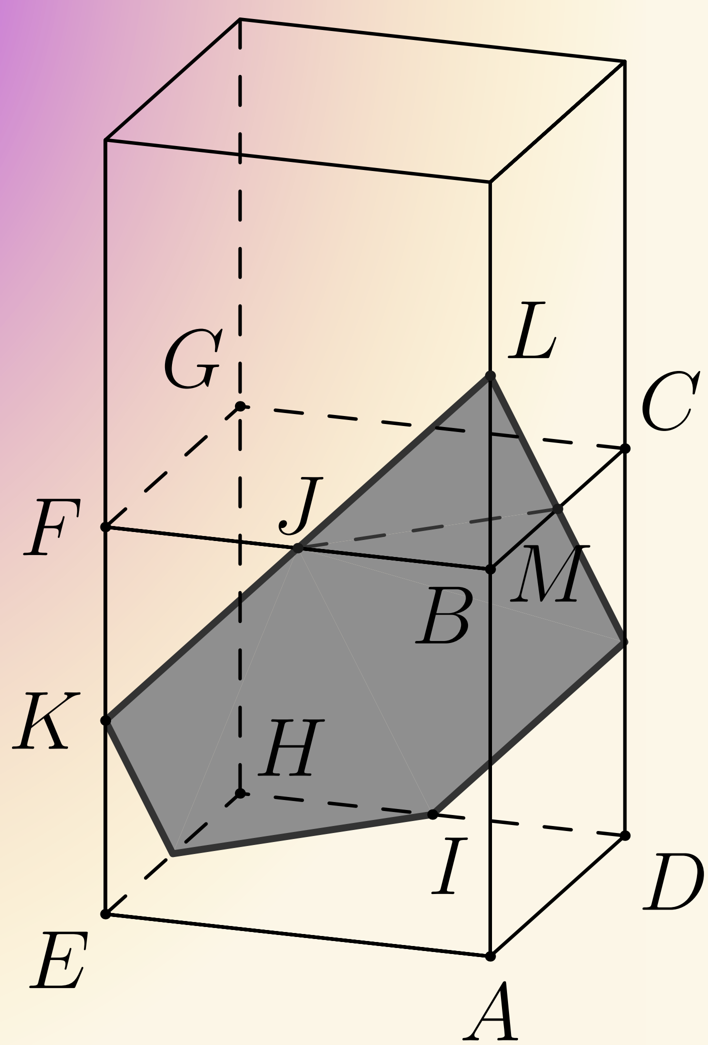
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA Ekspertas



Užduotys ir sprendimai

2018

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2018. EKSPERTAS

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autoriai ir sudarytojai
Aivaras Novikas, Juozas Juvencijus Mačys,
Ugnė Šiurienė, Paulius Drungilas

Redaktorius
Juozas Juvencijus Mačys

Maketavimas
Ugnė Šiurienė

Turinys

Pratarmė

Matematikas mokytojas Peter O'Halloran iš Sidnėjaus aštuntajame praėjusio amžiaus dešimtmetyje pradėjo organizuoti matematikos konkursą australų mokiniams, kuris sulaukė stulbinančio pasisekimo. Konkurso užduotys buvo testinės (reikėjo pasirinkti vieną iš keleto pateiktų atsakymų), o dalyvių atsakymai tikrinami kompiuteriais.

1991 m. prancūzų pedagogų Deledicq šeima, įkvėpti australų sėkmės, suorganizavo panašų matematikos konkursą *Kengūra*, kuriame pirmaisiais metais dalyvavo per 120 tūkstančių mokinių iš Prancūzijos. 1994 m. šis konkursas prasiplėtė į dar 7 šalis: Baltarusiją, Ispaniją, Lenkiją, Olandiją, Rumuniją, Rusiją ir Vengriją. 1994 m. įsteigta asociacija „Kengūra be sienų" vienija konkurso *Kengūra* šalis-nares. Kasmet vykstančiame asociacijai priklausančių šalių atstovų suvažiavime parenkamos konkurso užduotys ir sprendžiami organizaciniai klausimai.

Nuo 2011 m. konkurse visame pasaulyje kasmet dalyvauja per 6 milijonai mokinių, o asociacija „Kengūra be sienų" vienija per 60 šalių. Daugiau informacijos apie matematikos konkursą *Kengūra* galima rasti čia:

`http://aksf.org/`

Lietuvoje konkursas *Kengūra* pradėtas rengti nuo 1995 m. Konkursas organizuojamas 6 amžiaus grupėms: *Nykštukas* (1–2 kl.), *Mažylis* (3–4 kl.), *Bičiulis* (5–6 kl.), *Kadetas* (7–8 kl.), *Junioras* (9–10 kl.) ir *Senjoras* (11–12 kl.).

Konkursas kasmet vyksta trečiąjį kovo ketvirtadienį. Kiekvienas konkurso dalyvis gauna užduočių lapą ir dalyvio kortelę, kurioje pažymi atsakymus. Visų dalyvių kortelės nuskenuojamos ir apdorojamos kompiuteriu. Kasmet (nuo 2000 m.) paruošiamos uždavinių sprendimo knygelės, kurias galima rasti čia:

`http://kengura.lt/`

2015 m. atsirado nauja *Kengūros* dalyvių grupė nebemokiniams – *Ekspertas*. Šiai grupei konkursas buvo organizuotas „online" režimu.

Konkurso metu sprendžiama 30 uždavinių, kurių sprendimas vertinamas taip: jei uždavinio atsakymas yra teisingas, skiriami visi prie jo sąlygos nurodyti taškai (3, 4 arba 5); jei atsakymas neteisingas – atimamas ketvirtadalis uždaviniui numatytų taškų; už nepažymėtą atsakymą taškai neskiriami (0 taškų). Be to, kiekvienas dalyvis konkurso pradžioje turi 30 taškų (taigi net visų uždavinių atsakymus pažymėjus neteisingai, iš viso surenkama 0 taškų).

Šioje knygelėje ženklu **!** pažymėti griežti matematiniai sprendimai. Tačiau norint pasirinkti teisingą atsakymo variantą ne visada reikia griežto matematinio sprendimo. Kartais pakanka paaiškinti, kodėl kiti nurodyti atsakymo variantai netinka. Tokie sprendimai pažymėti ženklu **?**. Kai vienų ar kitų sprendimų pateikiama daugiau, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse pakanka net ir klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad skaitytojas nepatingės išsiaiškinti viską iki galo.

Daugiau informacijos apie *Eksperto* grupę galima rasti čia:

`http://www.ekspertas.kengura.lt/`

Viliamės, kad *Eksperto* grupė gausės – juk loginis mąstymas svarbus ne vien mokiniams, jis svarbus žmogui visą gyvenimą. Nestandartinių uždavinių sprendimas leidžia pasitikrinti ir pagilinti matematinius įgūdžius, ugdyti matematinę kultūrą.

Organizatoriai

Eksperto garbės lenta

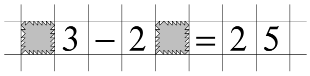
(dalyviai išsprendę absoliučiai visus uždavinius)

Metai	**Dalyvių skaičius**	**Nugalėtojai**
2018	66	Ernestas Ramanauskas
2017	78	baltrus
2016	98	Daumilas Ardickas
2015	47	Dainius Dzindzalieta Eduardas Juška Ignas Urbonavičius

2018 m. *Eksperto* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Aistė iš vieno dviženklio skaičiaus atėmė kitą dviženklį skaičių, o tada ji uždažė du langelius (žr. pav.). Kokia yra uždažytuose langeliuose esančių skaitmenų suma?

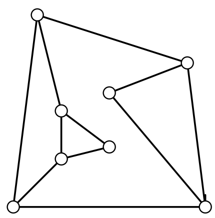


A) 8 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 15

2. Triušis Ušis turėjo 20 morkų. Kasdien jis sugraužsaid 2 morkas. 12-tą morką jis sugraužė trečiadienį. Kada jis sugraužė pirmą iš tų morkų?
A) Pirmadienį **B)** Antradienį **C)** Trečiadienį **D)** Ketvirtadienį **E)** Penktadienį

3. Kai Toras suduoda savo kūju į bet kokią uolą, ji skyla į lygiai penkias mažesnes uolas. Sykį Toras aptiko septynias stūksančias uolas. Kiek uolų, stūksančių toje vietoje, galėjo palikti Toras, smogęs kūju kelis kartus?
A) 17 **B)** 20 **C)** 21 **D)** 23 **E)** 25

4. Paveikslėlyje pavaizduota lempučių sujungimo schema. Iš pradžių visos lemputės nešviečia. Palietus kurią nors lemputę, užsidega ji ir visos lemputės, sujungtos su ja tiesiogiai. Kiek mažiausiai lempučių reikia paliesti, kad užsidegtų visos lemputės?



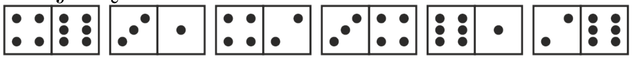
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

5. Senelis iš sodo parnešė 42 obuolius, 60 slyvų ir 90 vyšnių. Senelė išdalijo viską į pintines ir kiekvienam anūkui davė po pintinę. Visi anūkai gavo po tiek pat obuolių, tiek pat slyvų ir tiek pat vyšnių. Kiek daugiausiai anūkų turi seneliai?
A) 3 **B)** 6 **C)** 10 **D)** 14 **E)** 42

6. Kiek yra tokių pirminių skaičių p_1 ir p_2 porų, kad $p_1 + p_2 = 1001$ ir $p_1 < p_2$?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** Daugiau nei 3

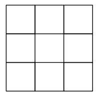
7. Laima, Moira ir Fortūnatas išėjo apsipirkti. Parduotuvėje Moira išleido tik 15% to, kiek išleido Fortūnatas, o Laima išleido 60% daugiau nei jis. Kartu jie išleido 55 eurus. Kiek pinigų išleido Laima?
A) 3 EUR **B)** 20 EUR **C)** 25 EUR **D)** 26 EUR **E)** 32 EUR

8. Domino kauliukai sudėti teisingai, kai gretimi kauliukai suglausti langeliais, turinčiais po tiek pat akučių. Paulius padėjo 6 kauliukus, kaip parodyta paveikslėlyje. Vienu ėjimu leidžiama arba sukeisti bet kuriuos du kauliukus vietomis (jų neapsukant), arba apsukti bet kurį vieną kauliuką. Kiek mažiausiai ėjimų reikia Pauliaus kauliukams sudėti teisingai?



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** To neįmanoma padaryti

9. Jokūbas surašė skaičius 1, 2, …, 9 į lentelę 3×3 (po skaičių į langelį). Tada jis apskaičiavo kiekvienos eilutės skaičių sumą ir kiekvieno stulpelio skaičių sumą. Penki iš šešių gautųjų skaičių didėjimo tvarka lygūs 12, 13, 15, 16 ir 17. Koks yra šeštasis Jokūbo gautas skaičius?



A) 17 **B)** 16 **C)** 15 **D)** 14 **E)** 13

10. Nojus iš eilės užrašė natūraliuosius skaičius: $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$, kiekvieną skaičių n parašydamas n kartų. Taip jis gavo 105 skaičių sąrašą. Kiek skaičių Nojaus sąraše dalijasi iš 3?

A) 4 **B)** 12 **C)** 21 **D)** 30 **E)** 45

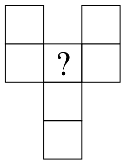
Klausimai po 4 taškus

11. Sudėties pavyzdyje skaitmenys buvo pakeisti raidėmis (vienodi skaitmenys – vienodomis raidėmis). Koks skaitmuo buvo pakeistas raide B?

$$\begin{array}{r} A\,B\,C \\ +\; C\,B\,A \\ \hline D\,D\,D\,D \end{array}$$

A) 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

12. Lėja nori surašyti skaičius 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 į pavaizduotą lentelę. Du gretimi skaičiai negali būti gretimuose langeliuose (langeliai gretimi, jei liečiasi kraštais arba kampais). Kokį skaičių ji gali įrašyti į klaustuku pažymėtą langelį?



A) Bet kurį **B)** Bet kurį nelyginį **C)** Bet kurį lyginį **D)** Tik skaičių 4 **E)** Tik 1 arba 7

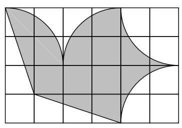
13. Albertas nori suskirstyti skaičius 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ir 10 į kelias grupes taip, kad kiekvienos grupės skaičių suma būtų tokia pati. Į kiek daugiausia grupių galima suskirstyti skaičius?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** Kitas atsakymas

14. Tiesėje iš kairės į dešinę pažymėta 11 taškų. Pirmojo taško atstumų iki likusių taškų suma lygi 2018. Antrojo taško atstumų iki likusių taškų (įskaitant pirmąjį) suma lygi 2000. Koks yra atstumas tarp pirmojo ir antrojo taškų?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

15. Karvelidės vėliavoje pavaizduoto „balandžio“ plotas yra 192 cm^2 (žr. pav.). „Balandžio“ kontūrą sudaro tiesių atkarpos ir apskritimų ketvirčiai, jungiantys kvadratinių langelių viršūnes. Kokie yra vėliavos matmenys?



A) 15 cm × 10 cm **B)** 18 cm × 12 cm **C)** 20 cm × 12 cm **D)** 24 cm × 16 cm **E)** 27 cm × 18 cm

16. Prie apskrito stalo sėdi 14 žmonių. Kiekvienas iš jų yra arba melagis, arba tiesuolis. Melagis visada meluoja, tiesuolis visada sako tiesą. Visi sėdintys prie stalo sako: „Abu mano kaimynai yra melagiai“. Kiek daugiausiai melagių gali sėdėti prie stalo?
A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 14

17. Ekspertai pateikė tokias futbolo rungtynių Madrido „Real“ – Mančesterio „United“ prognozes: 1) lygiųjų nebus; 2) „Real“ įmuš; 3) „Real“ laimės; 4) „Real“ nepralaimės; 5) bus įmušti lygiai 3 įvarčiai. Kokiu rezultatu baigėsi rungtynės „Real“ – „United“, jei pasitvirtino lygiai trys prognozės?
A) 3 : 0 **B)** 2 : 1 **C)** 1 : 2 **D)** 0 : 3 **E)** Ši situacija negalima

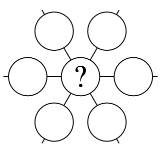
18. Julijos šuolių į tolį dienos rezultatų vidurkis buvo lygus 3,80 m. Julija šoko darsyk ir nušoko 3,99 m. Tada jos rezultatų vidurkis pakilo iki 3,81 m. Kiek Julija turi nušokti dar vienu šuoliu, kad vidurkis pakiltų iki 3,82 m?
A) 3,97 m **B)** 4,00 m **C)** 4,01 m **D)** 4,03 m **E)** 4,04 m

19. Robotė Rožė, gavusi skaičių sąrašą, apskaičiuoja bei užrašo jų sumą ir sandaugą. Kartą gavusi sveikųjų skaičių sąrašą, kuriame buvo ir skaičius 2018, Rožė abu kartus užrašė rezultatą 2018. Kiek skaičių galėjo būti sąraše, kurį gavo Rožė?
A) 2016 **B)** 2017 **C)** 2018 **D)** 2019 **E)** 2020

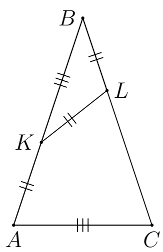
20. Penkiuose miestuose M, N, O, P ir Q prekiauja 40 pirklių. Vieną dieną kiekvienas pirklys išvyko iš savo miesto į vieną iš likusių keturių: 10 pirklių keliavo iš M arba į M, 10 pirklių – iš N arba į N, 10 pirklių – iš O arba į O, 10 pirklių – iš P arba į P. Kiek pirklių keliavo iš Q arba į Q?
A) 0 **B)** 10 **C)** 20 **D)** 30 **E)** 40

Klausimai po 5 taškus

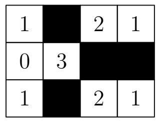
21. Andrius nori įrašyti skaičius 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9 į septynis skrituliukus taip, kad kiekvienoje iš trijų nužymėtų tiesių visų trijų joje esančių skaičių suma būtų ta pati. Kokia yra suma visų skaičių, kuriuos Andrius gali įrašyti vietoje klaustuko?
A) 3 **B)** 6 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 18



22. Lygiašonio trikampio ABC šoninėse kraštinėse AB ir BC atitinkamai pažymėti tokie taškai K ir L, kad $AK = KL = LB$ ir $KB = AC$. Kam lygus kampas ABC?
A) 30° **B)** 35° **C)** 36° **D)** 40° **E)** 44°

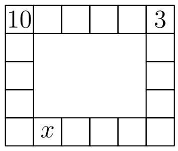


23. Kaskart Linui nubraižius stačiakampę languotą lentelę, Lina kai kuriuos lentelės langelius nudažo juodai, o kiekviename iš likusių langelių įrašo, kiek jis turi gretimų (su juo bendrą kraštinę turinčių) juodų langelių. Paveikslėlyje pateiktas tokios lentelės pavyzdys. Linas nubraižė lentelę, sudarytą iš 3×11 langelių. Kokia yra didžiausia galima suma skaičių, kuriuos joje gali įrašyti Lina?



A) 25 **B)** 30 **C)** 33 **D)** 52 **E)** 55

24. Zita nori į 5×6 lentelės kraštinius langelius įrašyti po skaičių, kad kiekvienas skaičius būtų lygus dviejų jam gretimų skaičių sumai. Du skaičiai jau įrašyti (žr. pav.). Kokį skaičių Zita turi įrašyti vietoj x? (Skaičiai gretimi, kai jų langeliai turi bendrą kraštinę.)

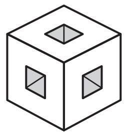


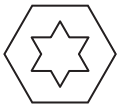
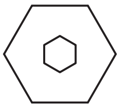
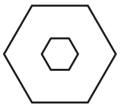
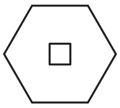
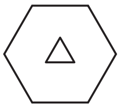
A) 7 **B)** 10 **C)** 13 **D)** -13 **E)** -3

25. Į 2×3 lentelės langelius reikia taip įrašyti po vieną iš skaičių 1, 2, 3, 4, 5, 6, kad visi skaičiai lentelėje būtų skirtingi ir kad kiekvienos eilutės skaičių suma bei kiekvieno stulpelio skaičių suma dalytųsi iš 3. Keliais būdais tai galima padaryti?

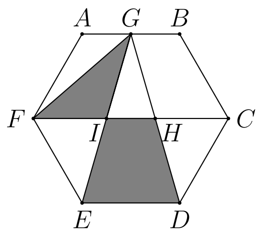
A) 36 **B)** 42 **C)** 45 **D)** 48 **E)** 54

26. Iš $3 \times 3 \times 3$ kubo išimti 7 iš 27 vienetinių kubelių. Paveikslėlyje pavaizduota, kaip dabar atrodo bet kurios trys gretimos kubo sienos. Kaip atrodo skylėtojo kubo sankirta su plokštuma, kuri eina per kubo centrą ir yra statmena vienai iš keturių kubo įstrižainių?



A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

27. Taškas G taisyklingojo šešiakampio $ABCDEF$ kraštinę AB dalija pusiau. Atkarpos GD and GE kerta atkarpą FC atitinkamai taškuose H ir I. Koks yra trikampio GIF ploto ir trapecijos $IHDE$ ploto santykis?

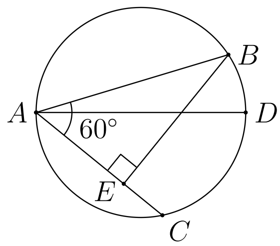


A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **E)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$

28. Klasėje mergaičių yra 40% daugiau nei berniukų. Tikimybė, kad atsitiktinai parinktoje šios klasės mokinių poroje bus berniukas ir mergaitė, lygi $\frac{1}{2}$. Kiek mokinių yra klasėje?

A) 20 **B)** 24 **C)** 36 **D)** 38 **E)** Ši situacija negalima

29. Skritulyje su skersmeniu AD nubrėžtos stygos AB ir AC, sudarančios 60° kampą (žr. pav.). Atkarpoje AC pažymėtas toks taškas E, kad $BE \perp AC$, $EC = 3$. Raskite stygos BD ilgį.



A) $\sqrt{3}$ **B)** 2 **C)** 3 **D)** $2\sqrt{3}$ **E)** $3\sqrt{2}$

30. Arkis Medas apskaičiavo $15! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 15$ ir sandaugos reikšmę užrašė lentoje. Pitas Goras du skaitmenis nutrynė, ir liko užrašas $1\blacksquare 0767436\blacksquare 000$. Kokie yra Arkio Medo skaičiaus antrasis ir dešimtasis skaitmenys?

A) 2 ir 0 **B)** 4 ir 8 **C)** 5 ir 6 **D)** 9 ir 2 **E)** 3 ir 8

Eksperto užduočių sprendimai

1. (D) 13

! Turinio vienetų skaitmuo lygus 3, o skirtumo vienetų skaitmuo yra 5, todėl atėminio vienetų skaitmuo yra lygus 8 (nes $13-8=5$). Tuomet lengvai surandame, kam lygus turinys: $25+28 = = 53$. Uždažytuose langeliuose įrašytų skaičių suma yra $5+8=13$.

Renkamės atsakymą **D**.

2. (E) Penktadienį

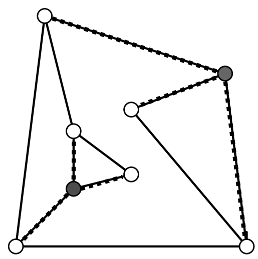
! Galima eiti atgal. Antradienį Ušis sugraužė 10-tą (žinoma, ir 9-tą) morką, pirmadienį – 8-tą morką, sekmadienį – 6-tą morką, šeštadienį – 4-tą morką, penktadienį – 2-ą ir 1-ą morkas.

!! Galima eiti ir pirmyn: ketvirtadienį Ušis sugraužė 13-tą ir 14-tą morkas. Kadangi per savaitę jis sugraužia $7\cdot 2 = 14$ morkų, tai ketvirtadienį buvo septinta morkų graužimo diena. Vadinasi, morkas Ušis pradėjo graužti penktadienį.

3. (D) 23

! Kokia tvarka Toras daužys uolas, nėra svarbu. O svarbu yra, kad suskilus bet kuriai uolai, vietoj vienos atsiranda penkios, todėl bendras uolų skaičius kaskart padidėja $5-1=4$. Po pirmojo smūgio uolų bus $7+4=11$, tada iš eilės $11+4=15$, $15+4=19$, $19+4=23$, $23+4=27, \ldots$ Matome, kad iš pateiktų atsakymų galimas lygiai vienas: 23. Tiek uolų galėjo rastis po bet kokių keturių Toro smūgių.

4. (B) 2



? Pamėginę „įjungti“ visas lemputes darydami kuo mažiau lietimų, randame, kad dvi paveikslėlyje užtušuotos lemputės uždegtų ir visas likusias lemputes. Renkamės atsakymą **B**.

! Lieka įrodyti, kad tikrai neįmanoma uždegti visų lempučių palietus tik vieną iš jų. Išties, jei būtų tokia lemputė, kurią palietus užsidegtų ir visos likusios, tai toji lemputė būtų sujungta su visomis kitomis. Tačiau matome, kad lempučių iš viso yra 8 ir kiekviena lemputė yra sujungta daugiausiai su 3 kitomis lemputėmis. Todėl nė viena iš jų negali uždegti septynių kitų lempučių. Teisingas atsakymas **B**.

5. (B) 6

? Obuolių, slyvų ir vyšnių skaičiai turi dalytis iš anūkų skaičiaus be liekanos, nes visos sodo gėrybės išdalytos anūkams po lygiai. Kadangi 42 nesidalija iš 10, o 60 nesidalija nei iš 14, nei iš 42, tai atsakymai **C**-**E** netinka. Iš likusių atsakymų 3 ir 6 galime rinktis didesnįjį, nes 42, 60 ir 90 iš 6 dalijasi (6 anūkai gavo po 7 obuolius, 10 slyvų ir 15 vyšnių).

Renkamės atsakymą **B**.

! Obuolių, slyvų ir vyšnių skaičiai turi dalytis iš anūkų skaičiaus be liekanos, nes visos sodo gėrybės išdalytos anūkams po lygiai. Kadangi skaičių $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ ir $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ didžiausiasis bendrasis daliklis yra $2 \cdot 3 = 6$, tai daugiau nei 6 anūkų seneliai negali turėti. Atsakymas 6 tenkina sąlygą: 6 anūkai galėjo gauti po 7 obuolius, 10 slyvų ir 15 vyšnių.

6. (A) 0

! Tarkime, kad skaičiai p_1 ir p_2 tenkina sąlygą. Svarbiausia atkreipti dėmesį į p_1 ir p_2 lyginumą. Jei šie pirminiai skaičiai abu nelyginiai, tai jų suma yra lyginis skaičius ir nelygi 1001. Todėl bent vienas iš skaičių p_1 ir p_2 lyginis. Tačiau vienintelis lyginis pirminis skaičius yra 2 (bet koks didesnis lyginis skaičius n turi tris skirtingus teigiamus daliklius 1, 2 ir n, todėl yra sudėtinis). Tada vienas iš skaičių p_1 ir p_2 turi būti lygus 2, o kitas turi būti lygus $1001 - 2 = 999$. Tačiau $999 = 9 \cdot 111$ yra sudėtinis skaičius. Gavome prieštarą. Vadinasi, skaičių p_1 ir p_2 porų, tenkinančių sąlygą, nėra.

7. (E) 32 EUR

? Laimos išlaidos daugiau nei 50%, t. y. daugiau nei pusantro karto didesnės nei Fortūnato. Pasakykime tą patį atbulai: Forūnato išlaidos yra mažiau nei du trečdaliai Laimos išlaidų. Todėl jei teisingas vienas iš atsakymų **A**-**D** ir Laima išleido ne daugiau nei 26 eurus, tai Fortūnatas išleido ne daugiau nei $\frac{2}{3} \cdot 26 < \frac{2}{3} \cdot 27 = 18$ (eurų). Dar kur kas mažiau išleido Moira: 15% yra daug mažiau nei trečdalis. Taigi ji išleido mažiau nei $18 : 3 = 6$ (eurus). Tada bendros išlaidos mažesnės nei $26 + 18 + 6 = 50$ (eurų), o tai prieštarauja sąlygai.

Renkamės atsakymą **E**.

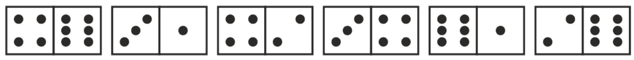
! Tiek Laimos, tiek Moiros išlaidos apibūdintos, remiantis Fortūnato išlaidomis, todėl būtent Fortūnato išlaidas ir pažymėkime x eurų. Tada Moiros išlaidos yra $\frac{15\%}{100\%} \cdot x = 0{,}15x$ (eurų), o Laimos – $x + \frac{60\%}{100\%} \cdot x = x + 0{,}6 = 1{,}6x$ (eurų). Bendra išlaidų suma (eurais) lygi $x + 0{,}15x + 1{,}6x = 2{,}75x = 55$. Tada Fortūnatas išleido $\frac{55}{2{,}75}$ eurų, o Laima – $1{,}6 \cdot \frac{55}{2{,}75}$ eurų.

Belieka atlikti skaičiavimus. Pastebėkime, kad $2{,}75 = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$. Todėl $\frac{55}{2{,}75} = 55 : \frac{11}{4} = 55 : 11 \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$ ir $1{,}6 \cdot \frac{55}{2{,}75} = 1{,}6 \cdot 20 = 1{,}6 \cdot 10 \cdot 2 = 16 \cdot 2 = 32$.

Vadinasi, Laima išleido 32 eurus (Fortūnatas – 20 eurų, Moira – 3 eurus).

8. (C) 3

? Uždavinį greitai išspręsti gali padėti įvairūs pastebėjimai.



Langelių su 4 ir su 6 akutėmis yra po tris, todėl po vieną langelį su 4 ir 6 akutėmis neturi poros ir turi likti iš krašto. Pradinėje padėtyje taip ir yra, todėl kraštinių kauliukų liesti neskubėkime.

Trečiasis (iš kairės) kauliukas 4-2 net neapsuktas puikiai tinka penktojo kauliuko 6-1 vietoje. Tai gali paskatinti juos sukeisti vietomis. Po šio ėjimo, atsisakius liesti kraštinius kauliukus ir jau teisingai sudėtus tris kauliukus dešinėje, gana lengva pastebėti, ką daryti su likusiais dviem kauliukais. Juos būtina sukeisti vietomis, o tada tereikia apsukti kauliuką 3-1 ir gausime teisingai sudėtus visus kauliukus.

Matome, kad pakako trijų ėjimų. Bet gal užtenka vieno ar dviejų? Kiek padėliojus kauliukus mintyse, galima jau ne aklai spėti, bet ir aiškiai nujausti, kad dviejų ėjimų neužteks.

Renkamės atsakymą **C**.

! Dalyje **?** nustatėme, po kiek akučių turi būti iš krašto. Toliau galime nustatyti ir tai, kurių kauliukų langeliai būtinai turi būti suglausti. Pavyzdžiui, yra tik du langeliai su 3 akutėmis (antrasis ir ketvirtasis kauliukai). Tie langeliai turi būti suglausti. Tą patį galima pasakyti ir apie du langelius, turinčius po 1 akutę. Taip gauname, kad antrasis kauliukas 3-1 privalo atsidurti tiksliai tarp ketvirtojo 3-4 ir penktojo 6-1. Tam reikės bent dviejų ėjimų, kai kauliukai apkeičiami vietomis. Tačiau, kad kauliukai 3-1 ir 3-4 būtų suglausti teisingai, reikės vieną iš jų ir apsukti.

Vadinasi, kauliukams teisingai sudėti reikia, bet kartu ir užtenka (kaip matėme **?** dalyje) trijų ėjimų.

9. (A) 17

! Atrodytų, kad reikia sugalvoti, kaip konkrečiai surašyti skaičius į lentelę. Bet uždavinį galima išspręsti kur kas greičiau. Visų lentelės skaičių suma lygi

$$1 + 2 + \ldots + 9 = (1 + 9) + (2 + 8) + (3 + 7) + (4 + 6) + 5 = 4 \cdot 10 + 5 = 45.$$

Šią sumą gausime, jei iš pradžių sudėsime skaičius kiekvienoje eilutėje, o tada sudėsime tris gautąsias sumas e_1, e_2, e_3. Tą patį galima pasakyti ir apie stulpelių skaičių sumas s_1, s_2, s_3. Todėl šešių Jokūbo gautųjų skaičių e_1, e_2, e_3, s_1, s_2, s_3 suma lygi $45+45 = 90$, o nežinomas Jokūbo skaičius lygus $90-12-13-15-16-17 = 17$.

Kad lentelę įmanoma užpildyti nurodytu būdu, parodyta paveikslėlyje.

1	2	9
4	7	5
8	6	3

10. (D) 30

! Išsiaiškinkime, kokiais skaičiais baigiasi Nojaus seka. Turime 1 vienetą, 2 dvejetus, 3 trejetus ir t. t. Todėl sekoje yra $1+2+3+4$ skaičių nuo 1 iki 4, $1+2+3+\ldots+10$ skaičių nuo 1 iki 10, ir pan. Iš eilės skaičiuodami tokių sumų reikšmes, greitai gausime, kad $1 + 2 + 3 + \ldots + 14 = 105$. Vadinasi, sekoje yra skaičiai nuo 1 iki 14, kiekvienas skaičius n užrašytas n kartų. Iš trijų dalijasi skaičiai 3, 6, 9, 12. Jų yra atitinkamai po 3, 6, 9 ir 12, todėl iš viso jų yra $3 + 6 + 9 + 12 = 30$.

!! Pastebėkime, kad jei Nojaus sekoje yra skaičius $n = 3k$, dalus iš 3, ir skaičiai $n-1$ ir $n+1$, pasikartojantys atitinkamai po $n-1$ ir $n+1$ kartų, tai šių skaičių iš viso yra $(n-1)+n+(n+1) = = 3n = 9k$, o iš 3 dalijasi lygiai trečdalis šių skaičių. Todėl sekoje iš eilės eina: 1 vienetas; 9 skaičiai (lygūs 2, 3 arba 4); 18 skaičių (lygių 5, 6 arba 7); 27 skaičiai (lygūs 8, 9 arba 10); 36 skaičiai (lygūs 11, 12 arba 13). Be vieneto jau turime $9+18+27+36 = 9\cdot(1+2+3+4) = 90$ skaičių, iš kurių dalūs iš 3 yra $90 : 3 = 30$. Dar sekoje yra $105-90-1 = 14$ skaičių, kurie turi būti lygūs po 13 iš eilės einančiam skaičiui 14. Vadinasi, gautieji 30 skaičių, dalūs iš 3, ir yra visi mums rūpintys skaičiai.

11. Ⓐ 0

? Sudedame du triženklius skaičius, kurių suma – keturženklis skaičius, todėl šios sumos tūkstančių skaitmuo tegali būti 1, $D = 1$. Žiūrime į vienetų skaitmenis: matome, kad arba $C + A = 1$, arba $C + A = 11$. Bet šimtų skaitmenų suma turi būti „pakankamai didelė“, todėl $A + C = C + A = 11$. Taigi skaitmenys B jau nieko nebegali „pridėti“ visai sumai, vadinasi, $B = 0$. Pabandome atspėti skaitmenis, kad gautume teisingą sudėties veiksmą, pavyzdžiui $A = 5$, $C = 6$. Gauname teisingą sudėties veiksmą ir įsitikiname, kad tikrai $B = 0$. Renkamės variantą **A**.

$$\begin{array}{r} A\,B\,C \\ +\; C\,B\,A \\ \hline 1\,1\,1\,1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\;0\;6 \\ +\;6\;0\;5 \\ \hline 1\;1\;1\;1 \end{array}$$

! Papildykime spėjimą iki griežto sprendimo. Abu sumos dėmenys yra ne didesni už 999, todėl jų suma yra ne didesnė už $999 + 999 = 1998$. Pirmasis tos sumos skaitmuo nelygus 0, todėl $D = 1$. $C + A$ negali būti 0, nes tada lyginis skaičius $B + B$ baigtųsi 1. Vadinasi, $C + A = 11$. Todėl $B + B$ baigiasi 0, t. y. $B = 0$ arba $B = 5$. Bet $B = 5$ negali būti, nes tada į šimtų sumą persikeltų 1, ir suma būtų 1211. Vadinasi, $B = 0$. Aišku, kad A ir C gali būti bet kurie skaitmenys, kurių suma 11 – tai 2 ir 9, 3 ir 8, 4 ir 7, 5 ir 6, 6 ir 5, 7 ir 4, 8 ir 3, 9 ir 2.

Teisingas atsakymas **A**.

!! Pirmąjį dėmenį galime užrašyti taip: $100\cdot A + 10\cdot B + C$, antrąjį taip: $100\cdot C + 10\cdot B + A$, o jų suma (kaip radome **!** dalyje) lygi 1111. Perrašome sudėties veiksmą:

$$100\cdot A+10\cdot B+C+100\cdot C+10\cdot B+A = 101\cdot A+20\cdot B+101\cdot C = 101\cdot(A+C)+20\cdot B = 1111.$$

Šią lygybę perrašome taip:

$$\begin{aligned} 20B &= 1111 - 101\cdot(A+C) \\ &= 101\cdot 11 - 101\cdot(A+C) \\ &= 101\cdot(11-(A+C)) \\ &= 101\cdot(11-(A+C)), \\ 20B : 101 &= 11-(A+C) \end{aligned}$$

Taigi $20B$ turi dalytis iš 101. Tačiau kai $B > 0$ taip būti negali, nes skaičiai 20 ir 101 bendrų daliklių neturi (tiesą sakant, 101 yra pirminis skaičius ir dalijasi tik iš 1 ir savęs paties), o B yra vienaženklis skaičius. Todėl lygybė gali būti teisinga tik tokiu atveju, kai $B = 0$. Tada ir $11-(A+C) = 0$, $11 = A + C$.

12. Ⓔ Tik 1 arba 7

•		•
•	4	•
	•	

? Tikrinkime atsakymą **D**, ir į pažymėtą langelį įrašykime 4, o gretimus jam langelius pažymėkime taškais (žr. 1 pav.). Tokių langelių yra penki, ir nė į vieną iš jų negalima įrašyti nei 3, nei 5. Lieka skaičiai 1, 2, 6, 7, jų tik keturi, vadinasi, jų neužtenka įrašyti į penkis langelius. Todėl skaičiaus 4 įrašyti į pažymėtą langelį negalima, ir atkrenta ne tik atsakymas **D**, bet ir **A** bei **C**.

Atkrenta ir atsakymas **B**, nes, pavyzdžiui, įrašius į pažymėtą langelį 3, jam gretimi galės būti tik skaičiai 1, 5, 6, 7, ir vėl jų per mažai.

Lieka atsakymas **E** – jį ir renkamės.

3		5
6	1	7
	4	
	2	

! Griežtas sprendimas būtų toks. Pasvarstykime, kokį skaičių galima įrašyti į pažymėtąjį langelį. Į jam gretimus penkis langelius reikia įrašyti penkis skaičius, kurie būtų negretimi tiek pažymėtajam, tiek vienas kitam (jei jie atsiduria gretimuose langeliuose). Todėl netinka skaičius 2 (jam negretimi tik keturi skaičiai 4, 5, 6, 7) netinka 3 (jam negretimi tik 1, 5, 6, 7), netinka 4 (jam negretimi tik 1, 2, 6,7), netinka 5 (negretimi 1, 2, 3, 7), netinka 6 (negretimi 1, 2, 3,4).

Liko ištirti skaičius 1 ir 7. Į pažymėtąjį langelį įrašome skaičių 1, Jis turi penkis negretimus (3, 4, 5, 6,7), bet tai dar visai nereiškia, kad visus skaičius galima surašyti į lentelę, kad jokie (!) du skaičiai nebūtų gretimi. Pasistenkime tai padaryti. Kadangi skaičius 2 gretimas įrašytajam 1, tai skaičių 2 privalu įrašyti į apatinį langelį. Tarp jų negalima įrašyti 3 (jis gretimas skaičiui 2), todėl bandykime rašyti 4. Skaičiui 4 gretimi 3 ir 5, todėl juos tenka rašyti viršuje. Dabar po penketu būtina rašyti 7, o po trejetu – 6 (žr. 2 pav.). Taigi skaičius 1 tinka įrašyti į pažymėtąjį langelį.

Dabar sudaryti lentelę skaičiui 7 paprasta: galime 2 pav. lentelėje kiekvieną skaičių pakeisti skaičiumi, papildančiu senąjį iki 8. Tada vietoje 1 bus $8 - 1 = 7$, vietoje 5 bus $8 - 5 = 3$ ir t.t., o negretimi skaičiai išliks negretimais.

13. Ⓑ 3

! Jeigu šiuos skaičius suskirstysime taip, kad kiekvienos grupės skaičių suma būtų tokia pati, tai visų skaičių suma dalysis iš grupių skaičiaus. Taip pat visų skaičių suma dalysis iš kiekvienos grupės skaičių sumos. Suskaičiuokime visų skaičių sumą: $2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 54$. Į kuo daugiau grupių padalinsime šiuos skaičius, tuo mažesnė bus vienos grupės skaičių suma. Tačiau taip pat galime pastebėti, kad grupės skaičių suma turi būti ne mažesnė nei 10 (nes skaičius 10 įeina į kurią nors grupę). Mažiausias skaičius, didesnis už 10, iš kurio dalijasi 54, yra 18: $54 : 18 = 3$. Taigi daugiau negu į 3 grupes skaičių suskirstyti neįmanoma.

Lieka įsitikinti, jog įmanoma suskirstyti skaičius į 3 grupes, kad kiekvienos grupės suma būtų 18. Išties, šios grupės galėtų būti tokios (tai ne vienintelis būdas suskirstyti skaičius į grupes): 8 ir 10; 2, 7 ir 9; 3, 4, 5 ir 6.

Teisingas atsakymas – **C**.

14. (B) 2

! Taškus iš kairės į dešinę pažymėkime $A_1, A_2, \ldots, A_{11}$. Taip pat pažymėkime $d = A_1A_2$. Kadangi taškas A_1 yra kairiausias, tai $A_1A_3 = A_1A_2 + A_2A_3 = A_2A_3 + d$. Analogiškai $A_1A_4 = A_2A_4 + d$, $A_1A_5 = A_2A_5 + d$, ir t. t. Tada

$$2018 = A_1A_2 + A_1A_3 + A_1A_4 + \ldots + A_1A_{11} =$$

$$= A_2A_1 + (A_2A_3 + d) + (A_2A_4 + d) + \ldots + (A_2A_{11} + d) =$$

$$= (A_2A_1 + A_2A_3 + A_2A_4 + \ldots + A_2A_{11}) + 9d = 2000 + 9d.$$

Vadinasi, $9d = 2018 - 2000 = 18$ ir $d = 18 : 9 = 2$.

!! Taškus iš kairės į dešinę pažymėkime $A_1, A_2, \ldots, A_{11}$. Taip pat pažymėkime $d = A_1A_2$. Tašką A_1 pastumkime į dešinę atstumu d, kad A_1 sutaptų su A_2. Kaip pakito atstumų sumos 2018 ir 2000? Taškas A_1 iki kiekvieno iš likusių 10 taškų priartėjo per d, todėl atstumų suma 2018 sumažėjo skaičiumi $10d$. Taško A_2 atstumas iki A_1 sumažėjo nuo d iki 0, o atstumai iki kitų taškų nepakito, todėl suma 2000 sumažėjo skaičiumi d. Kadangi taškai A_1 ir A_2 sutampa, tai ir atstumų nuo jų iki kitų taškų sumos sutampa: $2018 - 10d = 2000 - d$. Vadinasi, $9d = 2018 - 2000 = 18$ ir $d = 18 : 9 = 2$.

15. (D) 24 cm × 16 cm

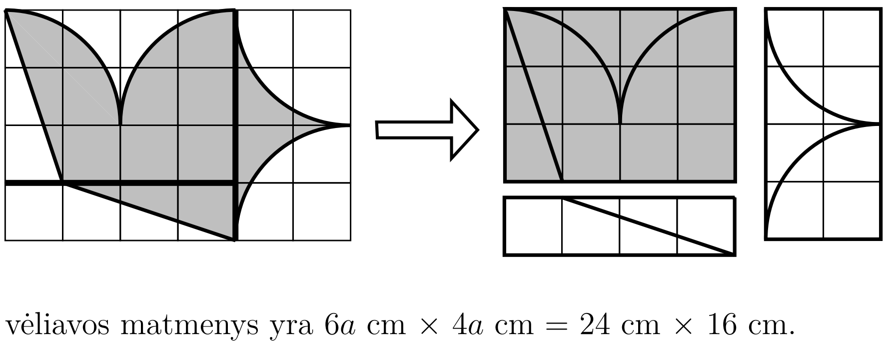
? Vėliavos ilgio ir pločio santykis yra $6 : 4 = 3 : 2$, todėl netinka atsakymas **C**. Vėliavos plotas turi būti didesnis nei „balandžio“, todėl netinka atsakymas **A**.

Jei teisingas atsakymas **B**, tai vėliavos plotas yra $18 \cdot 12 = 216$ (cm^2), o nenuspalvinta tėra $\frac{216-192}{216} = \frac{1}{9}$ vėliavos dalis. Tačiau iš $6 \cdot 4 = 24$ langelių, sudarančių vėliavą, trys (t. y. aštuntoji dalis) visai nenuspalvinti. Todėl akivaizdu, kad nenuspalvinta daugiau nei $\frac{1}{9}$ visos vėliavos.

Jei teisingas atsakymas **E**, tai vėliavos plotas yra $27 \cdot 18 = 486$ (cm^2), o nuspalvinta tėra $\frac{192}{486} = \frac{32}{81} < \frac{32}{80} = 0{,}4$ visos vėliavos. Vien pažvelgus į vėliavą, tai atrodo mažai tikėtina.

Renkamės atsakymą **D**.

! Vėliavą sudarančių langelių kraštinės ilgį pažymėkime a cm. Pastebėkime, kad „balandžio“ kraštą sudaro dvi lygios atkarpos ir keturi lygūs apskritimų ketvirčiai (priklausantys apskritimams su spinduliu $2a$ cm). Todėl „balandį“ padalijus į tris dalis arba nenuspalvintą vėliavos dalį padalijus į penkias dalis, kaip parodyta paveikslėlio kairėje, iš jų galima sudėti stačiakampius, pavaizduotus paveikslėlio dešinėje. Matome, kad „balandžio“ plotas 192 cm^2 lygus 12 iš 24 langelių plotui $12a^2$ cm^2. Todėl $a^2 = 192 : 12 = (120 + 72) : 12 = 10 + 6 = 16$ ir $a = 4$.



Vadinasi, vėliavos matmenys yra $6a$ cm × $4a$ cm = 24 cm × 16 cm.

16. (C) 9

? Galime pastebėti, kad niekur prie stalo vienas šalia kito nesėdės trys melagiai, nes tuomet vidurinis iš jų, sakydamas, kad abu jo kaimynai yra melagiai, sakytų tiesą, o taip būti negali, nes melagis visada meluoja. Taigi jei prie stalo greta sėdi du melagiai, tai jiems iš abiejų šonų turi sėdėti tiesuoliai. Kitaip tariant, bent kas trečias žmogus prie stalo turi būti tiesuolis:

M-M-T-M-M-T-M-M-T-M-M-T-M-M.

Visgi į paskutines dvi vietas negalime sodinti dviejų melagių, nes už apskrito stalo greta paskutinių dviejų melagių sėdės du pirmieji melagiai, ir taip būsime iš eilės susodinę net ne tris, o keturis melagius. Tam, kad perskirtume šią keturių melagių grupę, į paskutinę, 14-ąją vietą turime sodinti ne melagį, o tiesuolį:

M-M-T-M-M-T-M-M-T-M-M-T-M-T.

Taigi prie stalo gali sėdėti 9 melagiai. Renkamės atsakymą **C**.

! Kodėl aukščiau esantį sprendimą pažymėjome klaustuku, o ne šauktuku? Galbūt įmanoma kaip nors kitaip susodinti tiesuolius ir melagius taip, kad dar daugiau melagių tilptų prie stalo?

Tikrai žinome, kad:

1. Iš eilės vienas šalia kito gali sėdėti daugiausia 2 melagiai.
2. Jokie du tiesuoliai negali sėdėti vienas šalia kito (nes kiekvienas tiesuolis kalba tiesą sakydamas „abu mano kaimynai yra melagiai“).

Taigi visi melagiai sėdės prie stalo arba po vieną, arba poromis, o visi tiesuoliai sėdės po vieną. Jei prie stalo sėdėtų 4 tiesuoliai, tai tie tiesuoliai „padalintų“ tarp jų sėdinčius 10 melagių į 4 grupes (jei būtų dar mažiau tiesuolių, jie padalintų melagius į dar mažiau grupių). Bet 4-iose melagių grupėse pagal 1 taisyklę iš viso būtų ne daugiau nei $4 \cdot 2 = 8$ melagiai. Vadinasi, prie stalo būtinai turi sėdėti bent 5 tiesuoliai. Taigi teisingas atsakymas – **C**.

17. (C) 1 : 2

? Tikrinkime atsakymus **A**-**D**. Jei jie teisingi, tai iš penkių prognozių 1, 2, 3, 4 ir 5 pasitvirtino prognozės: **A)** 1, 2, 3, 4, 5; **B)** 1, 2, 3, 4, 5; **C)** 1, 2, 5; **D)** 1, 5. Lygiai trys prognozės pasitvirtino, jei teisingas atsakymas **C**. Jei rungtynių rezultatas yra 1 : 2, tai sąlyga tenkinama.

Renkamės atsakymą **C**.

! Jei „Real“ laimėjo, tai pasitvirtino pirmosios keturios prognozės. Jei rungtynės baigėsi lygiosiomis, tai net trys – pirmoji, trečioji ir penktoji – prognozės nepasitvirtino (lygiosios reiškia, kad niekas nelaimėjo ir kad įmušta lyginis skaičius įvarčių).

Vadinasi, „Real“ pralaimėjo. Tada trečioji bei ketvirtoji prognozės nepasitvirtino, o likusios trys prognozės turėjo pasitvirtinti: „Real“ įmušė bent vieną įvartį iš lygiai trijų įmuštųjų. Kadangi „Real“ pralaimėjo, tai įmušė mažiau nei pusę įvarčių – lygiai vieną, o „United“ įmušė įvartį $3 - 1 = 2$ kartus.

Gautasis rungtynių rezultatas 1 : 2 tenkina sąlygą.

18. Ⓒ 4,01 m

! Tarkime, kad Julijos rezultatų vidurkis buvo 3,8 m, jai atlikus n šuolių. Jei Julijos rezultatų suma tuo metu buvo s_0 m, tai $3{,}8 = \frac{s_0}{n}$ ir $s_0 = 3{,}8n$. Analogiškai rezultatų suma po $(n+1)$-ojo šuolio lygi $s_1 = 3{,}81(n+1)$ (m), o po $(n+2)$-ojo šuolio turi būti lygi $s_2 = 3{,}82(n+2)$ (m). Kita vertus, $s_1 = s_0 + 3{,}99$, todėl

$$3{,}81(n+1) = 3{,}8n + 3{,}99 = 3{,}8n + 3{,}8 + 0{,}19 = 3{,}8(n+1) + 0{,}19,$$

$$0{,}19 = 3{,}81(n+1) - 3{,}8(n+1) = 0{,}01(n+1),$$
$$n+1 = 0{,}19 : 0{,}01 = 19.$$

Jei dar vienu šuoliu Julija turi nušokti x m, tai $s_2 = s_1 + x$ ir

$$3{,}81 \cdot 19 + x = 3{,}82 \cdot 20 = 3{,}81 \cdot 20 + 0{,}01 \cdot 20 = 3{,}81 \cdot 20 + 0{,}2,$$

$$x = 3{,}81 \cdot 20 + 0{,}2 - 3{,}81 \cdot 19 = 3{,}81 + 0{,}2 = 4{,}01 \text{ (m)}.$$

!! Tarkime, kad Julijos rezultatų vidurkis buvo 3,8 m, jai atlikus n šuolių. Jei Julijos rezultatų suma tuo metu buvo s m, tai $3{,}8 = \frac{s}{n}$ ir $s = 3{,}8n$. Rezultatų suma tokia, lyg kiekvienu šuoliu Julija būtų nušokusi po 3,8 m. Analogiškai, kai Julija nušoko dar 3,99 m, jos rezultatų suma tapo tokia, lyg ji būtų nušokusi $n+1$ kartų po 3,81 m. Vadinasi, Julijos 3,99 m šuolis padidino s tiek, kiek būtų padidinęs 3,8 m šuolis ir tada visų rezultatų padidinimas 0,01 m. Tam prireikė $3{,}99 - 3{,}8 = 0{,}19$ (m) perviršio. Analogiškai, $(n+2)$-uoju šuoliu Julija turi nušokti bent 3,81 m ir viršyti šį atstumą tiek, kad tai prilygtų kiekvieno iš $n+2$ atstumų pailginimui 0,01 m. Jei prieš tai Julijai prireikė 0,19 m perviršio, tai dabar, kadangi jau yra vienu rezultatu daugiau, jai reikalingas $0{,}19+0{,}01 = 0{,}2$ (m) perviršis. Vadinasi, ji turi nušokti $3{,}81+0{,}2 = 4{,}01$ (m).

19. Ⓑ 2017

! Jei sąrašą sudarė $n+1$ skaičius $2018, x_1, x_2, \ldots, x_n$, tai

$$2018 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 2018 \quad \text{ir} \quad 2018 x_1 x_2 \ldots x_n = 2018.$$

Tada $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ ir $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$. Sveikųjų skaičių $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sandauga lygi 1, tik jei kiekvienas iš jų lygus 1 arba -1. Jei lygiai k skaičių lygūs -1, tai

$$0 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k \cdot (-1) + (n-k) \cdot 1 = n - 2k$$

ir

$$1 = x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^k \cdot 1^{n-k} = (-1)^k.$$

Tada $n = 2k$, o skaičius k lyginis. Vadinasi, n dalijasi iš 4, o sąrašo skaičių kiekis $n+1$ dalijasi iš 4 su liekana 1. Iš pateiktų atsakymų toks yra tik skaičius $2017 = 2016 + 1 = 4 \cdot 504 + 1$. Jis tinka, nes sąrašas, sudarytas iš 1008 skaičių 1, 1008 skaičių -1 ir skaičiaus 2018, tenkina sąlygą.

20. (E) 40

? Norint pasirinkti teisingą atsakymą, čia nebūtina išmąstyti, kodėl atsakymas turi būti toks ir tik toks. Pakanka pastebėti, kad pagal uždavinio sąlygą galima tokia situacija: po 10 pirklių iš miestų M, N, O, P visi keliauja į Q. Todėl turi tikti atsakymas, kad iš Q arba į Q keliauja visi 40 pirklių.

Renkamės atsakymą **E**.

! Kiekvienam pirkliui priskirkime du miestus – kur ir iš kur jis keliauja. Taip gauname $40 \cdot 2 = 80$ miestų sąrašą, kuriame miestai M, N, O ir P pasikartoja po 10 kartų. Tada likęs miestas Q pasikartoja $80 - 4 \cdot 10 = 40$ kartų. Kadangi joks pirklys nekeliauja iš Q į Q, tai iš Q arba į Q keliauja visi 40 pirklių.

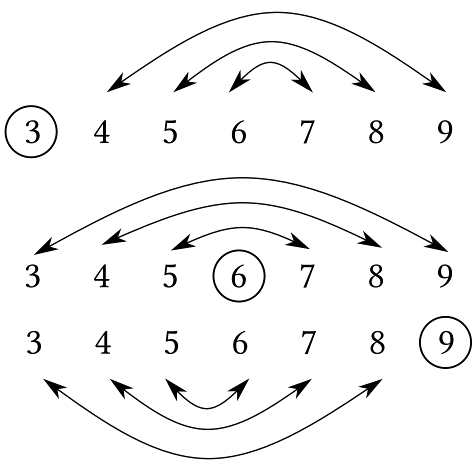
21. (E) 18

! Į vidurinį skrituliuką įrašytas skaičius atsidurs visose trijose sumose. Šį skaičių pažymėkime K. Jeigu sudėtume visų trijų tiesių skaičių sumas, tai šioje „sumų sumoje“ vidurinio skrituliuko skaičius K pasirodytų 3 kartus, o kiekvieno likusio skrituliuko skaičius pasirodytų po vieną kartą. Kitaip tariant, ši „sumų suma“ būtų lygi skaičių 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9 sumai, prie jos dar du kartus pridėjus vidurinio skrituliuko skaičių, t. y. būtų lygi

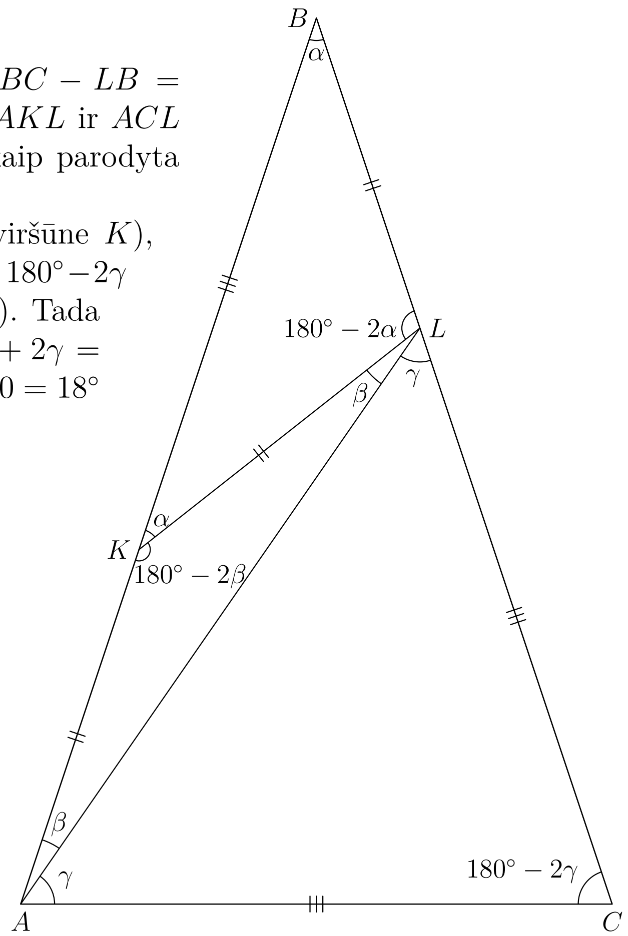
$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + K + K = 42 + 2 \cdot K.$$

Kita vertus, ši „sumų suma“ yra trigubai didesnė už vienos tiesės skaičių sumą, todėl ji būtinai turi dalytis iš 3. Kokius skaičius galime imti vietoje K, kad suma $42 + 2K$ dalytųsi iš 3? Jei $K = 3$, tai $42 + 2K = 45 + 2 \cdot 3 = 51$, dalijasi iš trijų. Jei $K = 4$, tai $42 + 2K = 45 + 2 \cdot 4 = 53$, nesidalija iš trijų. Jei $K = 5$, ši suma lygi 55, ir panašiu būdu perrinkę visus skaičius nuo 3 iki 9 randame, kad vietoje K tinka tik skaičiai 3, 6 ir 9 (vikresnė sprendėja galėjo ir neperrinkdama skaičių pastebėti, kad kadangi skaičius 42 dalijasi iš 3, tai ir suma $42 + 2K$ dalysis iš trijų tik tada, kai K irgi dalysis iš trijų, t. y. kai K bus vienas iš skaičių 3, 6 arba 9).

Lieka įsitikinti, kad tikrai įmanoma užpildyti visus skrituliukus skaičiais Andriaus norimu būdu, jei į vidurinį skrituliuką rašysime 3, 6 arba 9. Tarkime, kad į vidurį rašome 3. Kadangi vidurinis skaičius visoms tiesėms tas pats, užtenka likusius šešis skaičius padalinti į tris poras, kurių sumos lygios: 4 ir 9, 5 ir 8, 6 ir 7. Panašiai samprotaujame, kai į vidurinį skrituliuką įrašome 6 arba 9; grafiškai tai pavaizduota paveikslėlyje apačioje: apskritimu apvestą skaičių rašysime į vidurinį skrituliuką, o rodyklėmis sujungtus skaičius – į priešingus kraštinius tos pačios tiesės skrituliukus. Taigi ir 3, ir 6, ir 9 tikrai galima rašyti į vidurinį skrituliuką. O jų visų suma yra $3 + 6 + 9 = 18$. Teisingas atsakymas – **E**.



22. (C) 36°



! Kadangi $BA = BC$ ir $AK = LB$, tai $CL = BC - LB = BA - AK = KB = AC$. Trikampiai BKL, AKL ir ACL lygiašoniai, todėl jų kampus galima pažymėti, kaip parodyta paveikslėlyje.

Gauname, kad $\alpha = 2\beta$ (pagal kampus su viršūne K), $2\alpha = \beta + \gamma$ (pagal kampus su viršūne L) ir $\beta + \gamma = 180° - 2\gamma$ (lygiašonio trikampio ABC kampai prie pagrindo). Tada $\gamma = 2\alpha - \beta = 2 \cdot 2\beta - \beta = 3\beta$ ir $180° = \beta + \gamma + 2\gamma = \beta + 3\gamma = \beta + 3 \cdot 3\beta = 10\beta$. Vadinasi, $\beta = 180° : 10 = 18°$ ir $\angle ABC = \alpha = 2\beta = 36°$.

!! Pažymėkime $\alpha = \angle ABC$. Lygiašoniame trikampyje BKL turime $\angle BLK = 180° - \angle KBL - \angle BKL = 180° - 2\angle KBL = 180° - 2\alpha$. Tada $\angle KLC = 180° - \angle BLK = 2\alpha$.

Kadangi $BA = BC$ ir $AK = LB$, tai $CL = BC - LB = BA - AK = KB = AC$. Tada trikampiai ACK ir LCK lygūs pagal tris kraštines ir $\angle CAK = \angle CLK = 2\alpha$. Lygiašonio trikampio ABC kampai yra $\alpha, 2\alpha$, 2α, o jų suma lygi $5\alpha = 180°$. Vadinasi, $\alpha = 180° : 5 = 36°$.

23. (D) 52

! Skaičius bet kuriame baltame langelyje parodo, kelios jo kraštinės yra kartu ir juodų langelių kraštinės. Kiekviena tokia kraštinė priklauso lygiai vienam baltam langeliui, todėl visų lentelės skaičių suma parodo, kiek iš viso yra langelių kraštinių, ties kuriomis ribojasi baltas ir juodas langeliai.

Tai suvokus, uždavinys tampa lengvas. Tokių kraštinių bus daugiausiai, kai apskritai bet kuriai kraštinei, ties kuria ribojasi kokie nors du langeliai, tie du langeliai bus baltas ir juodas, t. y. kai lentelė bus nudažyta šachmatų lentos tvarka (bet kurie du gretimi langeliai skirtingų spalvų).

Kraštinių, ties kuriomis ribojasi du langeliai, 3×11 lentelėje yra dvi horizontalios eilės po 11 kraštinių ir 10 vertikalių eilių po 3 kraštines (dvi horizontalios linijos dalija lentelę į tris eilutes, o 10 vertikalių linijų – į 11 stulpelių; kiekvieną liniją sudaro langelių kraštinės). Todėl didžiausia galima lentelės skaičių suma lygi $2 \cdot 11 + 10 \cdot 3 = 52$.

24. (A) 7

! Tarkime, kad langeliuose iš eilės ratu įrašyti skaičiai a, b, c, d. Tada $b = a + c$, $c = b + d$, todėl $c = b - a$, $d = c - b = -a$. T. y. bet kuriuose langeliuose, kuriuos einant ratu skiria du langeliai, skaičiai a ir d turi būti priešingi. Tada kas šeštame langelyje įrašytas tas pats skaičius. Todėl $y = 10$, $z = 3$ (žr. pav.). Kadangi $y = x + z$, tai $x = y - z = 7$.

10					3
	x	y	z		

(Beje, langelius įmanoma užpildyti vieninteliu būdu: 6 skaičiai 3, 10, 7, -3, -10, -7 iš eilės ratu užrašomi tris kartus.)

25. (D) 48

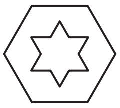
? Kadangi skaičiai 1 ir 4, 2 ir 5, 3 ir 6 dalijasi iš 3 su ta pačia liekana, tai kiekvienos poros skaičius lentelėje, tenkinančioje sąlygą, galima sukeisti vietomis ir vėl gauti tinkamą lentelę. Turint tinkamą lentelę ir taip kaitaliojant joje skaičius, galima gauti $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ skirtingas lenteles (įskaitant pradinę). Tokiu būdu visų tinkamų lentelių aibę galima išskaidyti į grupes po 8 lenteles. Vadinasi, tinkamų lentelių skaičius dalijasi iš 8. Yra tik vienas toks atsakymas 48.

Renkamės atsakymą **D**.

! Stulpelyje skaičius 3 tegali būti su skaičiumi 6, o kiekvienas iš skaičių 1 ir 4 – su vienu iš skaičių 2 ir 5. Todėl stulpeliuose galime turėti tik tokias skaičių poras: 1) 3 ir 6, 1 ir 2, 4 ir 5; 2) 3 ir 6, 1 ir 5, 2 ir 4. Belieka pasirūpinti eilutėmis. Bet kuriuo iš dviejų atvejų (2 galimybės) bet kaip paskirstykime stulpelius trims skaičių poroms ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ galimybės), o tada porą 3 ir 6 bei porą, kurioje yra 1, išdėstykime jų stulpeliuose bet kaip ($2 \cdot 2 = 4$ galimybės). Eilutėje, kur yra 1, pirmuoju atveju turėsime įrašyti 5, o antruoju – 2. Tada toje eilutėje skaičių suma dalysis iš 3, o kitos eilutės likusiame tuščiame langelyje įrašius likusį skaičių 4, jos skaičių suma taip pat dalysis iš 3. Gauname $2 \cdot 6 \cdot 4 = 48$ būdus, kaip užpildyti lentelę.

!! Kadangi $4 = 1 + 3$, $5 = 2 + 3$, $6 = 3 + 3$, tai lentelėje, tenkinančioje sąlygą, pakeitus skaičių 4 skaičiumi 1, skaičių 5 skaičiumi 2, skaičių 6 skaičiumi 3, lentelės eilučių ir stulpelių skaičių sumų dalumas iš 3 nesikeičia. Todėl vietoj duotųjų skaičių 1, 2, 3, 4, 5, 6 į lentelę rašykime skaičius 1, 1, 2, 2, 3, 3. Viename stulpelyje gali būti skaičiai 1 ir 2 arba 3 ir 3, o vienoje eilutėje – skaičiai 1, 2, 3. Pirmoje eilutėje galime bet kaip surašyti skaičius 1, 2, 3 ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ galimybės), o tada po skaičiumi 1 turime rašyti skaičių 2, po skaičiumi 2 – skaičių 1, po skaičiumi 3 – skaičių 3. Tada eilučių ir stulpelių sumos bus tinkamos. Kiekvieną tokią lentelę atitinkančias lenteles, tenkinančias pradinę sąlygą, gausime vieną iš skaičių 1 pakeitę skaičiumi 4, vieną iš skaičių 2 – skaičiumi 5, vieną iš skaičių 3 – skaičiumi 6. Turime $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ galimybes.

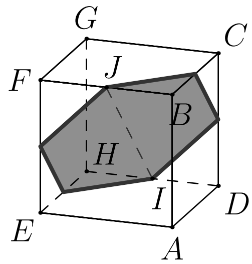
Iš viso gavome $6 \cdot 8 = 48$ lenteles.

26. (A) 

? Iš 6 kubo sienų išimta po kubelį, todėl likęs 7-asis išimtas kubelis turi būti vidinis. Atsakymuose matome, kad plokštumos ir kubo sankirta yra taisyklingasis šešiakampis. Kubo centras buvo ir išimtojo vidinio kubelio centras, o įstrižainėje, kuriai statmena plokštuma, buvo ir atitinkama vidinio kubelio įstrižainė. Vadinasi, plokštumos sankirta su vidiniu kubeliu, prieš jį išimant, turėjo būti tokia pati, kaip ir sankirta su didžiuoju kubu, tik 3 kartus mažesnė. T. y. tokia, kokią matome atsakyme **C**.

Plokštumos sankirta su kubo ertme yra plokštumos sankirta su 7 išimtais kubeliais, prieš juos išimant. Todėl šią sankirtą sudaro atsakyme **C** matomas šešiakampėlis, papildytas plokštumos sankirtomis su 6 kubeliais. Jei su jais plokštuma nesikirstų, turėtume rinktis atsakymą **C**. Bet ji su jais kertasi. Galima nuspėti, kad šešiakampio ar šešiakampėlio šešios kraštinės yra plokštumos sankirtos su kiekviena iš šešių kubo ar vidinio kubelio sienų. Bet jei plokštuma kirto visas vidinio kubelio sienas, tai ji kirto ir kitų šešių išimtųjų kubelių sienas, sutapusias su vidinio kubelio sienomis. Todėl ji turėjo kirsti ir pačius kubelius. Visa tai suvokus, natūralu pasirinkti atsakymą **A**, kuriame taisyklingasis šešiakampėlis iš **C** papildytas 6 trikampiais.

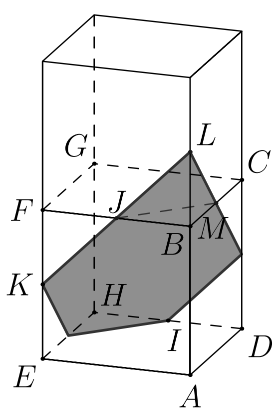
! Iš didžiojo kubo išimtas vidinis kubelis ir 6 kubeliai, turintys su vidiniu kubeliu bendrą sieną. Nagrinėjama plokštuma α ėjo ir per vidinio kubelio, prieš jį išimant, centrą bei buvo statmena vienai jo įstrižainei (žr. **?** dalį).



Vidinio kubelio viršūnes pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje. Tarkime, kad α statmena įstrižainei AG. Kubelio centras dėl simetrijos yra ir įstrižainės AG vidurio taškas, ir atkarpos IJ, jungiančios kubelio briaunų vidurio taškus, vidurio taškas.

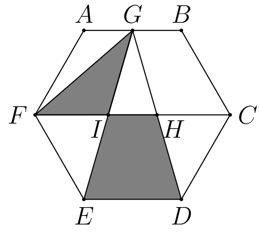
Kubelio sienos $ABCD$ įstrižainės statmenos, todėl įstrižainė BD statmena plokštumai β, einančiai per taškus A, C, E, G. Vienu metu ir vienodais greičiais slinkime taškus B ir D atitinkamai atkarpomis BF ir DH: taškus I ir J pasieksime vienu metu, o BD kryptis nepasikeis. Todėl atkarpa IJ taip pat statmena plokštumai β. Vadinasi, atkarpa IJ yra statmena plokštumoje β esančiai įstrižainei AG. Be to, ji eina per kubelio centrą, todėl priklauso plokštumai α. Analogiškai galima paaiškinti, kodėl kubelio briaunų BC, CD, HE, EF vidurio taškai priklauso α. Tada ir paveikslėlyje pavaizduotas šešiakampis, jungiantis briaunų vidurio taškus, priklauso α, o jo kraštinės ir yra plokštumos α sankirtos su kubelio sienomis.

Paveikslėlį papildykime bet kuriuo iš kitų 6 išimtųjų kubelių. Kadangi plokštumai α priklauso atkarpa KJ, tai priklauso visa tiesė ir jos dalis JL. Dėl simetrijos ir taškas L turi būti kubelio briaunos vidurio taškas. Matome, kad viršutinio kubelio sankirta su α yra trikampis JLM, jungiantis to kubelio briaunų vidurio taškus. Kadangi visos kubelių sienos vienodos, tai ir visos atkarpos, jungiančios jų kraštinių vidurio taškus, yra lygios. Tada trikampis JLM yra lygiakraštis, $\angle KJM = 180° - 60° = 120°$. Analogiškai visi šešiakampio kampai lygūs 120°, o kadangi ir jo kraštinės lygios, tai jis taisyklingasis.



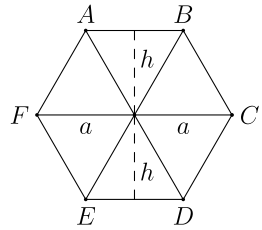
Vadinasi, plokštumos α sankirtą su didžiojo kubo ertme sudaro taisyklingasis šešiakampis ir šeši lygiakraščiai trikampiai, turintys po bendrą kraštinę su šešiakampiu. Gauname žvaigždės pavidalo sankirtą, kurią matome atsakyme **A**.

27. (**A**) $\frac{1}{2}$



? Šešiakampio kraštinės ilgį pažymėkime a.

Brėžinyje lengva pastebėti, kad įstrižainė FC yra lygiagreti su kraštinėmis AB ir ED bei nutolusi nuo kiekvienos iš jų tuo pačiu atstumu h. Todėl trikampio GIF ir trapecijos $IHDE$ aukštinių ilgiai yra h, o jų plotai lygūs atitinkamai $S_1 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot FI$ ir $S_2 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (IH + ED)$. Gauname $S_1 : S_2 = FI : (IH + ED)$.



Kadangi atkarpa IH eina per vidurį tarp taško G ir atkarpos ED, tai ji turėtų būti trikampio EGD vidurio linija. Vadinasi, $IH = \frac{a}{2}$. Sunkiau pastebėti, kad taisyklingąjį šešiakampį galima padalyti į 6 lygius lygiakraščius trikampius, kurių kraštinių ilgis yra a, ir kad todėl $FC = 2a$ (žr. pav.). Kadangi atkarpos FI ir HC lygios (dėl regimos brėžinio simetrijos), tai $2a = FC = FI + IH + HC = FI + \frac{a}{2} + FI$ ir $FI = (2a - \frac{a}{2}) : 2 = \frac{3a}{4}$.

Vadinasi, $S_1 : S_2 = FI : (IH + ED) = \frac{3a}{4} : (\frac{a}{2} + a) = \frac{3a}{4} : \frac{3a}{2} = \frac{1}{2}$.

! Šešiakampio kraštinės ilgį pažymėkime a.

Kiekvienas taisyklingasis daugiakampis turi centrą. Tiksliau, apibrėžtinio apskritimo centrą, kurį sujungus su daugiakampio viršūnėmis daugiakampis padalijamas į lygius lygiašonius trikampius. Taisyklingojo šešiakampio atveju tie lygiašoniai trikampiai turi po $360° : 6 = 60°$ kampą, jų kampai prie pagrindo lygūs $(180° - 60°) : 2 = 60°$. Todėl tie trikampiai lygiakraščiai, jų kraštinių ilgis yra a. Kiekvieno iš jų aukštinės ilgį pažymėkime h.

Tai pastebėjus, lengva įsitikinti, kad: 1) šešiakampis turi šešias simetijos ašis ir kad dėl vienos iš simetrijų trikampiai GIF ir GHC lygūs; 2) įstrižainę FC sudaro dvi lygiakraščių trikampių kraštinės ir kad todėl $FC = 2a$; 3) atstumai nuo taško G iki atkarpų FC ir ED atitinkamai lygūs h ir $2h$.

Nagrinėkime trikampius FGC ir EGD. Jų pagrindų ilgiai atitinkamai lygūs $FC = 2a$ ir $ED = a$, o aukštinių, nuleistų į tuos pagrindus, ilgiai atitinkamai lygūs h ir $2h$. Todėl šių trikampių plotai lygūs: $\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2h$. Plotai lygūs ir be bendros šių trikampių dalies (trikampio IGH): lygių trikampių GIF ir GHC plotų suma lygi trapecijos $IHDE$ plotui. Vadinasi, trikampio GIF plotas lygus pusei trapecijos $IHDE$ ploto. Ieškomas plotų santykis lygus $\frac{1}{2}$.

28. (**C**) 36

? Berniukų, mergaičių ir bendrą vaikų skaičių klasėje pažymėkime atitinkamai b, m ir s. Tada $m = b + \frac{40\%}{100\%} b = 1{,}4b$ ir $s = m + b = 2{,}4b = \frac{24b}{10} = \frac{12b}{5}$. Kadangi $5s = 12b$, tai s dalijasi iš 12. Tada teisingas gali būti tik atsakymas **B**, **C** arba **E**.

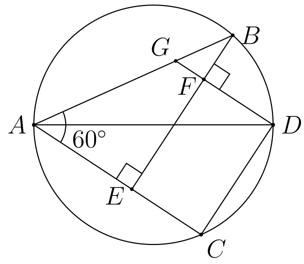
Jei $s = 36$, tai $b = 5s : 12 = 15$ ir $m = 36 - 15 = 21$. Mokinių porą galima parinkti iš viso $C_{36}^2 = \frac{36 \cdot 35}{2} = 18 \cdot 35$ būdų, o berniuko ir mergaitės porą – $15 \cdot 21$ būdų. Tikimybė, kad klasės mokinių atsitiktinėje poroje yra berniukas ir mergaitė, lygi $\frac{15 \cdot 21}{18 \cdot 35} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{2}$. Be to, mergaičių yra $6 = 15 \cdot 0{,}4$ daugiau, t. y. 40% daugiau, nei berniukų. Vadinasi, uždavinio situacija galima, kai $s = 36$.

Renkamės atsakymą **C**.

! Berniukų, mergaičių ir bendrą vaikų skaičių klasėje pažymėkime atitinkamai b, m ir s. Tada $m = b + \frac{40\%}{100\%}b = 1{,}4b$ ir $s = m + b = 2{,}4b = \frac{24b}{10} = \frac{12b}{5}$. Gauname, kad $b = \frac{5b}{12}$ ir $m = s - b = \frac{7s}{12}$.

Mokinių porą galima parinkti iš viso $C_s^2 = \frac{s(s-1)}{2}$ būdų, o berniuko ir mergaitės porą – $b \cdot m$ būdų. Tikimybė, kad klasės mokinių atsitiktinėje poroje yra berniukas ir mergaitė, lygi $\frac{1}{2} = bm : \frac{s(s-1)}{2}$. Todėl $s(s-1) = 4mb = 4 \cdot \frac{5s}{12} \cdot \frac{7s}{12} = \frac{4\cdot(5\cdot7)\cdot s^2}{12\cdot12} = \frac{35s^2}{3\cdot12} = \frac{35s^2}{36}$ ir $s - 1 = \frac{35s}{36}$. Vadinasi, $1 = s - \frac{35s}{36} = \frac{s}{36}$ ir $s = 36$. Kad ši reikšmė yra galima, jau patikrinome **?** dalyje.

29. (D) $2\sqrt{3}$



! Išveskime statmenį iš taško D į atkarpą BE ir pažymėkime jo taškus, kaip parodyta paveikslėlyje.

Kadangi AD yra skersmuo, tai $\angle ABD = \angle ACD = 90°$. Atkarpos BE ir DC statmenos stygai AC, todėl jos lygiagrečios, o keturkampis $CDBE$ yra stačioji trapecija. Atstumas tarp jos pagrindų (aukštinė) lygus $DF = CE = 3$. Kadangi $DG \perp BE$ ir $AC \perp BE$, tai $DG || AC$. Todėl $\angle BGD = \angle BAC = 60°$ (atitinkamieji kampai). Kadangi trikampis BDG statusis, tai $\angle BDF = \angle BDG = 90° - \angle BGD = 30°$. Tada stačiajame trikampyje BDF turime $BD = DF : \cos 30° = 3 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

30. (E) 3 ir 8

? Sandaugoje $15! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 15$ yra 3 dauginamieji, dalūs iš 5, ir nė vienas nesidalija iš 5^2, todėl sandauga dalijasi iš 5^3, bet ne iš 5^4. Tuo labiau ji nesidalija iš 10^4 ir negali baigtis keturiais nuliais. Dėl to netinka atsakymas **A**.

Skaičius 15! dalijasi iš 9, todėl jo skaitmenų suma taip pat dalijasi iš 9. Dėl to netinka atsakymas **B**.

Skaičius

$$15! = 1\blacksquare0767436\blacksquare000 = 1\blacksquare0767436\blacksquare \cdot 2^3 \cdot 5^3$$

dalijasi iš $4 \cdot 8 = 2^5$, todėl $1\blacksquare0767436\blacksquare = 1\blacksquare076743 \cdot 100 + 6\blacksquare$ dalijasi iš $2^2 = 4$. Tada iš 4 dalijasi ir $6\blacksquare$. Dėl to netinka atsakymai **C** ir **D**.

Renkamės atsakymą **E**.

! Pažymėkime ieškomus skaitmenis x ir y. Pažymėkime

$$a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 12 \cdot 10, \qquad b = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 42 \cdot 72 \cdot 10,$$

$$c = 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 = 11 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 5 = 66 \cdot 13 \cdot 42 \cdot 10.$$

Tada $15! = abc = 10^3 \cdot 12 \cdot 42 \cdot 72 \cdot 66 \cdot 13 \cdot 42$ ir

$$1\blacksquare0767436\blacksquare = 12 \cdot 42 \cdot 72 \cdot 66 \cdot 13 \cdot 42.$$

Paskutinis sandaugos skaitmuo priklauso tik nuo dauginamųjų paskutiniųjų skaitmenų, todėl skaičiaus $1\blacksquare0767436\blacksquare$ paskutinis skaitmuo y sutampa su skaičiaus $2\cdot2\cdot2\cdot6\cdot3\cdot2 = 48\cdot6$ paskutiniuoju skaitmeniu, o šis – su skaičiaus $8 \cdot 6$ paskutiniuoju skaitmeniu 8. Skaičius 15! dalijasi iš 9, todėl jo skaitmenų suma $1+x+0+7+6+7+4+3+6+y+0+0+0 = 34+x+y = 42+x$ taip pat dalijasi iš 9. Tinka tik $x = 3$.

Gavome, kad $x = 3$ ir $y = 8$.

Ekspertas

Nr.	Atsakymas
1	D
2	E
3	D
4	B
5	B
6	A
7	E
8	C
9	A
10	D
11	A
12	E
13	B
14	B
15	D
16	C
17	C
18	C
19	B
20	E
21	E
22	C
23	D
24	A
25	D
26	A
27	A
28	C
29	D
30	E