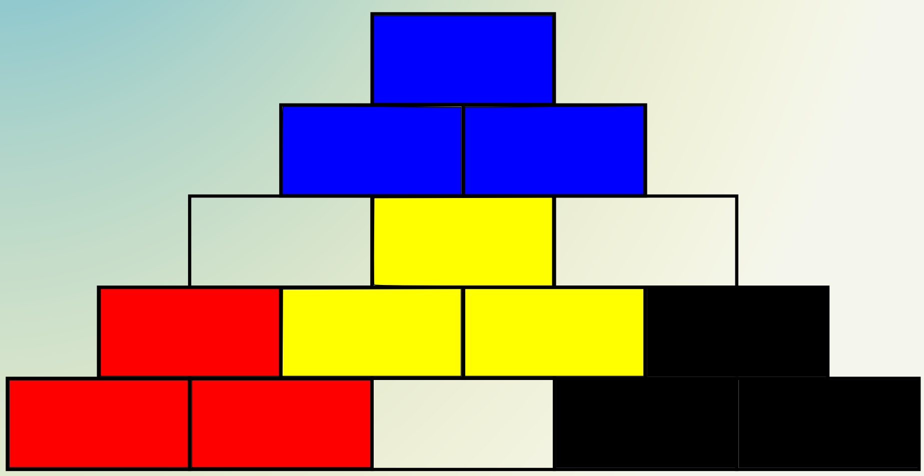
Kengūra

K A D E T A S



Užduotys ir sprendimai

2017

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VU MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
VU MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2019. Kadetas

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autoriai ir sudarytojai
Paulius Drungilas ir Romualdas Kašuba

Redaktorius
Juozas Juvencijus Mačys

Maketavimas
Jonas Šiurys

Viršelio autorė
Ugnė Šiurienė

Turinys

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 48000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2019 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2019 metų kovo 16 dieną keliavo ir gausiai sprendė 5–6 klasių (*Kadeto* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

Tarptautinis matematikos konkursas
KENGŪRA

Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys: ☒

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras

Mokyklos pavadinimas

Kalba

Lietuvių ☐
Lenkų ☐
Rusų ☐
Anglų ☐

	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
Klasė	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐
7	☐	☐	☐	☐	☐
8	☐	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☐	☐	☐
10	☐	☐	☐	☐	☐
11	☐	☐	☐	☐	☐
12	☐	☐	☐	☐	☐
13	☐	☐	☐	☐	☐
14	☐	☐	☐	☐	☐
15	☐	☐	☐	☐	☐
16	☐	☐	☐	☐	☐
17	☐	☐	☐	☐	☐
18	☐	☐	☐	☐	☐
19	☐	☐	☐	☐	☐
20	☐	☐	☐	☐	☐
21	☐	☐	☐	☐	☐
22	☐	☐	☐	☐	☐
23	☐	☐	☐	☐	☐
24	☐	☐	☐	☐	☐
25	☐	☐	☐	☐	☐
26	☐	☐	☐	☐	☐
27	☐	☐	☐	☐	☐
28	☐	☐	☐	☐	☐
29	☐	☐	☐	☐	☐
30	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

Automatinis apdorojimas, Nacionalinis egzaminų centras, 2013

2017 m. *Kadeto* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Laikrodis rodo 17:00. Ką rodys laikrodis po 17 valandų?
A) 8:00 **B)** 10:00 **C)** 11:00 **D)** 12:00 **E)** 13:00

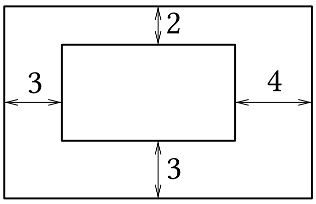
2. Mergaičių grupė stovi ratu. Gerda stovi Elenai ketvirta iš kairės ir septinta iš dešinės. Kiek iš viso grupėje yra mergaičių?
A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

3. Kokį skaičių reikia atimti iš -17, kad gautume -33?
A) -50 **B)** -16 **C)** 16 **D)** 40 **E)** 50

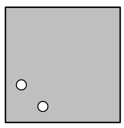
4. Kuris skaičius dalijasi iš 3?
A) 10^{2017} **B)** $10^{2017}+2016$ **C)** $10^{2017}+2017$ **D)** $10^{2017}+2018$ **E)** $10^{2017}+2019$

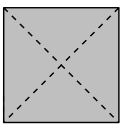
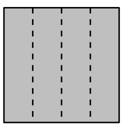
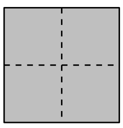
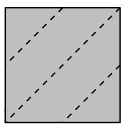
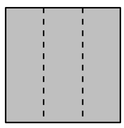
5. Lukas žino, kad $1111\times1111=1234321$. Kam lygu 1111×2222?
A) 3456543 **B)** 2345432 **C)** 2234322 **D)** 2468642 **E)** 4321234

6. Paveikslėlyje pavaizduoti du stačiakampiai, kurių atitinkamos kraštinės yra lygiagrečios. Kam lygus šių stačiakampių perimetrų skirtumas?
A) 12 **B)** 16 **C)** 20 **D)** 21 **E)** 24



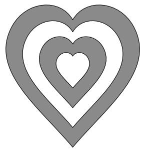
7. Adomas dukart paeiliui perlenktame kvadratiniame popieriaus lape išmušė vieną skylę. Tas lapas atlankstytas pavaizduotas paveikslėlyje dešinėje. Kaip Adomas lankstė popieriaus lapą?



A)  B)  C)  D)  E) 

8. Trijų skirtingų natūraliųjų skaičių suma lygi 7. Kam lygi šių skaičių sandauga?
A) 12 **B)** 10 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 5

9. Paveikslėlyje pavaizduotos keturios persidengiančios (paeiliui viena ant kitos uždėtos) širdies formos popierinės figūros, kurių plotai atitinkamai lygūs 1, 4, 9 ir 16. Kam lygus užtušuotos figūros plotas?



A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

10. Sofija turi 20 eurų, o kiekviena iš keturių jos seserų turi po 10 eurų. Kiek eurų Sofija turi duoti kiekvienai iš šių seserų, kad visos penkios seserys turėtų po tiek pat pinigų?
A) 2 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 10

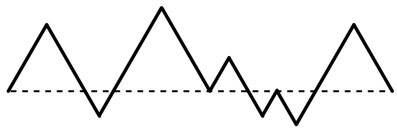
Klausimai po 4 taškus

11. Skruzdėlytė nuo kairiojo galo nuropojo strypu iki taško A, įveikdama $\frac{2}{3}$ strypo ilgio (žr. pav.). Boružėlė nuropojo nuo dešiniojo galo iki taško B, įveikdama $\frac{3}{4}$ strypo ilgio. Kokią strypo ilgio dalį sudaro atstumas tarp A ir B?

A) $\frac{3}{8}$ **B)** $\frac{1}{12}$ **C)** $\frac{5}{7}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{5}{12}$

12. Lygiai šeštadalis teatro žiūrovų buvo suaugusieji. Lygiai du penktadaliai vaikų buvo berniukai. Kokią visų žiūrovų dalį sudarė mergaitės?
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{2}{5}$

13. Paveikslėlyje laužtė ir brūkšninė linija sudaro 7 lygiakraščius trikampius (žr. pav.). Brūkšninės linijos ilgis lygus 20. Kam lygus laužtės ilgis?

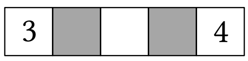


A) 35 **B)** 30 **C)** 40 **D)** 45 **E)** 60

14. Keturios pusseserės – Austėja, Elena, Evelina ir Sofija – yra 3, 8, 12 ir 14 metų amžiaus (nebūtinai šia tvarka). Austėja yra jaunesnė už Eveliną, Austėjos ir Sofijos amžių suma dalijasi iš 5, Evelinos ir Sofijos amžių suma taip pat dalijasi iš 5. Kiek metų yra Elenai?
A) 14 **B)** 12 **C)** 8 **D)** 5 **E)** 3

15. Šiemet maratone „Kengūra“ dalyvavo daugiau nei 800 bėgikų. Lygiai 35% bėgikų buvo moterys. Tarp visų bėgikų vyrų buvo 252 daugiau negu moterų. Kiek iš viso bėgikų dalyvavo maratone?
A) 802 **B)** 810 **C)** 822 **D)** 824 **E)** 840

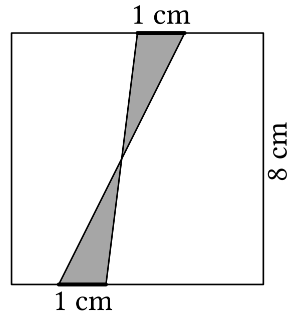
16. Raminta į kiekvieną paveikslėlyje pavaizduotą langelį įrašo po vieną skaičių. Du skaičius ji jau įrašė (žr. pav.). Raminta nori, kad visų langeliuose įrašytų skaičių suma būtų lygi 35, pirmuose trijuose langeliuose įrašytų skaičių suma būtų lygi 22, o paskutiniuose trijuose langeliuose įrašytų skaičių suma būtų lygi 25. Kam lygi skaičių, kuriuos Raminta turi įrašyti užtušuotuose langeliuose, sandauga?



A) 63 **B)** 108 **C)** 0 **D)** 48 **E)** 39

17. Gerda norėjo juostą padalyti į 9 vienodo ilgio dalis ir pažymėjo juostoje kirpimo taškus. Austėja tą pačią juosta norėjo sukarpyti į 8 vienodo ilgio dalis ir joje taip pat pažymėjo kirpimo taškus. Evelina perkirpo juostą kiekviename Gerdos arba Austėjos pažymėtame taške. Į kiek dalių buvo padalyta juosta?
A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

18. Kvadrato, kurio kraštinės ilgis lygus 8 cm, priešingose kraštinėse pažymėtos 1 cm ilgio atkarpos, o jų galai sujungti, kaip parodyta paveikslėlyje. Kam lygus užtušuotos kvadrato dalies plotas?
A) 6,4 cm^2 **B)** 2 cm^2 **C)** 8 cm^2 **D)** 10 cm^2 **E)** 4 cm^2



19. Simonas sudarinėja savo bėgimo treniruočių tvarkaraštį. Jis nori treniruotis lygiai dvi dienas per savaitę, bet negali treniruotis dvi dienas iš eilės. Be to, jis nori, kad treniruotės visada vyktų tomis pačiomis savaitės dienomis. Kiek iš viso skirtingų tvarkaraščių Simonas gali sudaryti?
A) 16 **B)** 14 **C)** 12 **D)** 10 **E)** 8

20. Adomas 3×3 lentelės kiekviename langelyje įrašė po vieną skaičių. Paaiškėjo, kad bet kuriuose dviejuose gretimuose (turinčiuose bendrą kraštinę) langeliuose įrašytų skaičių suma yra ta pati. Du Adomo įrašytus skaičius matome paveikslėlyje. Kam lygi visų lentelėje įrašytų skaičių suma?
A) 18 **B)** 20 **C)** 21 **D)** 22 **E)** 23

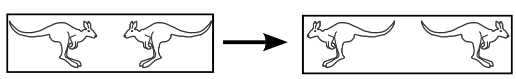
2		
		3

Klausimai po 5 taškus

21. Trikampio kampų dydžiai laipsniais yra trys skirtingi natūralieji skaičiai. Kam lygi mažiausia įmanoma tokio trikampio mažiausio ir didžiausio kampų suma?
A) 61° **B)** 90° **C)** 91° **D)** 120° **E)** 121°

22. Dešimt kengūrų stovi vienoje eilėje (žr. 1 pav). Jei dvi gretimos kengūros stovi atsisukusios viena į kitą, jos sukeičiamos vietomis (žr. 2 pav.) Taip kartojama, kol nebeįmanoma sukeisti jokių dviejų kengūrų.

1 pav.



2 pav.

Kiek sukeitimų bus padaryta?
A) 15 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 21

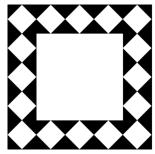
23. Dėžutėje yra tik raudoni ir žali rutuliai. Iš bet kurių paimtų 5 rutulių bus bent 1 raudonas, o iš bet kurių 6 rutulių bus bent 1 žalias. Kiek daugiausiai rutulių gali būti dėžutėje?

A) 11 **B)** 10 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 7

24. 3 maršruto autobusas iš oro uosto į miesto centrą išvyksta kas 3 minutes ir miesto centrą pasiekia lygiai per 60 minučių. Taksi iš oro uosto išvažiavo kartu su 3 maršruto autobusu ir per 35 minutes, važiuodamamas šio autobuso maršrutu, pasiekė miesto centrą. Kiek 3 maršruto autobusų aplenkė taksi, važiuodamas iš oro uosto į miesto centrą (neskaitant autobuso, su kuriuo taksi kartu išvažiavo iš oro uosto)?

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 13

25. Kvadrato formos staltiesė išmarginta baltais kvadratais. Kokią šios staltiesės ploto dalį procentais sudaro juodoji jos dalis?

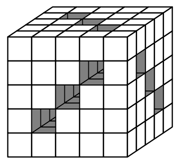


A) 16 **B)** 24 **C)** 25 **D)** 32 **E)** 36

26. Kiekvienas sekos 2, 3, 6, 8, 8, ... skaičius, pradedant trečiuoju, lygus prieš jį esančių dviejų paskutinių skaičių sandaugos paskutiniam (vienetų) skaitmeniui. Kam lygus šios sekos 2017-asis skaičius?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

27. Julija turi 125 kubelius. Paėmusi dalį šių kubelių ji sudėjo didesnį kubą su devyniais „tuneliais“ kiaurai šio kubo (žr. pav.). Kiek kubelių liko Julijai?

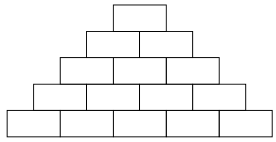


A) 36 **B)** 39 **C)** 42 **D)** 45 **E)** 52

28. Du bėgikai treniruojasi stadione bėgiodami ratu. Stadiono viso rato ilgis lygus 720 m. Jie bėga priešingomis kryptimis ir kiekvienas pastoviu greičiu. Pirmasis bėgikas pilną ratą apie stadioną nubėga per keturias minutes, o antrasis – per penkias minutes. Kiek metrų nubėga antrasis bėgikas tarp dviejų paeilių prasilenkimų su pirmuoju bėgiku?

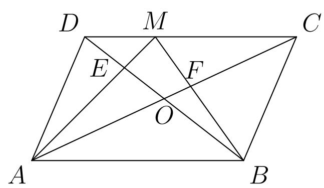
A) 355 **B)** 350 **C)** 340 **D)** 330 **E)** 320

29. Paveikslėlyje pavaizduota piramidė, sudaryta iš penkiolikos stačiakampių plytelių. Gerda ant kiekvienos plytelės užrašė po vieną natūralųjį skaičių. Ant kiekvienos plytelės, išskyrus penkias pagrindo plyteles, užrašytas skaičius lygus po ja esančių dviejų plytelių skaičių sumai. Kiek daugiausiai nelyginių skaičių Gerda galėjo užrašyti ant šios piramidės plytelių?



A) 5 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 11

30. Paveikslėlyje pavaizduotas lygiagretainis $ABCD$, kurio plotas lygus S. Jo įstrižainių susikirtimo taškas yra O. Kraštinėje CD pažymėtas taškas M. Atkarpų AM ir BD susikirtimo taškas yra E, o atkarpų BM ir AC – taškas F. Trikampių AED ir BFC plotų suma lygi $\frac{1}{3}S$. Kam lygus keturkampio $EOFM$ plotas?



A) $\frac{1}{14}S$ **B)** $\frac{1}{12}S$ **C)** $\frac{1}{10}S$ **D)** $\frac{1}{8}S$ **E)** $\frac{1}{6}S$

Kadeto užduočių sprendimai

1. (B) 10:00

! Dabar laikrodis rodo 17:00. Po 7 valandų laikrodis rodys vidurnaktį. Dar po 10 valandų laikrodis rodys 10.00. Taigi jei dabar laikrodis rodo 17:00, tai po 17 valandų jis rodys 10:00.

Teisingas atsakymas **B**.

2. (C) 11

! Elenai iš kairės tarp jos ir Gerdos stovi lygiai trys mergaitės. Panašiai, Elenai iš dešinės tarp jos ir Gerdos stovi šešios mergaitės. Vadinasi, ratelyje iš viso stovi $1+1+3+6 = 11$ mergaičių.

Teisingas atsakymas **C**.

3. (C) 16

! Ieškomą skaičių pažymėkime x. Tada pagal sąlygą $-17 - x = -33$. Iš čia gauname $x = 16$.

Teisingas atsakymas **C**.

4. (D) $10^{2017} + 2018$

! Pasinaudosime dalumo iš 3 požymiu: natūralusis skaičius dalijasi iš 3 tada ir tik tada, kai jo skaitmenų suma dalijasi iš 3. Atsakyme pateiktų skaičių skaitmenų sumos atitinkamai yra lygios 1, 10, 11, 12 ir 13. Tik skaičius 12 dalijasi iš 3, todėl atitinkamas skaičius $10^{2017} + 2018$ dalijasi iš 3.

Teisingas atsakymas **D**.

5. (D) 2468642

! Kadangi $1111 \times 2222 = 2 \cdot (1111 \times 1111)$, tai $1111 \times 2222 = 2 \cdot 1234321 = 2468642$.

Teisingas atsakymas **D**.

6. (E) 24

! Mažesniojo stačiakampio trumpesniosios kraštinės ilgį pažymėkime a, o ilgesniosios – pažymėkime b. Sąlygos paveikslėlyje matyti, kad didesniojo stačiakampio trumpesniosios ir ilgesniosios kraštinių ilgiai atitinkamai yra $a+2+3 = a+5$ ir $b+3+4 = b+7$. Taigi mažesniojo stačiakampio perimetras lygus $2(a+b)$, o didesniojo – lygus $2(a+5+b+7) = 2(a+b)+24$. Vadinasi, šių stačiakampių perimetrų skirtumas lygus 24.

Teisingas atsakymas **E**.

7. (D)

! Jei Adomas popieriaus lapą perlenktų, kaip pavaizduota atsakymo variante A, B arba C, tai gautų figūrą, sudarytą iš 4 vienodų lapo sluoksnių. Tokioje figūroje išmušta skylė atsirastų kiekviename sluoksnyje. Vadinasi, atlankstytame popieriaus lape būtų 4 skylės. Panašiai gauname, kad jei Adomas popieriaus lapą perlenktų, kaip pavaizduota atsakymo variante E, tai gautų figūrą, sudarytą iš 3 vienodų lapo sluoksnių. Tokioje figūroje išmušta skylė atsirastų kiekviename sluoksnyje. Vadinasi, atlankstytame popieriaus lape būtų 3 skylės. Liko atsakymo variantas D. Nesunku įsitikinti, kad Adomas popieriaus lape, perlenktame, kaip pavaizduota atsakymo variante D, gali taip išmušti skylę, kad atlankstytame popieriaus lape būtų lygiai dvi skylės, kaip pavaizduota uždavinio sąlygos paveikslėlyje.

Teisingas atsakymas **D**.

8. (D) 8

! Tegul $a < b < c$ – trys skirtingi natūralieji skaičiai, kurių suma lygi 7. Nesunku įsitikinti, kad tada $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$. Iš tikrųjų, kadangi $a \geqslant 1$, tai $b \geqslant 2$. Jei $b \geqslant 3$, tai $c \geqslant 4$ ir $a+b+c \geqslant 1+3+4 = 8$. Taip būti negali. Todėl $b = 2$. Tada $a = 1$ ir iš lygybės $a+b+c = 7$ randame, kad $c = 7 - a - b = 7 - 1 - 2 = 4$. Vadinasi, tų skaičių sandauga lygi $1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$.

Teisingas atsakymas **D**.

9. (B) 10

! Didžiausios užtušuotos, didžiausios baltos, mažiausios užtušuotos ir mažiausios baltos širdies formos figūrų plotus pažymėkime atitinkamai S_1, S_2, S_3 ir S_4. Iš paveikslėlio matyti, kad $S_1 > S_2 > S_3 > S_4$. Todėl $S_1 = 16$, $S_2 = 9$, $S_3 = 4$ ir $S_4 = 1$. Paveikslėlyje pavaizduotos užtušuotos figūros plotas lygus $(S_1 - S_2) + (S_3 - S_4) = (16 - 9) + (4 - 1) = 10$.

Teisingas atsakymas **B**.

10. (A) 2

! Visos penkios seserys kartu turi $20 + 4 \cdot 10 = 60$ eurų. Jei seserys šiuos pinigus pasidalytų po lygiai, tai kiekviena iš jų turėtų po $\frac{60}{5} = 12$ eurų. Vadinasi, Sofija kiekvienai savo seseriai turi duoti po 2 eurus.

Teisingas atsakymas **A**.

11. (E) $\frac{5}{12}$

! Taško A atstumas iki strypo dešiniojo galo lygus $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ šio strypo ilgio, o taško B atstumas iki strypo kairiojo galo lygus $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ šio strypo ilgio. Vadinasi, atstumas tarp taškų A ir B lygus $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ strypo ilgio.

Teisingas atsakymas **E**.

12. (A) $\frac{1}{2}$

! Kadangi šeštadalis teatro žiūrovų buvo suaugusieji, tai $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ šio teatro žiūrovų buvo vaikai. Du penktadaliai vaikų buvo berniukai, todėl trys penktadaliai vaikų buvo mergaitės. Taigi $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$ visų teatro žiūrovų buvo mergaitės.

Teisingas atsakymas **A**.

13. (C) 40

! Laužtė yra dvigubai ilgesnė už brūkšninę liniją, nes dvi kiekvieno lygiakraščio trikampio kraštinės priklauso laužtei, o trečioji kraštinė – brūkšninei linijai. Vadinasi, laužtės ilgis lygus $2 \cdot 20 = 40$.

Teisingas atsakymas **C**.

14. (A) 14

! Kadangi Austėjos ir Sofijos amžių suma dalijasi iš 5 ir Evelinos bei Sofijos amžių suma dalijasi iš 5, tai Austėjos ir Evelinos amžių skirtumas dalijasi iš 5. Vadinasi, Austėjos ir Evelinos amžių dalybos iš 5 liekanos sutampa. Kita vertus, skaičių 3, 8, 12 ir 14 dalybos iš 5 liekanos atitinkamai yra 3, 3, 2 ir 4. Taigi Austėja yra 3 metų amžiaus, o Evelina – 8 metų amžiaus (Austėja yra jaunesnė už Eveliną). Be to, Austėjos ir Sofijos amžių suma dalijasi iš 5. Todėl Sofija yra 12 metų amžiaus. Taigi Elena yra 14 metų amžiaus.

Teisingas atsakymas **A**.

Pastaba. Sąlyga „Austėja yra jaunesnė už Eveliną“ atliekama.

15. (E) 840

! Kadangi tarp visų dalyvių vyrų buvo 252 daugiau negu moterų, tai šie 252 vyrai sudaro $65 - 35 = 30\%$ visų dalyvių. Vadinasi, $\frac{252}{3} = 84$ dalyviai sudaro $\frac{30}{3} = 10\%$ visų dalyvių. Taigi iš viso maratone dalyvavo $10 \cdot 84 = 840$ dalyvių.

Teisingas atsakymas **E**.

16. (A) 63

! Skaičius, kuriuos Raminta turi įrašyti antrame, trečiame ir ketvirtame langeliuose atitinkamai pažymėkime a, b ir c. Pagal uždavinio sąlygą, $3 + a + b + c + 4 = 35$, $3 + a + b = 22$ ir $b + c + 4 = 25$. Iš pirmosios lygybės atėmę antrąją, gauname $c = 9$, o iš pirmosios atėmę trečiąją, gauname $a = 7$. Taigi skaičių, kuriuos Raminta turi įrašyti užtušuotuose langeliuose, sandauga lygi $7 \cdot 9 = 63$.

Teisingas atsakymas **A**.

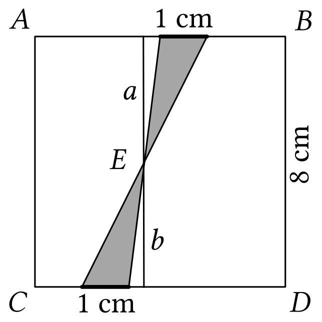
17. (B) 16

! Juostos ilgį pažymėkime $72a$. Tada Gerda pažymėjo taškus, nutolusius nuo kairiojo krašto $8a$, $16a$, $24a$, $32a$, $40a$, $48a$, $56a$, $64a$, o Austėja $9a$, $18a$, $27a$, $36a$, $45a$, $54a$, $63a$. Iš viso buvo $8 + 7 = 15$ pažymėtų taškų, taigi juosta buvo padalinta į $15 + 1 = 16$ dalių.

Teisingas atsakymas **B**.

18. (E) 4 cm^2

! Per dviejų atkarpų, ribojančių užtušuotą kvadrato sritį, susikirtimo tašką E išveskime atkarpą (žr. pav.), statmeną kvadrato kraštinei AB.



Taškas E šią atkarpą dalija į dvi dalis, kurių ilgius centimetrais pažymėkime a ir b (žr. pav.). Tada $a+b = 8$. Viršutinio užtušuoto trikampio aukštinės, nuleistos iš viršūnės E, ilgis lygus a. Todėl šio trikampio plotas lygus $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot a = \frac{a}{2}$. Panašiai gauname, kad apatinio užtušuoto trikampio plotas lygus $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot b = \frac{b}{2}$. Taigi užtušuotos kvadrato dalies plotas lygus $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

Teisingas atsakymas **E**.

19. (B) 14

! Pastebėsime, kad pasirinkęs pirmą treniruočių dieną, Simonas antrąją dieną gali pasirinkti lygiai 4 būdais. (Jei pirmadienis bus pirmoji Simono treniruočių savaitės diena, tai antroji gali būti bet kuri iš likusiųjų savaitės dienų, išskyrus antradienį ir sekmadienį.) Taigi dvi savaitės dienas savo treniruotėms Simonas gali pasirinkti lygiai $7 \cdot 4 = 28$ būdais. Tačiau taip skaičiuodami kiekvieną tvarkaraštį suskaičiuojame po du kartus. Todėl Simonas iš viso gali sudaryti $\frac{28}{2} = 14$ tvarkaraščių savo treniruotėms.

Teisingas atsakymas **B**.

20. D 22

! Lentelės pirmosios eilutės pirmajame ir antrajame langeliuose įrašytų skaičių suma lygi šios eilutės antrajame ir trečiajame langeliuose įrašytų skaičių sumai. Vadinasi, šios eilutės trečiame langelyje Adomas įrašė 2. Šiam langeliui gretimame langelyje (antrosios eilutės trečiajame langelyje) įrašytas skaičius 3. Vadinasi, bet kuriuose dviejuose gretimuose langeliuose įrašytų skaičių suma lygi $2 + 3 = 5$. Dabar jau aišku, kaip Adomas užpildė visą lentelę: jei kuriame nors langelyje yra skaičius 2, tai gretimuose langeliuose jis įrašė skaičių 3; ir atvirkščiai, jei langelyje yra 3, tai gretimuose langeliuose jis įrašė skaičių 2. Paveikslėlyje matyti Adomo užpildyta lentelė.

2	3	2
3	2	3
2	3	2

Taigi visų lentelėje įrašytų skaičių suma lygi $5 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 22$.

Teisingas atsakymas **D**.

21. C 91°

! Nagrinėkime trikampį, kurio kampų didumai laipsniais yra skirtingi natūralieji skaičiai. Šio trikampio kampų didumus laipsniais pažymėkime a, b ir c. Nemažindami bendrumo galime laikyti, kad $a < b < c$. Trikampio kampų suma lygi 180°, todėl $a + b + c = 180$. Pritaikę nelygybes $a \geqslant 1$ ir $c \geqslant b + 1$, gauname $180 = a + b + c \geqslant 1 + b + b + 1 = 2b + 2$. Iš čia išplaukia nelygybė $b \leqslant 89$. Tuomet mažiausio ir didžiausio kampų suma $a + c = 180 - b \geqslant 180 - 89 = 91$. Kita vertus, tokia suma įmanoma: trikampio, kurio kampų didumai yra 1°, 89° ir 90°, mažiausio ir didžiausio kampų suma lygi $1^\circ + 90^\circ = 91^\circ$.

Teisingas atsakymas **C**.

22. C 18

! Per pirmąsias tris kengūras (skaičiuojant iš kairės pusės) turės peršokti ketvirtoji, penktoji, devintoji ir dešimtoji kengūros. Tokiu būdu iš viso bus padaryta $3 \cdot 4 = 12$ sukeitimų. Kita vertus, per šeštąją, septintąją ir aštuntąją kengūras turės peršokti tik devintoji ir dešimtoji kengūros; bus padaryti dar $3 \cdot 2 = 6$ sukeitimai. Vadinasi, po $12 + 6 = 18$ sukeitimų nebebus įmanoma sukeisti vietomis jokių dviejų kengūrų.

Teisingas atsakymas **C**.

23. (C) 9

! Kadangi tarp bet kurių 5 rutulių yra bent vienas raudonas, tai dėžėje yra ne daugiau negu 4 žali rutuliai (iš tikrųjų, jei būtų bent 5 žali rutuliai, tai mes ir paimtume 5 žalius rutulius). Panašiai gauname, kad dėžėje yra ne daugiau negu 5 raudoni rutuliai, nes tarp bet kurių 6 rutulių yra bent vienas žalias. Taigi dėžėje yra ne daugiau negu $4+5=9$ rutuliai. Kita vertus, jei dėžėje yra lygiai 4 žali ir 5 raudoni rutuliai, tai uždavinio sąlyga yra tenkinama.

Teisingas atsakymas **C**.

24. (A) 8

! Taksi išvykimo iš oro uosto momentu kelyje į miesto centrą buvo autobusai, kurie iš oro uosto išvyko prieš 3 min, 6min, 9 min, $\ldots$, 57 min. Iš viso tokių autobusų buvo $\frac{57}{3}=19$ (autobuso, su kuriuo taksi kartu išvyko į miesto centrą, neskaičiuojame). Taksi neaplenkė 3 maršruto autobusų, kuriems taksi išvykimo momentu iki miesto centro buvo likę važiuoti ne daugiau negu 35 min, t. y. neaplenkė tų 3 maršruto autobusų, kuriems iki centro buvo likę važiuoti 3 min, 6 min, 9 min, $\ldots$, 33 min. Iš viso tokių autobusų buvo $\frac{33}{3}=11$. Taigi taksi, važiuodamas iš oro uosto į miesto centrą, aplenkė lygiai $19-11=8$ trečiojo maršruto autobusus.

Teisingas atsakymas **A**.

25. (D) 32

! Staltiesės mažojo baltojo kvadratėlio kraštinės ilgį pažymėkime a. Tada šio kvadratėlio įstrižainės ilgis lygus $\sqrt{2}a$, o jo plotas lygus a^2. Paveikslėlyje matyti, kad staltiesės centre esančio didžiojo baltojo kvadrato kraštinės ilgis yra tris kartus didesnis už mažojo baltojo kvadratėlio įstrižainės ilgį. Taigi staltiesės centre esančio baltojo kvadrato plotas lygus $(3\sqrt{2}a)^2=18a^2$. Kita vertus, visos staltiesės kvadrato kraštinės ilgis yra penkis kartus didesnis už mažojo baltojo kvadratėlio įstrižainės ilgį. Todėl visos staltiesės plotas lygus $(5\sqrt{2}a)^2=50a^2$. Be to, juodosios staltiesės dalies plotas S gaunamas iš staltiesės ploto atėmus visų mažųjų baltųjų kvadratėlių (kurių yra 16) plotus ir centre esančio baltojo kvadrato plotą, t. y.

$$S=50a^2-16\cdot a^2-18a^2=16a^2.$$

Vadinasi, juodosios staltiesės dalies plotas sudaro $\frac{16a^2}{50a^2}\cdot 100=32\%$ visos staltiesės ploto.

Teisingas atsakymas **D**.

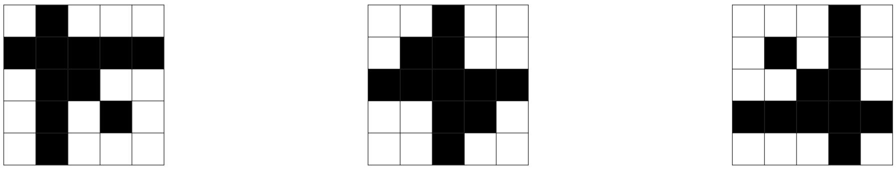
26. (A) 2

! Parašykime dešimt pirmųjų sekos narių: 2, 3, **6, 8, 8, 4, 2, 8**, 6, 8. Matome, kad pradedant trečiuoju nariu seka periodiškai kartojasi kas šeši nariai. Vadinasi, kas šeštas sekos narys, pradedant septintuoju, lygus 2. Kadangi $2017=7+6\cdot 335$, tai 2017-asis sekos narys lygus 2.

Teisingas atsakymas **A**.

27. B 39

! Julijos sudėtas kubas sudarytas iš penkių 5×5 sluoksnių, sudėtų vienas ant kito. Kubo pagrindo 5×5 sluoksnyje Julija nepanaudojo 3 kubelių. Taip pat ir viršutiniame 5×5 sluoksnyje Julija nepanaudojo 3 kubelių. Paveikslėlyje paeiliui pavaizduoti Julijos sudėto kubo trys viduriniai 5×5 sluoksniai (pradedant sluoksniu, uždėtu ant pagrindo sluoksnio); sluoksnio kvadratėlis užtušuotas, jei atitinkamas kubelis priklauso kuriam nors „tuneliui“.



Taigi pirmame ir penktame sluoksniuose Julija nepanaudojo po 3 kubelius, o trijuose viduriniuose sluoksniuose nepanaudojo po 11 kubelių. Vadinasi, Julija iš viso nepanaudojo $2 \cdot 3 + 3 \cdot 11 = 39$ kubelių.

Teisingas atsakymas **B**.

28. E 320

! Sakykime, kad tarp dviejų betarpiškų prasilenkimų praeina t minučių. Pirmojo bėgiko greitis yra $\frac{720}{4} = 180$ m/min, o antrojo – $\frac{720}{5} = 144$ m/min. Vadinasi, pirmasis bėgikas per t minučių nubėga $180t$ metrų, o antrasis – $144t$ metrų. Be to, tarp dviejų betarpiškų prasilenkimų bėgikai kartu nubėga viso stadiono ilgį, todėl

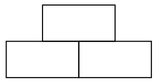
$$180t + 144t = 720.$$

Iš čia gauname, kad $t = \frac{20}{9}$ min. Taigi antrasis bėgikas tarp dviejų betarpiškų prasilenkimų nubėga $144 \cdot \frac{20}{9} = 320$ metrų.

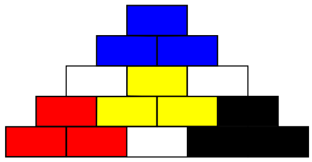
Teisingas atsakymas **E**.

29. D 10

! Bet kurioje „trijulėje“



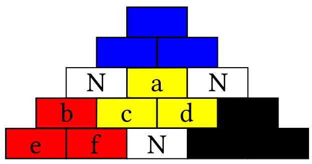
Gerda galėjo parašyti ne daugiau negu du nelyginius skaičius. 1 pav. tušavimu išskirtos keturios tokios trijulės.



1 pav.

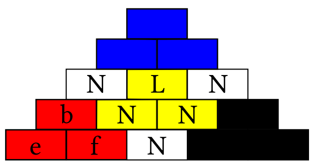
Vadinasi, šiose keturiose trijulėse Gerda galėjo užrašyti daugiausiai aštuonis nelyginius skaičius. Todėl Gerda ant visų piramidės plytelių iš viso galėjo užrašyti ne daugiau kaip $8 + 3 = 11$ nelyginių skaičių.

Įrodysime, kad Gerda ant piramidės plytelių negalėjo užrašyti 11 nelyginių skaičių. Iš tikrųjų, tarkime, kad Gerda ant piramidės plytelių iš viso užrašė 11 nelyginių skaičių. Sutarkime plytelę žymėti raide L, jei ant jos parašytas lyginis skaičius ir raide N – jei ant jos užrašytas skaičius yra nelyginis. Tada 1 pav. kiekvienoje trijulėje Gerda užrašė po du nelyginius skaičius, o ant likusių trijų plytelių taip pat užrašė nelyginius skaičius (žr. 2 pav.):



2 pav.

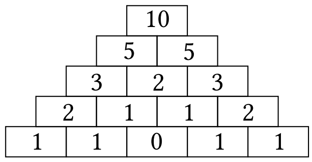
Ant plytelės, pažymėtos raide a, negali būti užrašytas nelyginis skaičius, nes tada ant visų trijų piramidės viršūnėje esančių plytelių būtų užrašyti lyginiai skaičiai. Vadinasi, ant plytelės a užrašytas lyginis skaičius, todėl ant plytelių c ir d užrašyti nelyginiai skaičiai (žr. 3 pav.):



3 pav.

Ant plytelės b užrašytas lyginis skaičius, nes ant plytelių b ir c užrašytų skaičių suma yra nelyginis skaičius. Bet tada ant plytelių e ir f užrašyti nelyginiai skaičiai (kiekvienoje trijulėje užrašyti lygiai du nelyginiais skaičiai). Tačiau dabar po plytele c, ant kurios užrašytas nelyginis skaičius, esančiose dviejose plytelėse užrašytų skaičių suma yra lyginis skaičius. Taip būti negali. Gauta prieštara įrodo, kad Gerda ant piramidės plytelių galėjo užrašyti ne daugiau negu dešimt nelyginių skaičių.

4 pav. pavyzdyje matyti, kad Gerda iš tikrųjų galėjo ant piramidės plytelių iš viso užrašyti dešimt nelyginių skaičių.



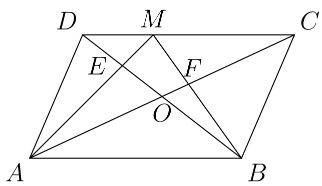
4 pav.

Teisingas atsakymas **D**.

30. (B) $\frac{1}{12}S$

! Lygiagretainio įstrižainės susikirsdamos jį dalija į keturis vienodo ploto trikampius, todėl $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC} = S_{\triangle AOB} = \frac{1}{4}S$. Kadangi $S_{\triangle AED} + S_{\triangle BFC} = \frac{1}{3}S$, tai

$$S_{\triangle AEO} + S_{\triangle BOF} = S_{\triangle AOD} + S_{\triangle BOC} - S_{\triangle AED} - S_{\triangle BFC} = \frac{1}{2}S - \frac{1}{3}S = \frac{1}{6}S.$$



Be to, trikampio AMB plotas lygus pusei lygiagretainio $ABCD$ ploto, nes jo pagrindas sutampa su šio lygiagretainio kraštine AB, o aukštinė, išvesta iš viršūnės M, lygi lygiagretainio $ABCD$ aukštinei, išvestai iš viršūnės D į kraštinę AB. Vadinasi,

$$S_{EOFM} = S_{\triangle AMB} - S_{\triangle AOB} - S_{\triangle AEO} - S_{\triangle BOF} = \frac{1}{2}S - \frac{1}{4}S - \frac{1}{6}S = \frac{1}{12}S.$$

Teisingas atsakymas **B**.