cdot \overline{ac} = 90a < 100a \leqslant \overline{abc}$. Belieka patikrinti atvejus $a = 1, \ldots, 9$, kai $c = 5$: tinka $a = 1, 2, 3$ ir 4. Tada atitinkamai $\overline{abc} = 135, 225, 315, 405$. Gauname 4 tinkamus triženklius skaičius.

18. (E) 2018^{18}

! Jei pošaknyje yra n dėmenų, tai turime lygybę

$$\sqrt{n \cdot 2018^2} = 2018^{10}.$$

Pakelkime ją kvadratu:

$$n \cdot 2018^2 = (2018^{10})^2 = 2018^{20}.$$

Tada

$$n = 2018^{20} : 2018^2 = 2018^{20-2} = 2018^{18}.$$

19. (B) 20 %

! Tarkime, kad Akademijoje iš viso studijuoja x pelėdų, kad y pelėdų studijuoja matematiką ir kad z pelėdų studijuoja algebrinę geometriją. Tada kitas matematikos sritis studijuoja $y - z$ pelėdų ir

$$z = \frac{35\%}{100\%}y = 0{,}35y, \quad y - z = \frac{13\%}{100\%}x = 0{,}13x.$$

Todėl

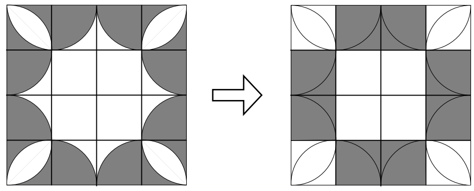
$$0{,}13x = y - z = y - 0{,}35y = 0{,}65y,$$

$$y = 0{,}13x : 0{,}65 = 13x : 65 = 13x : (5 \cdot 13) = x : 5 = 0{,}2x.$$

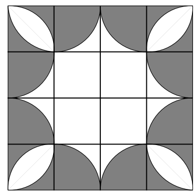
Vadinasi, pelėdos, studijuojančios matematiką, sudaro $0{,}2 \cdot 100\% = 20\%$ visų studenčių.

!! Kitas matematikos sritis studijuoja $100\% - 35\% = 65\%$ matematikos studenčių arba 13% visų studenčių. Kadangi $65 : 13 = 5$, tai visų studenčių yra 5 kartus daugiau nei matematikos studenčių. Vadinasi, matematiką studijuoja penktadalis arba 20% visų studenčių.

20. (E) Kitas skaičius

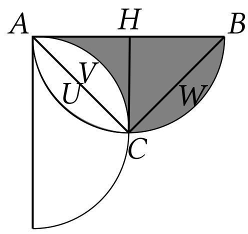


? Kvadratą padalykime į 16 vienetinių langelių. Dabar lengva pastebėti, kad nuspalvinta sritis padalyta į 16 dalių, kurias kitaip sudėliojus gaunami 8 nuspalvinti vienetiniai langeliai (žr. pav.). Todėl nuspalvintos dalies plotas lygus 8, o nenuspalvintos dalies plotas lygus $4 \cdot 4 - 8 = 8$.



! Kvadratą padalykime į 16 vienetinių langelių. Kadangi kvadrato kraštinę sudaro du pusapskritimių skersmenys, tai kiekvieno pusapskritimio skersmens ilgis yra 2, o spindulio ilgis yra 1. Todėl pusapskritimių vidurio taškai yra langelių viršūnėse, kuriose pusapskritimiai ir kertasi (žr. pav.).

Nagrinėkime vieną iš 8 nuspalvintų figūrų. Jos plotą nesunkiai apskaičiuotume, jei žinotume nuopjovų U, V, W plotus (žr. pav.). Juos įmanoma rasti, bet nebūtina. Nuopjovos U ir V lygios dėl simetrijos, taip pat ir nuopjovos U bei W. Vadinasi, nuopjovos V ir W lygios, o figūros plotas lygus trikampio ABC plotui S. Jį rasti nesunku, nes $AB = 2$, o aukštinės CH (pusapskritimio spindulio) ilgis yra 1. Kadangi tokių figūrų yra 8, tai visas kvadrato nuspalvintos dalies plotas yra $8S = 8 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2) = 8$, o nenuspalvintos dalies plotas lygus $4 \cdot 4 - 8S = 8$.



21. (B) 2017

! Jei sąrašą sudarė $n + 1$ skaičius $2018, x_1, x_2, \ldots, x_n$, tai

$$2018 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 2018 \quad \text{ir} \quad 2018x_1x_2 \ldots x_n = 2018.$$

Tada $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ ir $x_1x_2 \ldots x_n = 1$. Sveikųjų skaičių $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sandauga lygi 1, tik jei kiekvienas iš jų lygus 1 arba -1. Jei lygiai k skaičių lygūs -1, tai

$$0 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k \cdot (-1) + (n - k) \cdot 1 = n - 2k$$

ir

$$1 = x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^k \cdot 1^{n-k} = (-1)^k.$$

Tada $n = 2k$, o skaičius k lyginis. Vadinasi, n dalijasi iš 4, o sąrašo skaičių kiekis $n+1$ dalijasi iš 4 su liekana 1. Iš pateiktų atsakymų toks yra tik skaičius $2017 = 2016 + 1 = 4 \cdot 504 + 1$. Jis tinka, nes sąrašas, sudarytas iš 1008 skaičių 1, 1008 skaičių -1 ir skaičiaus 2018, tenkina sąlygą.

22. (C) 21

! Sąrašo skaičius didėjimo tvarka pažymėkime x_1, x_2, x_3, x_4, o jų sumą pažymėkime s. Tada Roma užrašė skaičius

$$y_1 = \frac{x_2 + x_3 + x_4}{3} + x_1, \quad y_2 = \frac{x_3 + x_4 + x_1}{3} + x_2,$$

$$y_3 = \frac{x_4 + x_1 + x_2}{3} + x_3, \quad y_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + x_4.$$

Galima būtų šiuos reiškinius prilyginti skaičiams 17, 21, 23, 29 ir spręsti lygčių sistemą, bet rezultatą įmanoma gauti greičiau. Sprendimas dar sutrumpės, reiškinius užrašius kiek kitaip:

$$y_1 = \frac{x_2 + x_3 + x_4 + 3x_1}{3} = \frac{s + 2x_1}{3},$$

$$\text{analogiškai} \quad y_2 = \frac{s + 2x_2}{3}, \quad y_3 = \frac{s + 2x_3}{3}, \quad y_4 = \frac{s + 2x_4}{3}.$$

Matome, kad $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$, todėl $y_4 = 29$. Sudėję visus 4 skaičius, galime rasti s:

$$90 = 17 + 21 + 23 + 29 = \frac{s + 2x_1}{3} + \frac{s + 2x_2}{3} + \frac{s + 2x_3}{3} + \frac{s + 2x_4}{3} =$$

$$= \frac{4s + 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}{3} = \frac{4s + 2s}{3} = 2s.$$

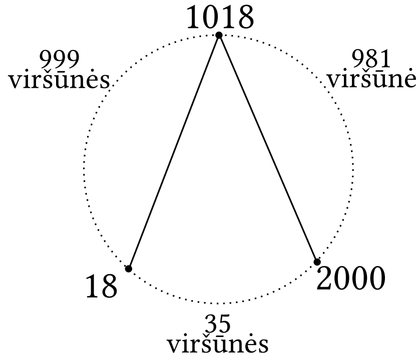
Tada $s = 90 : 2 = 45$ ir

$$29 = y_4 = \frac{45 + 2x_4}{3} = 15 + \frac{2x_4}{3}.$$

Todėl didžiausias iš sąrašo keturių skaičių x_4 lygus $(29 - 15) : \frac{2}{3} = 21$.

23. (A) 38, 983, 1001

! Tarp viršūnių 18 ir 1018 yra viršūnės 19, 20, …, 1017. Jų yra $1017 - 18 = 999$. Tarp viršūnių 1018 ir 2000, einant ratu ta pačia kryptimi, yra $1999 - 1018 = 981$ viršūnė, o toliau tarp viršūnių 2000 ir 18 yra viršūnės 2001, 2002, …, 2018, 1, 2, …, 17. Jų yra $18+17 = 35$. Uždavinio situacijos eskizas parodytas paveikslėlyje. Kairysis daugiakampis turi 999 viršūnes ir dar dvi (18 ir 1018). Dešinysis turi 981 viršūnę ir dar dvi (1018 ir 2000). Vidurinis daugiakampis turi 35 viršūnes ir dar tris (18, 1018 ir 2000). Todėl jie turi po $999+2 = 1001$, $981+2 = 983$ ir $35+3 = 38$ viršūnes.



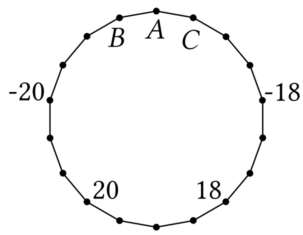
24. (E) 40

? Norint pasirinkti teisingą atsakymą, čia nebūtina išmąstyti, kodėl atsakymas turi būti toks ir tik toks. Pakanka pastebėti, kad pagal uždavinio sąlygą galima tokia situacija: po 10 pirklių iš miestų M, N, O, P visi keliauja į Q. Todėl turi tikti atsakymas, kad iš Q arba į Q keliauja visi 40 pirklių.

Renkamės atsakymą **E**.

! Kiekvienam pirkliui priskirkime du miestus – kur ir iš kur jis keliauja. Taip gauname $40 \cdot 2 = 80$ miestų sąrašą, kuriame miestai M, N, O ir P pasikartoja po 10 kartų. Tada likęs miestas Q pasikartoja $80 - 4 \cdot 10 = 40$ kartų. Kadangi joks pirklys nekeliauja iš Q į Q, tai iš Q arba į Q keliauja visi 40 pirklių.

25. (D) 38



! Tarkime, kad viršūnėse iš eilės ratu įrašyti skaičiai a, b, c, d. Tada $b = a + c$, $c = b + d$, todėl $c = b - a$, $d = c - b = -a$. T. y. bet kokių viršūnių, kurias skiria dvi viršūnės, skaičiai a ir d turi būti priešingi. Tada kas šeštoje viršūnėje įrašytas tas pats skaičius. Todėl viršūnėje B reikia įrašyti skaičių 20, o viršūnėje C skaičių 18 (žr. pav.). Viršūnėje A reikia įrašyti jų sumą $20 + 18 = 38$.

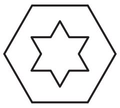
(Beje, skaičius viršūnėse įmanoma surašyti vieninteliu būdu: 6 skaičiai 20, 38, 18, -20, -38, -18 iš eilės ratu užrašomi tris kartus.)

26. (D) 52

! Skaičius bet kuriame baltame langelyje parodo, kelios jo kraštinės yra kartu ir juodų langelių kraštinės. Kiekviena tokia kraštinė priklauso lygiai vienam baltam langeliui, todėl visų lentelės skaičių suma parodo, kiek iš viso yra langelių kraštinių, ties kuriomis ribojasi baltas ir juodas langeliai.

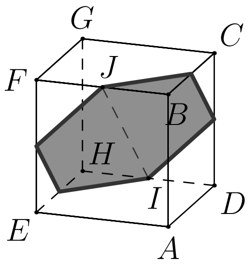
Tai suvokus, uždavinys tampa lengvas. Tokių kraštinių bus daugiausiai, kai apskritai bet kuriai kraštinei, ties kuria ribojasi kokie nors du langeliai, tie du langeliai bus baltas ir juodas, t. y. kai lentelė bus nudažyta šachmatų lentos tvarka (bet kurie du gretimi langeliai skirtingų spalvų).

Kraštinių, ties kuriomis ribojasi du langeliai, 3×11 lentelėje yra dvi horizontalios eilės po 11 kraštinių ir 10 vertikalių eilių po 3 kraštines (dvi horizontalios linijos dalija lentelę į tris eilutes, o 10 vertikalių linijų – į 11 stulpelių; kiekvieną liniją sudaro langelių kraštinės). Todėl didžiausia galima lentelės skaičių suma lygi $2 \cdot 11 + 10 \cdot 3 = 52$.

27. (**A**) 

? Iš 6 kubo sienų išimta po kubelį, todėl likęs 7-asis išimtas kubelis turi būti vidinis. Atsakymuose matome, kad plokštumos ir kubo sankirta yra taisyklingasis šešiakampis. Kubo centras buvo ir išimtojo vidinio kubelio centras, o įstrižainėje, kuriai statmena plokštuma, buvo ir atitinkama vidinio kubelio įstrižainė. Vadinasi, plokštumos sankirta su vidiniu kubeliu, prieš jį išimant, turėjo būti tokia pati, kaip ir sankirta su didžiuoju kubu, tik 3 kartus mažesnė. T. y. tokia, kokią matome atsakyme **C**.

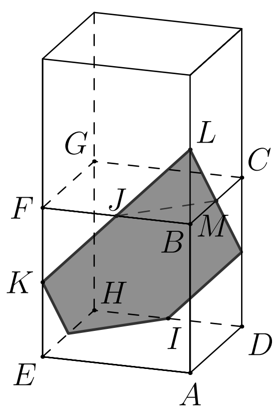
Plokštumos sankirta su kubo ertme yra plokštumos sankirta su 7 išimtais kubeliais, prieš juos išimant. Todėl šią sankirtą sudaro atsakyme **C** matomas šešiakampėlis, papildytas plokštumos sankirtomis su 6 kubeliais. Jei su jais plokštuma nesikirstų, turėtume rinktis atsakymą **C**. Bet ji su jais kertasi. Galima nuspėti, kad šešiakampio ar šešiakampėlio šešios kraštinės yra plokštumos sankirtos su kiekviena iš šešių kubo ar vidinio kubelio sienų. Bet jei plokštuma kirto visas vidinio kubelio sienas, tai ji kirto ir kitų šešių išimtųjų kubelių sienas, sutapusias su vidinio kubelio sienomis. Todėl ji turėjo kirsti ir pačius kubelius. Visa tai suvokus, natūralu pasirinkti atsakymą **A**, kuriame taisyklingasis šešiakampėlis iš **C** papildytas 6 trikampiais.



! Iš didžiojo kubo išimtas vidinis kubelis ir 6 kubeliai, turintys su vidiniu kubeliu bendrą sieną. Nagrinėjama plokštuma α ėjo ir per vidinio kubelio, prieš jį išimant, centrą bei buvo statmena vienai jo įstrižainei (žr. **?** dalį).

Vidinio kubelio viršūnes pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje. Tarkime, kad α statmena įstrižainei AG. Kubelio centras dėl simetrijos yra ir įstrižainės AG vidurio taškas, ir atkarpos IJ, jungiančios kubelio briaunų vidurio taškus, vidurio taškas.

Kubelio sienos $ABCD$ įstrižainės statmenos, todėl įstrižainė BD statmena plokštumai β, einančiai per taškus A, C, E, G. Vienu metu ir vienodais greičiais slinkime taškus B ir D atitinkamai atkarpomis BF ir DH: taškus I ir J pasieksime vienu metu, o BD kryptis nepasikeis. Todėl atkarpa IJ taip pat statmena plokštumai β. Vadinasi, atkarpa IJ yra statmena plokštumoje β esančiai įstrižainei AG. Be to, ji eina per kubelio centrą, todėl priklauso plokštumai α. Analogiškai galima paaiškinti, kodėl kubelio briaunų BC, CD, HE, EF vidurio taškai priklauso α. Tada ir paveikslėlyje pavaizduotas šešiakampis, jungiantis briaunų vidurio taškus, priklauso α, o jo kraštinės ir yra plokštumos α sankirtos su kubelio sienomis.



Paveikslėlį papildykime bet kuriuo iš kitų 6 išimtųjų kubelių. Kadangi plokštumai α priklauso atkarpa KJ, tai priklauso visa tiesė ir jos dalis JL. Dėl simetrijos ir taškas L turi būti kubelio briaunos vidurio taškas. Matome, kad viršutinio kubelio sankirta su α yra trikampis JLM, jungiantis to kubelio briaunų vidurio taškus. Kadangi visos kubelių sienos vienodos, tai ir visos atkarpos, jungiančios jų kraštinių vidurio taškus, yra lygios. Tada trikampis JLM yra lygiakraštis, $\angle KJM = 180° - 60° = 120°$. Analogiškai visi šešiakampio kampai lygūs $120°$, o kadangi ir jo kraštinės lygios, tai jis taisyklingasis.

Vadinasi, plokštumos α sankirtą su didžiojo kubo ertme sudaro taisyklingasis šešiakampis ir šeši lygiakraščiai trikampiai, turintys po bendrą kraštinę su šešiakampiu. Gauname žvaigždės pavidalo sankirtą, kurią matome atsakyme **A**.

28. (D) 48

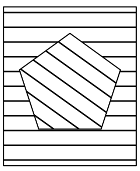
? Kadangi skaičiai 1 ir 4, 2 ir 5, 3 ir 6 dalijasi iš 3 su ta pačia liekana, tai kiekvienos poros skaičius lentelėje, tenkinančioje sąlygą, galima sukeisti vietomis ir vėl gauti tinkamą lentelę. Turint tinkamą lentelę ir taip kaitaliojant joje skaičius, galima gauti $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ skirtingas lenteles (įskaitant pradinę). Tokiu būdu visų tinkamų lentelių aibę galima išskaidyti į grupes po 8 lenteles. Vadinasi, tinkamų lentelių skaičius dalijasi iš 8. Yra tik vienas toks atsakymas 48.

Renkamės atsakymą **D**.

! Stulpelyje skaičius 3 tegali būti su skaičiumi 6, o kiekvienas iš skaičių 1 ir 4 – su vienu iš skaičių 2 ir 5. Todėl stulpeliuose galime turėti tik tokias skaičių poras: 1) 3 ir 6, 1 ir 2, 4 ir 5; 2) 3 ir 6, 1 ir 5, 2 ir 4. Belieka pasirūpinti eilutėmis. Bet kuriuo iš dviejų atvejų (2 galimybės) bet kaip paskirstykime stulpelius trims skaičių poroms ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ galimybės), o tada porą 3 ir 6 bei porą, kurioje yra 1, išdėstykime jų stulpeliuose bet kaip ($2 \cdot 2 = 4$ galimybės). Eilutėje, kur yra 1, pirmuoju atveju turėsime įrašyti 5, o antruoju – 2. Tada toje eilutėje skaičių suma dalysis iš 3, o kitos eilutės likusiame tuščiame langelyje įrašius likusį skaičių 4, jos skaičių suma taip pat dalysis iš 3. Gauname $2 \cdot 6 \cdot 4 = 48$ būdus, kaip užpildyti lentelę.

!! Kadangi $4 = 1 + 3$, $5 = 2 + 3$, $6 = 3 + 3$, tai lentelėje, tenkinančioje sąlygą, pakeitus skaičių 4 skaičiumi 1, skaičių 5 skaičiumi 2, skaičių 6 skaičiumi 3, lentelės eilučių ir stulpelių skaičių sumų dalumas iš 3 nesikeičia. Todėl vietoj duotųjų skaičių 1, 2, 3, 4, 5, 6 į lentelę rašykime skaičius 1, 1, 2, 2, 3, 3. Viename stulpelyje gali būti skaičiai 1 ir 2 arba 3 ir 3, o vienoje eilutėje – skaičiai 1, 2, 3. Pirmoje eilutėje galime bet kaip surašyti skaičius 1, 2, 3 ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ galimybės), o tada po skaičiumi 1 turime rašyti skaičių 2, po skaičiumi 2 – skaičių 1, po skaičiumi 3 – skaičių 3. Tada eilučių ir stulpelių sumos bus tinkamos. Kiekvieną tokią lentelę atitinkančias lenteles, tenkinančias pradinę sąlygą, gausime vieną iš skaičių 1 pakeitę skaičiumi 4, vieną iš skaičių 2 – skaičiumi 5, vieną iš skaičių 3 – skaičiumi 6. Turime $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ galimybes.

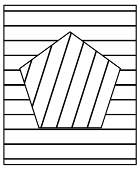
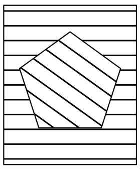
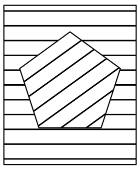
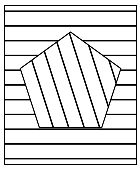
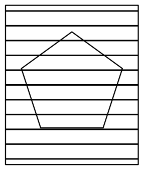
Iš viso gavome $6 \cdot 8 = 48$ lenteles.

29. (B) 

! Jei taisyklingojo penkiakampio centrą sujungiame su viršūnėmis, tai atkarpos dalija pilnąjį kampą į 5 lygias dalis, po $360° : 5 = 72°$. Todėl penkiakampis uždengtų skylę, jei iš savo pradinės padėties būtų pasuktas $72°$, $2 \cdot 72°$, $3 \cdot 72°, \ldots$ kampu.

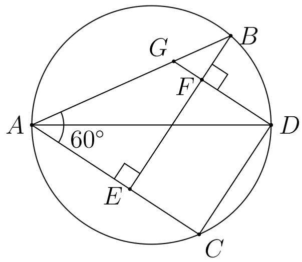
Nustatykime, kiek kartų reikia pasukti penkiakampį per $21°$, kad jis pirmą kartą uždengtų skylę. Po n posūkių penkiakampis pasuktas $n \cdot 21°$ kampu. Turime nustatyti mažiausią n reikšmę, su kuria $n \cdot 21°$ priklauso sekai $72°$, $2 \cdot 72°$, $3 \cdot 72°, \ldots$ Kitaip tariant, turime rasti mažiausią natūralųjį n, tenkinantį lygtį $21n = 72m$ su kokiu nors natūraliuoju m.

Padalykime lygtį iš 3: $7n = 24m$. Matome, kad m dalijasi iš 7. Tarkime, kad $m = 7k$. Tada $n = 24k$. Mažiausia galima n reikšmė yra 24, gaunama, kai $k = 1$ ir $m = 7$. Vadinasi, penkiakampį turime pasukti $24 \cdot 21°$ kampu, ir tai yra tas pats, kaip pasukti jį $7 \cdot 72°$ kampu.

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

Posūkį per $72°$ nagrinėti paprasčiau, todėl bandykime sukti penkiakampį 7 kartus $72°$ kampu. Pasukę penkiakampį $5 \cdot 72° = 360°$ kampu, grįšime į pradinę padėtį, pavaizduotą atsakyme **E**. Iš šios padėties dar turime jį pasukti $2 \cdot 72°$ kampu prieš laikrodžio rodyklę, t. y. per pilnojo kampo du penktadalius. Pasukę per penktadalį, gausime atsakymą **A**, o dar per penktadalį – atsakymą **B**. Tai ir yra ieškoma penkiakampio padėtis.

30. **D** $2\sqrt{3}$



! Išveskime statmenį iš taško D į atkarpą BE ir pažymėkime jo taškus, kaip parodyta paveikslėlyje.

Kadangi AD yra skersmuo, tai $\angle ABD = \angle ACD = 90°$. Atkarpos BE ir DC statmenos stygai AC, todėl jos lygiagrečios, o keturkampis $CDBE$ yra stačioji trapecija. Atstumas tarp jos pagrindų (aukštinė) lygus $DF = CE = 3$. Kadangi $DG \perp BE$ ir $AC \perp BE$, tai $DG || AC$. Todėl $\angle BGD = \angle BAC = 60°$ (atitinkamieji kampai). Kadangi trikampis BDG statusis, tai $\angle BDF = \angle BDG = 90° - \angle BGD = 30°$. Tada stačiajame trikampyje BDF turime $BD = DF : \cos 30° = 3 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	C
2	C
3	C
4	D
5	E
6	A
7	B
8	B
9	A
10	C
11	B
12	D
13	C
14	E
15	D
16	A
17	D
18	E
19	B
20	E
21	B
22	C
23	A
24	E
25	D
26	D
27	A
28	D
29	B
30	D