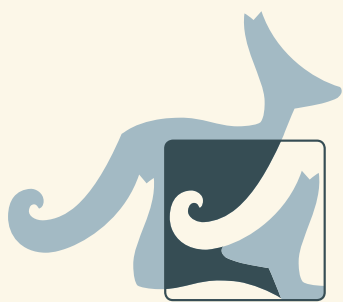
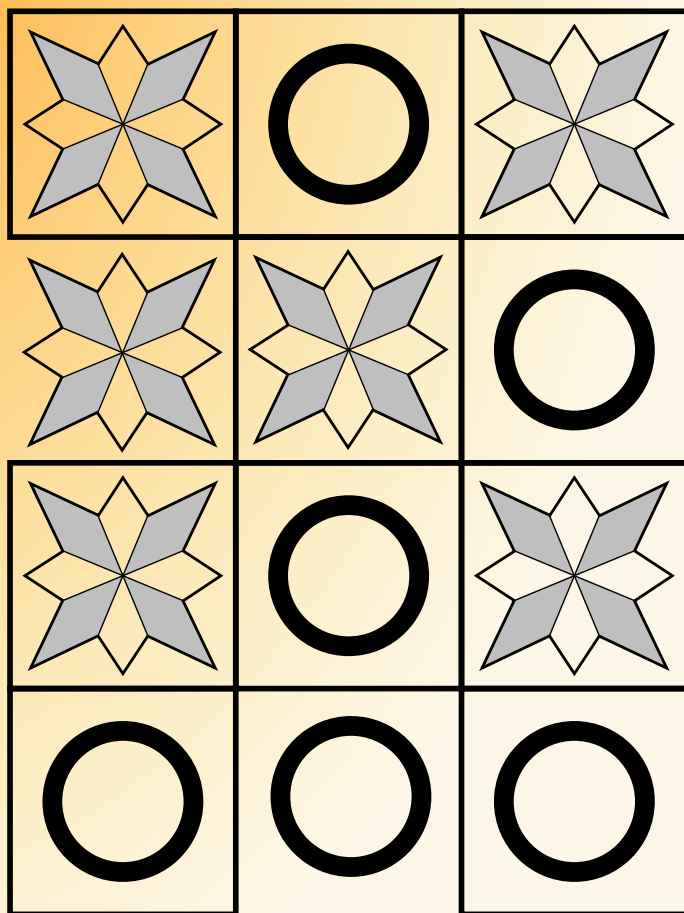




Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA

Mažylis



Užduotys ir sprendimai
2018

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA



KENGŪRA 2018. Mažylis

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Juozas Juvencijus Mačys

Maketavimas
Ugnė Šiurienė

Turiny

Pratarmė	4
Dalyvio kortelės pavyzdys	6
Sąlygos	7
Užduočių sprendimai	11

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdienišku) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gdynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos sprendamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 45000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2018 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamas, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrantančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrižtamai atšiuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažinę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai atečiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2018 metų kovo 15 dieną keliavo ir gausiai sprendė 3–4 klasių (*Mažylio* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu !), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu ?). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais ??, !!, !!! ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojai, šitiek daug turite!

Organizatoriai

2018 m. *Mažylio* užduočių sąlygos

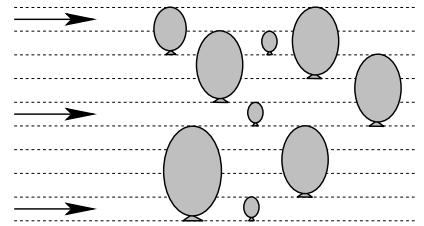
Klausimai po 3 taškus

1. Lina turi 10 guminių antspaudukų. Kiekvienas antspaudukas atspaudžia vieną iš 10 skaitmenų: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Lina atspaudžia Kengūros konkurso datą. Kiek antspaudukų jai prireikė?

1 5 0 3 2 0 1 8

A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 10

2. Paveikslėlyje pavaizduotos 3 lekiančios strėlės ir 9 pririšti balionai. Kai strėlė pataiko į balioną, šis sprogtas, bet strėlė lekia tolyn ta pačia kryptimi. Į kelis balionus pataikys strėlės?



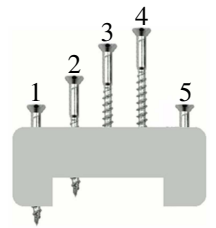
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

3. Jorei šešeri metai. Jos sesuo dvejis metais jaunesnė, o jos brolis dvejis metais vyresnis. Kokia yra jų visų trijų amžių suma?

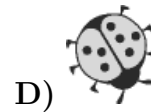
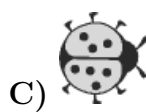
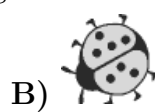
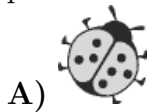
A) 10 B) 15 C) 18 D) 21 E) 30

4. Paveikslėlyje pavaizduoti penki įsukti medvaržčiai. Keturi iš jų yra vieno ilgio, vienas medvaržtis yra trumpesnis. Kuris medvaržtis trumpiausias?

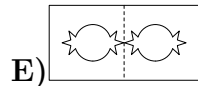
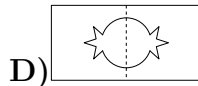
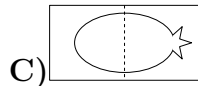
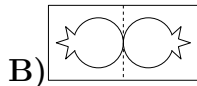
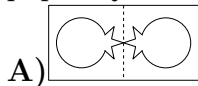
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



5. Štai boružė Mirga:  . Ji mėgsta pasisukti. Kuriame iš žemiau esančių paveikslėlių pavaizduota ne Mirga?

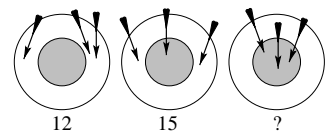


6. Liucija sulenkė popieriaus lapą pusiau, o tada iš jo iškirpo gabalą:  . Ką ji matys atlenkusi popierių?



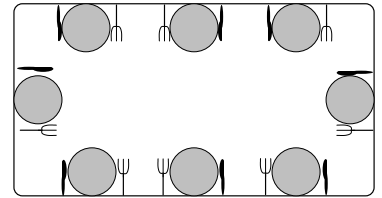
7. Pirmą kartą metusi tris strėlytes Diana iš viso pelnė 12 taškų. Antrą kartą ji uždirbo 15 taškų. Kiek taškų ji pelnė mesdama strėlytes trečią kartą?

A) 15 B) 18 C) 21 D) 24 E) 27



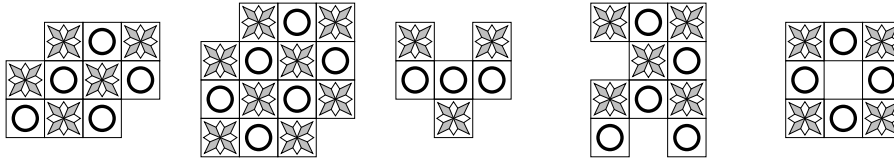
8. Mykolas dengia stalą 8 asmenims. Jis turi tvarkingai padėti įrankius kiekvienam, t. y. padėti šakutę į kairę nuo lėkštės, o peilį – į dešinę. Keliems asmenims Mykolas padėjo įrankius tvarkingai?

A) 5 B) 4 C) 6 D) 2 E) 3



Klausimai po 4 taškus

9. Jokūbas turi daug vienodų kauliukų . Kelis iš pavaizduotų raštų jis gali sudėti?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10. Kajus parašė lentoje skaičių, sudarytą iš penkių devynetų. Tada jis sudėjo pirmuosius du skaitmenis, nutrynė juos ir jų vietoje įrašė gautą sumą. Tada jis padarė tą patį su nauju skaičiumi ir kartojo tą su kiekvienu gautu skaičiumi, kol gavo vienaženklį skaičių. Kiek kartų Kajus keitė pirmus du skaitmenis jų suma?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

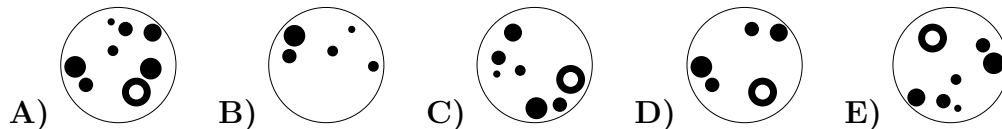
11. Tomas iš languoto popieriaus iškirpinėja dviejų rūšių iškarpas (vadinkime jas kvadratu ir trapecija):



Kiek mažiausiai iškarpų jam prireiks, kad dėdamas jas vieną prie kitos sudėtų laivą (žr. pav.)?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

12. Viršutinis paveikslėlis buvo pasuktas, o spalvos jame sukeistos. Kaip dabar gali atrodyti paveikslėlis?

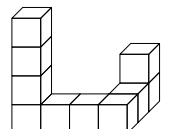


13. Triušis Ušis turėjo 20 morkų. Kasdien jis sugrauždavo 2 morkas. 12-tą morką jis sugraužė trečiadienį. Kada jis sugraužė pirmą iš tų morkų?

A) Pirmadienį B) Antradienį C) Trečiadienį D) Ketvirtadienį E) Penktadienį

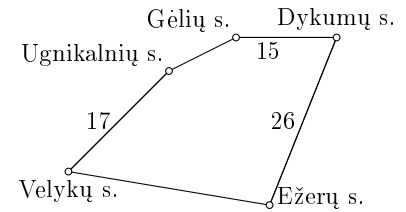
14. Tomas iš 10 kubelių suklijavo pavaizduotą figūrą. Tada jis visą figūrą (ir net jos apačią) nuspalvino. Kelių kubelių nuspalvintos lygiai 4 sienelės?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10



15. Rožių krūmė žydi 8 žiedai. Ant kai kurių tupi arba vienas drugelis, arba vienas laumžirgis, o laisvų yra mažiau kaip pusė visų žiedų. Drugelių yra du kartus daugiau nei laumžirgių. Kiek drugelių tupi ant žiedų?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

16. Kapitonas Kukas, išplaukęs iš Velykų salos, apsilankė kiekvienoje iš schemoje pažymėtų salų – Ugnikalnių s., Gėlių s., Dykumų s., Ežerų s. – ir grįžo į Velykų salą. Visa kelionė sudarė 100 km. Atstumas tarp Dykumų s. ir Ežerų s. buvo toks pat kaip atstumas tarp Velykų s. ir Gėlių s. per Ugnikalnių s. Koks atstumas nuo Ežerų salos iki Velykų salos?



- A) 17 km B) 23 km C) 26 km D) 33 km E) 35 km

Klausimai po 5 taškus

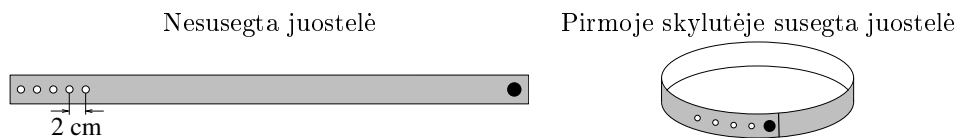
17. Amelija turi du brolius dvynukus. Jie gimė, kai Amelijai sukako 8 metai. Dabar Amelijai 5 metais daugiau nei abiejų brolių amžių suma. Kiek dabar metų Amelijai?
A) 9 B) 11 C) 12 D) 13 E) 15

18. Keturių rutulių svoriai yra 10 g, 20 g, 30 g ir 40 g. Kuris rutulys sveria 30 g?



- A) A B) B C) C D) D E) A arba B

19. Pavaizduotą juostelę galima susegti į žiedą penkiais būdais – susėgus pirmoje skylutėje, antroje, trečioje, ketvirtoje, penktoje skylutėje.



Kiek ilgesnė juostelė, susėgta pirmoje skylutėje, už juostelę, susėgtą penktoje skylutėje?

- A) 4 cm B) 8 cm C) 10 cm D) 16 cm E) 20 cm

20. Senovinėje kalboje simboliai , , , ,  atitinka skaitmenis 1, 2, 3, 4 ir 5, tik nepasakyta, kuris simbolis atitinka kurį skaitmenį. Buvo nustatyta, kad:

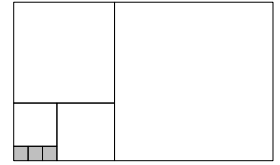
$$\begin{array}{ccccc} \text{atom} & + & \text{atom} & = & \text{fish} \\ \text{sun} & + & \text{sun} & = & \text{atom} \\ \text{sun} & + & \text{fish} & = & \text{fish} \end{array}$$

Kuris simbolis atitinka skaitmenį 3?

- A)  B)  C)  D)  E) 

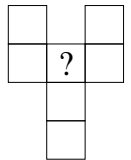
21. Kengūrėlė Kenga daro tik 2 m ilgio šuolius ir juda pagal tokią taisyklę: po kiekvienų trijų šuolių į priekį ji daro vieną šuolį atgal. Ji įveikė tam tikrą maršrutą iš viso padariusi keturiolika šuolių. Kiek metrų turi šis maršrutas?
A) 8 B) 16 C) 15 D) 24 E) 10

22. Didysis stačiakampis sudėtas iš 7 įvairaus dydžio kvadratų. Trys mažiausieji kvadratai užtūšuoti. Kiek tų kvadratėlių telpa į didįjį stačiakampį?
A) 165 B) 176 C) 187 D) 198 E) 200



23. Duotas dviženklis skaičius. Jei prie jo pridėsime 11, gausime triženklį skaičių, o jei iš jo atimsime 11, tai rezultatas bus lygus dviejų vienodų vienaženklių skaičių sandaugai. Duotasis dviženklis skaičius – tai
A) 75. B) 81. C) 89. D) 90. E) 92.

24. Lėja nori surašyti skaičius 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 į pavaizduotą lentelę. Du gretimi skaičiai negali būti gretimuose langeliuose (langeliai gretimi, jei liečiasi kraštais arba kampais). Kokį skaičių ji gali įrašyti į klaustuką pažymėtą langelį?
A) Bet kurį B) Bet kurį nelyginį C) Bet kurį lyginį D) Tik skaičių 4 E) Tik 1 arba 7



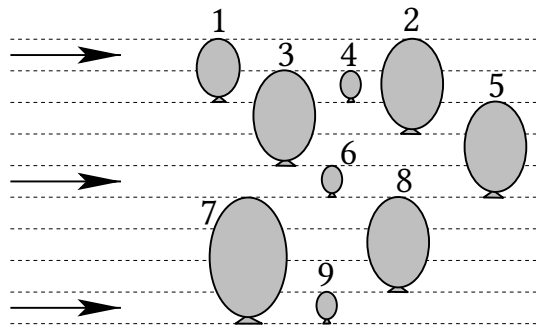
Mažylis užduočių sprendimai

1. (B) 6

! Surašykime, kurių skaitmenų Linai prireikė atspausdinti konkurso datą. Matome, kad reikėjo skaitmenų 0, 1, 2, 3, 5, 8, o kitų – 4, 6, 7, 9 nereikėjo. Vadinasi, jai prireikė 6 skaitmenų, taigi ir 6 antspaudukų.

2. (E) 6

! Sunumeruokime balionus įprastu būdu: pagal viršutinį kraštą iš viršaus į apačią, o jeigu kelių balionų viršutinis kraštas toje pačioje horizontalioje tiesėje – iš kairės į dešinę (panašiai ir knygą skaitome).



Viršutinė strėlė susprogdina į 1 ir 2 balionus, vidurinė strėlė – į 6 ir 5 balionus, apatinė strėlė – 7 ir 9 balionus. Taigi susprogs 6 balionai.

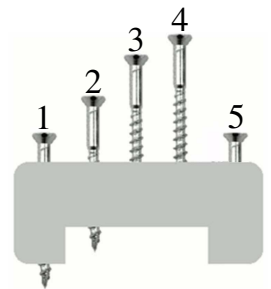
3. (C) 18

! Jorės sėsei $6 - 2 = 4$ metai, o broliui $6 + 2 = 8$ metai. Vadinasi, jų amžių suma yra $6 + 4 + 8 = 18$ metų.

!! Kai skaičiai dideli, verta skaičiuoti kiek kitaip. Kadangi sesuo 2 metais jaunesnė, brolis 2 metais vyresnis, tai „vidutiniškai“ jiems po 6 metus. Vadinasi, visų jų amžių suma yra $3 \cdot 6 = 18$.

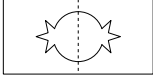
4. (E) 5

! Palyginkime pirmą ir penktą medvaržtį – penktasis trumpesnis (pirmas išlenda į apačią, penktas – neišlenda, nors abu įgręžti į tokio pat storio medžio bloką. Vadinasi, 5 medvaržtis trumpesnis ir už 2, 3 ir 4 medvaržčius, t. y. jis – trumpiausias.



5. **(D)** 

! Mirga turi $3 + 4 = 7$ taškelius ant nugaros, bet ir visur atsakymuose 7 taškeliai. Todėl skirkime sparnelius: žiūrint į Mirgą iš galvos pusės dešinėje yra 3 taškeliai, o kairėje – 4. O štai atsakyme **D** (ir tik jame) dešinėje 4 taškeliai, o kairėje – 3. Vadinasi, paveikslėlyje **D** pavaizduota ne Mirga.

6. **(D)** 

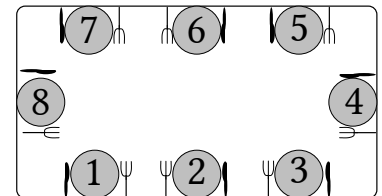
! Atlenkusi popierių, Liucija turi matyti simetrišką paveikslėlį, todėl atsakymas **C** tikrai netinka. Iškirptas jos gabalas panašus į pusskritulį su karūna, atlenkusi ji matys iškirptą visą skritulį su dviem karūnomis. Toks yra atsakymas **D**.

7. **(C)** 21

! Pirmą kartą Diana visomis trimis strėlytėmis pataikė į baltąją plotą, todėl vienas pataikymas į tą plotą duoda $12 : 3 = 4$ taškus. Vadinasi, antrą kartą už du pataikymus į baltąją plotą ji gavo $2 \cdot 4 = 8$ taškus, o likusius $15 - 8 = 7$ taškus ji uždirbo pataikiusi strėlyte į pilkąją plotą. Trečią kartą visos strėlytės atsidūrė pilkajame plote, todėl Diana pelnė $3 \cdot 7 = 21$ tašką.

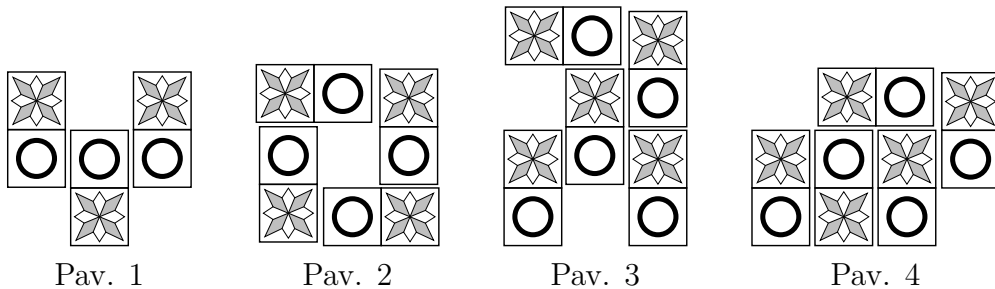
8. **(A)** 5

! Apeikime mintyse stalą, pradėdami nuo kairiojo apatinio kampo ir eidami prieš laikrodžio rodyklę. Tada peilis dešinėje guli prie 2, 3, 4, 5 ir 7 lėkštės, – iš viso prie penkių lėkščių.



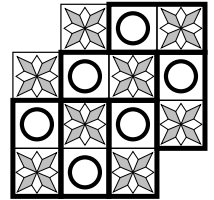
9. **(D)** 4

? Visai nesunku nurodyti, kaip sudėti trečią raštą (žr. pav. 1):

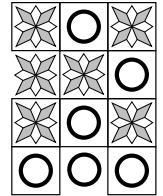


Paprasta sudėti ir penktą raštą – pavyzdžiui, kaip nurodyta paveikslėlyje 2. Dabar jau nesunku sudėti ir ketvirtą, ir penktą raštą (žr. pav. 3 ir 4). O štai antro rašto sudėti nepavyksta, taigi drąsiai galima rinktis atsakymą **D**.

! Vis dėlto norėtusi visiškai įsitikinti, kad antro rašto sudėti negalima, Pabandžius, pavyzdžiui, dėlioti taip, kaip nurodyta paveikslėlyje dešinėje, lieka du atskiri langeliai su žvaigždėmis. Taigi mums nepavyko, bet svarbiau kas kita: liko du langeliai su žvaigždėmis, tai matyt jų rašte buvo daugiau: juk kiekvienas kauliukas turi po vieną apskritimą ir žvaigždę.



Dabar mintis aiški: suskaičiuojame, kad antrame rašte yra 6 apskritimai ir 8 žvaigždės. Vadinasi, jų niekaip negalima uždengti mūsų kauliukais. Beje, kituose raštuose skirtingų langelių yra po lygiai, ir tuos raštus lengvai sudėjome. Bet skirtingų langelių lygybės gali ir neužtekti. Iš tikrųjų, papildykime ketvirtą raštą 1 apskritimu ir 1 žvaigžde (žr. pav. dešinėje). Nors dabar rašte skirtingų langelių po lygiai, sudėti rašto nepavyks: apatinio vidurinio skrituliuko uždengti kauliukais neįmanoma, nes visi jo kaimynai taip pat skrituliukai.

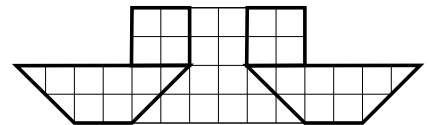


10. ⑧ 8

! Pirmuoju žingsniu Kajus sudėjo $9 + 9$ ir gavo 18. Antruoju žingsniu jis sudėjo $1 + 8$ ir gavo 9. Lentoje liko 4 devynetai. Lygiai taip pat dar po dviejų žingsnių liks 3 devynetai, dar po dviejų žingsnių 2 devynetai, t. y. skaičius 99. Dabar septintuoju žingsniu jis gaus skaičių 18, o aštuntuoju žingsniu sudėjęs $1 + 8$ gaus 9 – vienaženklį skaičių. Taigi pirmus du skaitmenis Kajus keitė jų suma 8 kartus.

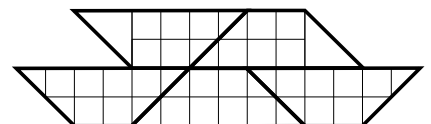
11. ③ 6

! Matome, kad į kairiausią laivo kampą tinka tik apversta trapecija (žr. pirmą paveikslėlį). Dabar į dešiniausią kampą taip pat tinka tik trapecija. Į viršutinius kampus tinka tik kvadratai. Dabar matome, kad į vidurį apačioje reikia dėti trapeciją, o viršuje kvadratą. Taigi laivą sudėjome iš 6 iškarpų.



!! Galima uždavinį spręsti skaičiuojant. Kvadratinės iškarpos plotas – 4 kvadratai, trapecijos plotas 6 kvadratai ir 4 kvadratų puselės – iš viso 8 kvadratai. Laivo plotas – 36 kvadratai. Penkios trapecijos turi $5 \cdot 8 = 40$ kvadratų – per daug. Ketrios trapecijos turi $4 \cdot 8 = 32$ kvadratus, pridėjus vieną kvadratą turėsime kaip tik $32 + 4 = 36$ langelių. Deja, jau sakėme, kad kvadratų turi būti mažiausiai du. Jeigu imsime tris trapecijas ($3 \cdot 8 = 24$ langeliai), kvadratai dengs $36 - 24 = 12$ langelių (jų bus irgi 3). Jau matėme, kaip iš trijų trapecijų ir trijų kvadratų galima sudėti laivą.

!!! Sąlygoje prašoma sudėti laivą, dedant iškarpas vieną prie kitos. Jeigu nebūtų reikalaujama dėti jas šalia, o būtų galima ir užkloti (visiškai ar dalinai), tai vidurinę trapeciją galima būtų pakeisti trimis kvadratais. Tiesa, tada būtų panautos aštuonios iškarpos.



O štai jeigu būtų pasakyta, kad reikia ne sudėti, o uždengti iškarpomis laivą, tai užtektų penkių trapecijų (žr. antrą paveikslėlį)

Taigi matome, kaip svarbu atidžiai skaityti sąlygą.

12. **(E)**

! Sąlygos paveikslėlyje matome žiedą ir 6 skrituliukus. Atsakymuose tokie yra tik paveikslėliai **C** ir **E**, Bet atsakyme **C** prie žiedo yra 2 skrituliukai, o jų turėtų nebūti. Toks ir yra atsakymas **E**. Galima pasitikrinti, kad atsakyme **E** ir kitų skrituliukų padėtys sutampa su pradinėmis.

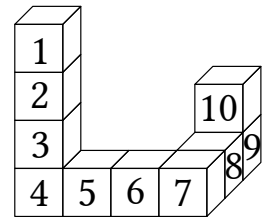
13. **(E)** Penktadienį

! Galima eiti atgal. Antradienį Ušis sugraužė 10-tą (žinoma, ir 9-tą) morką, pirmadienį – 8-tą morką, sekmadienį – 6-tą morką, šeštadienį – 4-tą morką, penktadienį – 2-ą ir 1-ą morkas.

!! Galima eiti ir pirmyn: ketvirtadienį Ušis sugraužė 13-tą ir 14-tą morkas. Kadangi per savaitę jis sugraužia $7 \cdot 2 = 14$ morkų, tai ketvirtadienį buvo septinta morkų graužimo diena. Vadinasi, morkas Ušis pradėjo graužti penktadienį.

14. **(C)** 8

! Sunumeruokime kubelius kaip paveikslėlyje. Kubas turi 6 sienas, taigi pirmo kubelio nuspalvintos 5 sienos (jo pasislėpusi tik 1 siena). Antro ir tolimesnių (iki 9-to) kubelių pasislėpusios 2 sienos, 10-to kubelio (kaip ir pirmo) pasislėpusi 1 siena. Vadinasi, 4 sienos nuspalvintos aštuonių kubelių.

15. **(C)** 4

? Jeigu laumžirgių būtų 1, tai drugelių būtų 2, užimtų žiedų būtų $1 + 2 = 3$, laisvų žiedų būtų $8 - 3 = 5$, o tai yra daugiau kaip pusė visų žiedų (t.y. daugiau kaip 4). Jei laumžirgių būtų 2, tai drugelių būtų $2 \cdot 2 = 4$, užimtų žiedų būtų $2 + 4 = 6$, laisvų žiedų būtų $8 - 6 = 2$, t. y. mažiau kaip 4. Vadinasi, drugelių galėjo būti 4, o kadangi „Kengūros“ konkurse teisingas vienintelis atsakymas, tai renkamės atsakymą **C**.

! Žinoma, norisi įsitikinti, kad teisingas tik toks atsakymas. Tęskime: jeigu laumžirgių 3 ar daugiau, tai drugelių 6 ar daugiau, užimtų žiedų būtų 9 ar daugiau, o tiek jų pagal sąlygą nėra, Vadinasi, atsakymas **C** tikrai vienintelis.

!! Galima spręsti įvedus nežinomąjį. Pasižymėkime laumžirgių skaičių L , tada drugelių $L + L$, užimtų žiedų $L + L + L$, ir tas skaičius pagal sąlygą didesnis už 4, bet ne didesnis už 8. Turime

$$4 < L + L + L \leq 8.$$

$L = 1$ netinka, $L = 3$ ir L didesni netinka, taigi lieka tik $L = 2$, tada tikrai $4 < 2 + 2 + 2 \leq 8$.

16. **D** 33 km

! Atstumas tarp Velykų salos ir Gėlių s. lygus atstumui tarp Dykumų s. ir Ežerų s., t. y. lygus 26 km. Vadinasi, atstumas tarp Ugnikalnių s. ir Gėlių s. lygus $26 - 17 = 9$ km. Todėl atstumas nuo Velykų s. iki Ežerų s. (per Dykumų s.) lygus $17 + 9 + 15 + 26 = 67$ km. Kadangi visa kelionė sudarė 100 km, tai atstumas nuo Ežerų s. iki Velykų s. lygus $100 - 67 = 33$ km.

!! Beje, galima skaičiuoti trumpiau. Kadangi atstumai Velykų s.–Gėlių s. ir Dykumų s.–Ežerų s. lygūs, tai atstumas Velykų s.–Dykumų s.–Ežerų s. lygus $2 \cdot 26 + 15 = 67$ km. Vadinasi, atstumas Ežerų s.–Velykų s. lygus $100 - 67 = 33$ km.

17. **B** 11

? Visai greitas sprendimas – tikrinti atsakymus. Pagal sąlygą, Amelija 8 metais vyresnė už dvynukus (t. y. už kiekvieną iš dvynukų). Jeigu Amelijai dabar būtų 9 metai, tai dvynukų amžių suma būtų $9 - 5 = 4$, o dvynuko amžius būtų 2. Amelijos ir dvynukų metų skirtumas būtų $9 - 2 = 7$, taigi atsakymas **A** netinka.

Tikriname atsakymą **B** – Amelijai 11 metų. Tada dvynukų amžių suma lygi $11 - 5 = 6$, o dvynukų amžius $6 : 2 = 3$. Amžių skirtumas lygus $11 - 3 = 8$, kaip ir turi būti. Atsakymas **B** tinka, jį ir renkamės.

! Sprendimas būtų pilnesnis, jeigu įsitikintume, kad likę atsakymai netinka. Bet spręskime „matematiškiau“. Sakykime, kad Amelijai A metų. Tada nuo dvynukų gimimo praėjo $A - 8$ metai. Vadinasi, kiekvienam iš dvynukų dabar $A - 8$ metai, o jų amžių suma $A - 8 + A - 8$. Bet pagal sąlygą tai yra 5 metais mažiau nei Amelijai dabar, t. y.:

$$A - 8 + A - 8 + 5 = A.$$

Turime $A + A - 16 + 5 = A$, $A + A - 11 = A$, $A + A = A + 11$, $A = 11$.

!! Dar gražiau spręsti be nežinomųjų. Kai dvynukai gimė, Amelijai buvo 8 metai, dvynukų amžių suma $0 + 0 = 0$ metų, tų skaičių skirtumas $8 - 0 = 8$ metai. Metams praėjus, Amelijos amžius padidėja vienetu, dvynukų amžius padidėja 2 metais, taigi nagrinėjamas skirtumas per metus sumažėja vienetu. Kadangi dabar skirtumas jau sumažėjęs $8 - 5 = 3$ vienetais, tai nuo dvynukų gimimo praėjo 3 metai. Vadinasi, dabar Amelijai $8 + 3 = 11$ metų.

18. **C** C

? Visų rutulių svoris yra 100 g. Antros svarstyklės rodo, kad C sunkesnis už B ir už D, t. y. sunkesnis bent už du rutulius. Tai reiškia, kad C sveria arba 30 g, arba 40 g. Bet jei C svertų 40 g, tai pirmų svarstyklių dešinė pusė būtų ne lengvesnė kaip 50 g, taigi nebūtų lengvesnė už kairiąją. Vadinasi, C sveria 30 g. Teisingas atsakymas C.

! Kodėl gi pirmas sprendimas pažymėtas klausuku? Ogi kas pasakė, kad pavaizduotoji situacija įmanoma? Rimtam matematikui reikia nurodyti bent vieną pavyzdį tokių visų rutulių svorių, kad visos uždavinio sąlygos būtų išpildytos.

Aišku, kad D reikia imti 10 g – kitaip pirmų svarstyklių dešinė pusė svertų ne mažiau kaip 50 g ir nebūtų lengvesnė. Dabar iš antrų svarstyklių matome, kad $B + D = C$, $B + 10 = 30$, taigi $B = 20$. Rutuliui A lieka svoris 40 g. Dabar visi sąlygos reikalavimai išpildyti. Rutuliai $A + B = 40 + 20 = 60$ g nusveria $C + D = 30 + 10 = 40$ g, o rutulys $C = 30$ g sveria tiek pat kiek $B + D = 20 + 10 = 30$ g.

!! Pateiksime sprendimą „be žodžių“ (pavyzdžiui, mokytojams). Kadangi $A + B + C + D = 100$, tai iš pirmų svarstyklių $C + D < A + B = 100 - C - D$, $2C + 2D < 100$, $C + D < 50$, $C < 50 - D \leq 50 - 10$, $C < 40$. Vadinasi, $30 \leq C < 40$, t. y. $C = 30$. Dabar $C + D < 50$, $30 + D < 50$, $D < 20$, t. y. $D = 10$. Bet $C = B + D$, $30 = B + 10$, $B = 20$. Vadinasi, $A = 40$. Svoriai $A = 40, B = 20, C = 30, D = 10$ tenkina visas uždavinio sąlygas.

19. (B) 8 cm

! Keliant sagutę iš pirmos skylutės į penktą, sagutė įveikia 4 tarpelius po 2 cm, t. y. $4 \cdot 2 = 8$ cm. Tiek sutrumpėja ir ši juostelė.

20. (A) 

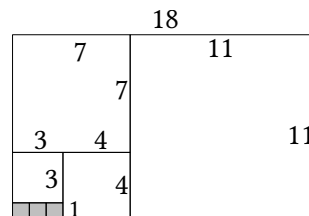
! Simbolius trumpai vadinkime „akis“, „saulė“, „orbita“, „šukos“, „žuvis“. Kadangi žuvis lygi dviem orbitoms, o orbita – dviem saulėms, tai žuvis lygi $2 \cdot 2 = 4$ saulėms. Vadinasi, žuvis yra 4, saulė yra 1, o tada orbita yra 2. Dabar šukos yra $1 + 4 = 5$. Todėl nepamirėtoji akis yra 3.

21. (B) 16

! Natūralu iš pradžių skaičiuoti įveiktą atstumą šuolių ketvertais. Po keturių šuolių Kenga bus įveikusi $2 + 2 + 2 - 2 = 4$ metrus, po 8 šuolių – 8 metrus, po 12 šuolių – 12 metrų. Vadinasi, po 13 šuolių bus įveikta $12 + 2 = 14$ metrų, o po 14 šuolių $14 + 2 = 16$ metrų. Daugiau šuolių ji nebedarė.

22. (D) 198

! Matome 3 vienodus kvadratėlius ir 4 skirtingus didesnius kvadratus. Laikykime kvadratėlio kraštinę vienetu ir suskaičiuokime didžiųjų kvadratų kraštines didėjimo tvarka. Pirmo kvadrato kraštinė lygi $1 + 1 + 1 = 3$, antro $3 + 1 = 4$, trečio $4 + 3 = 7$, ketvirto $7 + 4 = 11$. Vadinasi, didžiojo stačiakampio ilgis $7 + 11 = 18$, o plotis $4 + 7 = 11$. Vadinasi, į jį telpa $18 \cdot 11 = 198$ mažieji kvadratėliai.



23. (E) 92.

! Jei skaičius mažesnis už 89, tai pridėję 11 gausime mažiau už 100, t. y. dviženklį skaičių. Vadinasi, duotasis skaičius – tai vienas iš skaičių 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99. Atėmus 11, rezultatas bus vienas iš skaičių 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88. Iš jų reikia išrinkti skaičių, lygų dviejų vienodų vienaženklų dauginamųjų sandaugai. Kadangi $8 \cdot 8 = 64$, tai tas vienaženklis didesnis už 8, taigi tai 9. Vadinasi, iš duotojo skaičiaus atėmę 11 gausime $9 \cdot 9 = 81$, o duotasis skaičius – tai $81 + 11 = 92$.

!! Užrašykime sprendimą glausčiau. Duotasis skaičius N dviženklis, t. y. $N \leq 99$. Pridėjus 11 jis tampa triženklis, $N + 11 \geq 100$, $N \geq 89$. Vadinasi, $78 \leq N - 11 \leq 88$. Kadangi $N - 11 = x \cdot x$, tai $64 < 78 \leq x \cdot x \leq 88 < 100$, todėl $8 \cdot 8 < x \cdot x < 10 \cdot 10$. Vadinasi, $x = 9$, $N - 11 = 9 \cdot 9$, $N = 81 + 11 = 92$.

24. **E** Tik 1 arba 7

- ? Tikrinkime atsakymą **D**, ir į pažymėtą langelį įrašykime 4, o gretimus jam langelius pažymėkime taškais (žr. 1 pav.). Tokių langelių yra penki, ir nė į vieną iš jų negalima įrašyti nei 3, nei 5. Lieka skaičiai 1, 2, 6, 7, jų tik keturi, vadinasi, jų neužtenka įrašyti į penkis langelius. Todėl skaičiaus 4 įrašyti į pažymėtą langelį negalima, ir atkreinta ne tik atsakymas **D**, bet ir **A** bei **C**.

•		•
•	4	•
	•	

Atkreinta ir atsakymas **B**, nes, pavyzdžiui, įrašius į pažymėtą langelį 3, jam gretimi galės būti tik skaičiai 1, 5, 6, 7, ir vėl jų per mažai.

Lieka atsakymas **E** – jį ir renkamės.

- ! Griežtas sprendimas būtų toks. Pasvarstykime, kokį skaičių galima įrašyti į pažymėtą langelį. Į jam gretimus penkis langelius reikia įrašyti penkis skaičius, kurie būtų negretimi tiek pažymėtajam, tiek vienas kitam (jei jie atsiduria gretimuose langeliuose). Todėl netinka skaičius 2 (jam negretimi tik keturi skaičiai 4, 5, 6, 7) netinka 3 (jam negretimi tik 1, 5, 6, 7), netinka 4 (jam negretimi tik 1, 2, 6, 7), netinka 5 (negretimi 1, 2, 3, 7), netinka 6 (negretimi 1, 2, 3, 4).

3		5
6	1	7
	4	
	2	

Liko ištirti skaičius 1 ir 7. Į pažymėtą langelį įrašome skaičių 1, Jis turi penkis negretimus (3, 4, 5, 6, 7), bet tai dar visai nereiškia, kad visus skaičius galima surašyti į lentelę, kad jokie (!) du skaičiai nebūtų gretimi. Pasistenkime tai padaryti. Kadangi skaičius 2 gretimas įrašytajam 1, tai skaičių 2 privalu įrašyti į apatinį langelį. Tarp jų negalima įrašyti 3 (jis gretimas skaičiui 2), todėl bandykime rašyti 4. Skaičiui 4 gretimi 3 ir 5, todėl juos tenka rašyti viršuje. Dabar po penketu būtina rašyti 7, o po trejetu – 6 (žr. 2 pav.). Taigi skaičius 1 tinka įrašyti į pažymėtą langelį.

Dabar sudaryti lentelę skaičiui 7 paprasta: galime 2 pav. lentelėje kiekvieną skaičių pakeisti skaičiumi, papildančiu senąjį iki 8. Tada vietoje 1 bus $8 - 1 = 7$, vietoje 5 bus $8 - 5 = 3$ ir t.t., o negretimi skaičiai išliks negretimais.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	B
2	E
3	C
4	E
5	D
6	D
7	C
8	A
9	D
10	E
11	B
12	E
13	E
14	C
15	C
16	D
17	B
18	C
19	B
20	A
21	B
22	D
23	E
24	E