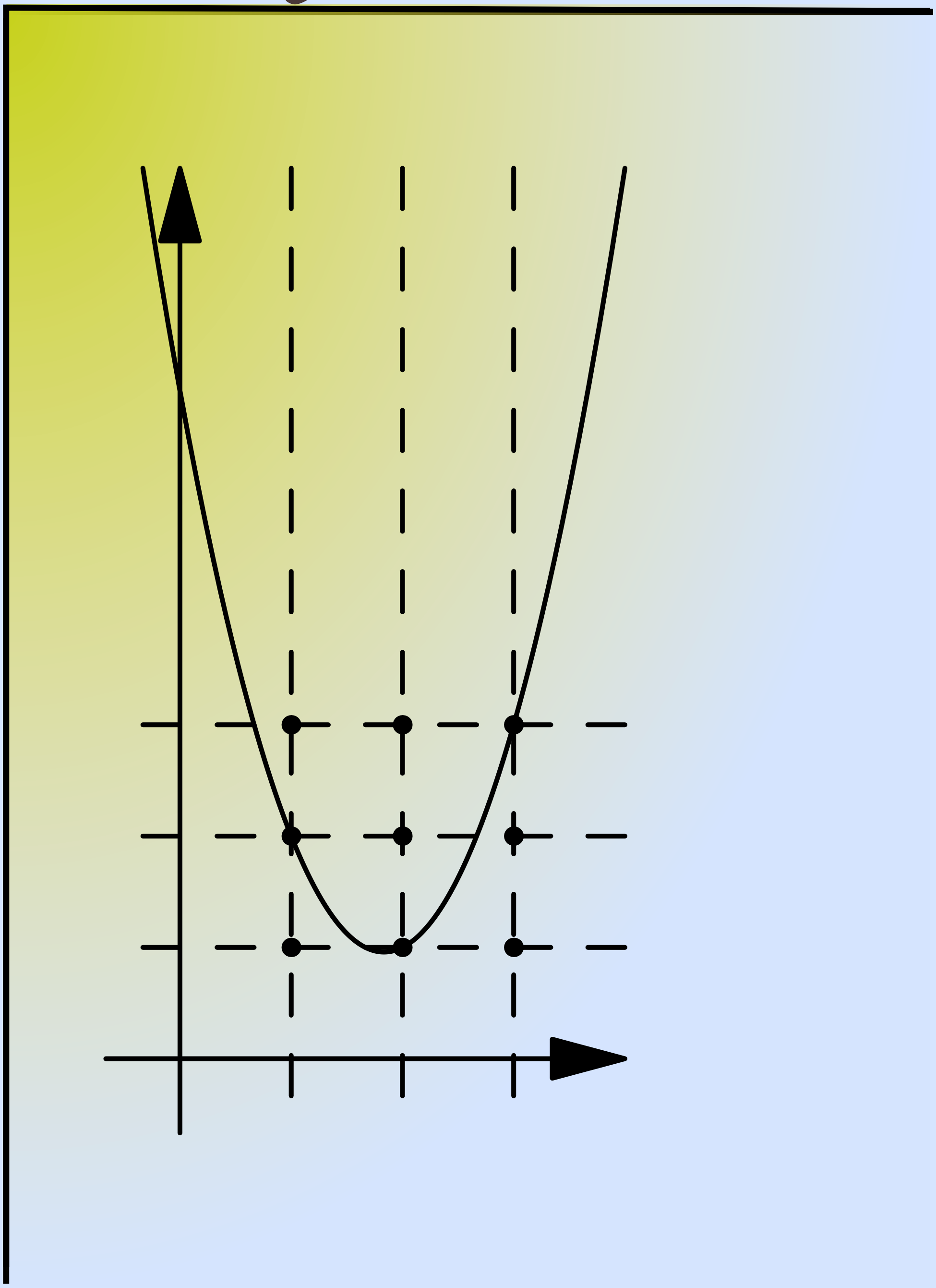
Kengūra

SENJORAS



Uždavinys ir sprendimai
2016

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VU MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
VU MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2019. SENJORAS

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Maketavimas
Jonas Šiurys

Viršelio autorė
Ugnė Šiurienė

Turinys

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 49000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2019 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

75 lemtingos darbo minutės kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikos draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2019 metų kovo 17 dieną keliavo ir gausiai sprendė 11–12 klasių (*Senjoro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

Senjoras, 11 klasė, 50 geriausiųjų

Vadovaujantis 2018 m. gegužės 25 d. įsigaliojusiu Europos Sąjungos bendruoju duomenų apsaugos reglamentu, asmeniniai mokinių **rezultatai nebeskelbiami**. Dėkojame už supratingumą.

Konkurso organizatoriai

Senjoras, 12 klasė, 50 geriausiųjų

Vadovaujantis 2018 m. gegužės 25 d. įsigaliojusiu Europos Sąjungos bendruoju duomenų apsaugos reglamentu, asmeniniai mokinių **rezultatai nebeskelbiami**. Dėkojame už supratingumą.

Konkurso organizatoriai

Tarptautinis matematikos konkursas KENGŪRA

Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys:

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras

Mokyklos pavadinimas

Kalba

Lietuvių	☐
Lenkų	☐
Rusų	☐
Anglų	☐

	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
Klasė	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	**7**	☐	☐	☐	☐	☐	**13**	☐	☐	☐	☐	☐	**19**	☐	☐	☐	☐	☐	**25**	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	**8**	☐	☐	☐	☐	☐	**14**	☐	☐	☐	☐	☐	**20**	☐	☐	☐	☐	☐	**26**	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	**9**	☐	☐	☐	☐	☐	**15**	☐	☐	☐	☐	☐	**21**	☐	☐	☐	☐	☐	**27**	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	**10**	☐	☐	☐	☐	☐	**16**	☐	☐	☐	☐	☐	**22**	☐	☐	☐	☐	☐	**28**	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	**11**	☐	☐	☐	☐	☐	**17**	☐	☐	☐	☐	☐	**23**	☐	☐	☐	☐	☐	**29**	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	**12**	☐	☐	☐	☐	☐	**18**	☐	☐	☐	☐	☐	**24**	☐	☐	☐	☐	☐	**30**	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

2016 m. *Senjoro* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

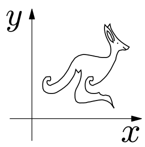
1. Rimui ir Romui per abu yra 23 metai, Romui ir Remui – 24 metai, o Remui ir Rimui – 25 metai. Kiek metų yra vyriausiam iš jų?
A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

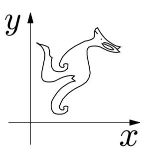
2. Reiškinio $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$ reikšmė lygi
A) $\frac{3}{111}$ **B)** $\frac{111}{1110}$ **C)** $\frac{111}{1000}$ **D)** $\frac{3}{1000}$ **E)** $\frac{3}{1110}$

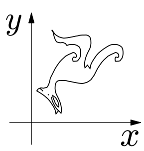
3. Rūta atsakė į kiekvieną iš 30 testo klausimų, bet dalis atsakymų buvo klaidingi. Teisingų atsakymų skaičius buvo 50% didesnis už klaidingų atsakymų skaičių. Į kelis klausimus Rūta atsakė teisingai?
A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 20

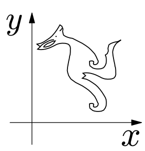
4. Kiek yra natūraliųjų skaičių, didesnių už $2015 \cdot 2017$, bet mažesnių už $2016 \cdot 2016$?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2015 **D)** 2016 **E)** 2017

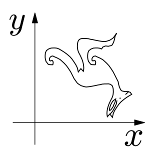
5. Dešinėje pavaizduota kengūra yra plokštumos Oxy taškų aibė. Kiekvieno taško koordinatės x ir y sukeičiamos vietomis: $(x, y) \mapsto (y, x)$. Taip gaunamas naujas vaizdas. Kuris?

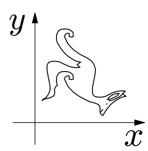


A) 

B) 

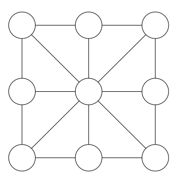
C) 

D) 

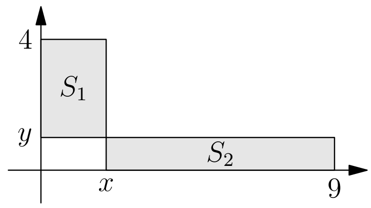
E) 

6. Lukas, dar neišmokęs rašyti neigiamųjų skaičių su minusu priekyje, sugalvojo savo žymėjimo būdą. Sveikuosius skaičius mažėjimo tvarka jis rašo taip: …, 3, 2, 1, 0, 00, 000, 0000, … . Kaip Lukas užrašytų sumos 000 + 0000 rezultatą?
A) 1 **B)** 00000 **C)** 000000 **D)** 0000000 **E)** 00000000

7. Daina į skritulius paveikslėlyje turi įrašyti po skaičių taip, kad kiekvieno iš 8 vienodų mažųjų trikampėlių viršūnėse įrašytų skaičių suma būtų ta pati. Kiek daugiausiai skirtingų skaičių ji gali panaudoti?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 8



8. Stačiakampiai S_1 ir S_2 (žr. pav.) lygiapločiai. Raskite santykį $\frac{x}{y}$.
A) 1 **B)** $\frac{3}{2}$ **C)** $\frac{4}{9}$ **D)** $\frac{13}{5}$ **E)** $\frac{9}{4}$

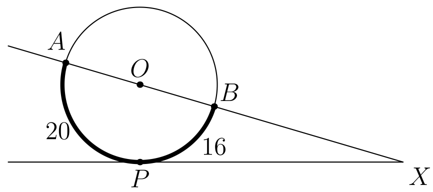


9. Jei $x^2 - 4x + 2 = 0$, tai $x + \frac{2}{x} =$
A) -4 **B)** -2 **C)** 0 **D)** 2 **E)** 4

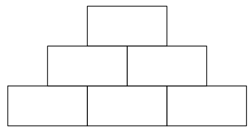
10. Natūralieji skaičiai, a, b, c, d tenkina lygybes $a + 2 = b - 2 = c \cdot 2 = d : 2$. Kuris iš skaičių a, b, c, d didžiausias?
A) a **B)** b **C)** c **D)** d **E)** Neįmanoma nustatyti

Klausimai po 4 taškus

11. Apskritimo su centru O lankų AP ir BP ilgiai atitinkamai lygūs 20 ir 16 (žr. pav.). Raskite $\angle AXP$.
A) 30° **B)** 24° **C)** 18° **D)** 15° **E)** 10°



12. Skaičių piramidės (žr. pav.) apatinėje eilutėje įrašyti natūralieji skaičiai, didesni už 1. Kiekvienas iš likusių skaičių lygus betarpiškai po juo esančių dviejų skaičių sandaugai. Kurio skaičiaus negali būti piramidės viršūnėje?
A) 56 **B)** 84 **C)** 90 **D)** 105 **E)** 220



13. Seką $x_1, x_2, \ldots$ apibrėžia lygybės: $x_1 = 2$ ir $x_{n+1} = x_n^{x_n}$, kai $n \geqslant 1$. Kam lygu x_4?
A) 2^{2^3} **B)** 2^{2^4} **C)** $2^{2^{11}}$ **D)** $2^{2^{16}}$ **E)** $2^{2^{768}}$

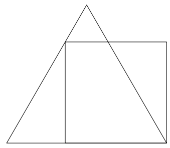
14. Stačiakampio $ABCD$ kraštinė BC perpus trumpesnė už įstrižainę AC. Kraštinės CD taškas M tenkina lygybę $AM = MC$. Raskite $\angle CAM$.
A) 12,5° **B)** 15° **C)** 27,5° **D)** 42,5° **E)** Kitas atsakymas

15. Kiek yra skirtingų stačiakampių, kurių plotas lygus 2016, kraštinių ilgiai yra natūralieji skaičiai ir kuriuos įmanoma padalyti į 56 vienodus kvadratus?
A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 0

16. Saloje gyvena tik visada tiesą sakantys matematikai ir visada meluojantys niektauzos. Daktaras Jonas saloje sutiko 7 čiabuvius, sėdinčius aplink laužą. Kiekvienas iš jų pasiskundė, kad sėdi tarp dviejų niektauzų. Kiek niektauzų sėdėjo aplink laužą?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** Neįmanoma nustatyti

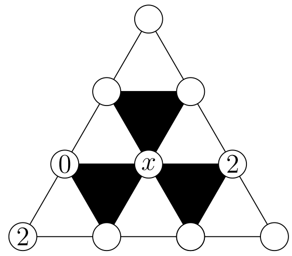
17. Abi kvadratinės lygtys $x^2 + ax + b = 0$ ir $x^2 + bx + a = 0$ turi realiuosius sprendinius. Pirmosios lygties sprendinių kvadratų suma lygi antrosios lygties sprendinių kvadratų sumai ir $a \neq b$. Tada $a + b =$
A) 0 **B)** -2 **C)** 4 **D)** -4 **E)** Neįmanoma nustatyti

18. Kam lygus pavaizduoto lygiakraščio trikampio perimetras, jei kvadrato perimetras lygus 4?



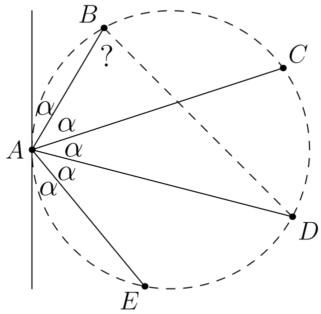
A) 4 **B)** $3+\sqrt{3}$ **C)** 3 **D)** $3+\sqrt{2}$ **E)** $4+\sqrt{3}$

19. Kiekviename iš 10 skritulių (žr. pav.) įrašytas vienas iš skaičių 0, 1, 2. Bet kurio balto trikampėlio skaičių suma dalijasi iš 3, o bet kurio juodo trikampėlio skaičių suma iš 3 nesidalija. Koks skaičius gali būti įrašytas vietoj x?



A) Tik 0 **B)** Tik 1 **C)** Tik 2 **D)** Tik 0 arba 1
E) 0, 1 ir 2

20. Benas pažymėjo penkis apskritimo taškus A, B, C, D ir E bei nubrėžė apskritimo liestinę taške A. Paveikslėlyje raide α pažymėti penki kampai lygūs. Raskite $\angle ABD$.



A) 66° **B)** 70,5° **C)** 72° **D)** 75° **E)** 77,5°

Klausimai po 5 taškus

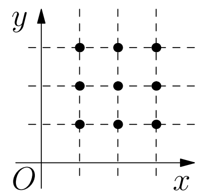
21. Kiek skirtingų realiųjų sprendinių turi lygtis

$$\left(x^2-4x+5\right)^{x^2+x-30}=1?$$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Be galo daug

22. Į keturkampį įbrėžtas apskritimas. Keturkampio perimetro ir apskritimo ilgio santykis lygus $4:3$. Koks yra keturkampio ir skritulio plotų santykis?
A) $4:\pi$ **B)** $3\sqrt{2}:\pi$ **C)** $16:9$ **D)** $\pi:3$ **E)** $4:3$

23. Kiek yra kvadratinių (kintamojo x) funkcijų, kurių grafikai eina per tris iš paveikslėlyje pažymėtų devynių taškų?



A) 6 **B)** 15 **C)** 18 **D)** 22 **E)** 27

24. Stačiojo trikampio ABC (kampas A statusis) smailiųjų kampų pusiaukampinės kertasi taške P. Atstumas nuo P iki įžambinės lygus $\sqrt{8}$. Koks yra atstumas nuo P iki taško A?
A) 8 **B)** 3 **C)** $\sqrt{10}$ **D)** $\sqrt{12}$ **E)** 4

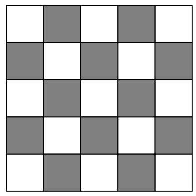
25. Trys triženkliai natūralieji skaičiai sudaryti iš skaitmenų nuo 1 iki 9, panaudojant kiekvieną skaitmenį po vieną kartą. Kuris skaičius negali būti tų trijų skaičių suma?
A) 1500 **B)** 1503 **C)** 1512 **D)** 1521 **E)** 1575

26. Kubo vidaus taškas sujungtas su kubo viršūnėmis. Taip gautos 6 piramidės. Penkių piramidžių tūriai yra 2, 5, 10, 11 ir 14. Koks yra likusios piramidės tūris?
A) 1 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 9 **E)** 12

27. Papietauti už apskrito stalo susėdo keturi sportininkai, vyrai ir moterys: čiuožėjas, slidininkas, ledo ritulininkas ir snieglentininkas. Slidininkas sėdėjo Aušrai iš kairės. Čiuožėjas sėdėjo priešais Beną. Ema ir Fredas sėdėjo greta. Ledo ritulininkui iš kairės sėdėjo moteris. Kokiu sportu užsiima Ema?
A) Čiuožimas **B)** Slidinėjimas **C)** Ledo ritulys **D)** Snieglenčių sportas
E) Neįmanoma nustatyti

28. Aivaras, pasirinkęs natūralųjį skaičių n, užrašė natūraliųjų skaičių nuo 1 iki n sumą. Iš pirminio skaičiaus p dalijasi užrašytoji suma, tačiau iš jo nesidalija nė vienas iš dėmenų. Kuris skaičius gali būti lygus $n + p$?
A) 217 **B)** 221 **C)** 229 **D)** 245 **E)** 269

29. Kvadratą 5×5 sudaro 25 balti langeliai. Vienu ėjimu leidžiama pakeisti bet kurių trijų gretimų langelių vienoje eilutėje arba viename stulpelyje spalvą: balti langeliai spalvinami juodai, o juodi – baltai. Kiek mažiausiai ėjimų reikia, norint gauti paveikslėlyje pavaizduotą kvadratą?



A) Mažiau nei 10 **B)** 10 **C)** 12 **D)** Daugiau nei 12
E) To neįmanoma padaryti

30. Natūralusis skaičius N turi lygiai šešis (teigiamus) daliklius, įskaitant 1 ir N. Penkių daliklių sandauga lygi 648. Koks yra šeštasis N daliklis?
A) 4 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 24

Senjoro užduočių sprendimai

1. (D) 13

? Kadangi trys duotos sumos skiriasi nedaug, tai natūralu, kad ir Romo, Rimo bei Remo amžiaus skirtumai nedideli. Spėkime, kad skaičius 23 gautas kaip gretimų skaičių 11 ir 12 suma, o toliau visai lengva: $24 = 11 + 13$, $25 = 12 + 13$. Didžiausias skaičius – 13.

! Jei $r_1 + r_2 = 23$, $r_2 + r_3 = 24$, $r_3 + r_1 = 25$, tai

$$2r_2 = (r_1 + r_2) + (r_2 + r_3) - (r_3 + r_1) = 22 \implies$$

$$r_2 = 11, \quad r_1 = 23 - 11 = 12, \quad r_3 = 24 - 11 = 13.$$

Didžiausias skaičius – 13.

2. (C) $\frac{111}{1000}$

! Bendravardiklinkime:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} = \frac{100}{1000} + \frac{10}{1000} + \frac{1}{1000} = \frac{111}{1000}.$$

3. (D) 18

? Akivaizdu, kad teisingų atsakymų buvo daugiau nei klaidingų, taigi daugiau nei pusė. Lieka variantai **D** ir **E**. Skaičius 20 yra 100%, o ne 50% didesnis už skaičių $30 - 20 = 10$, todėl netinka. Renkamės atsakymą **D**.

! Jei Rūta klaidingai atsakė į a klausimų, tai teisingų atsakymų buvo a ir dar 50% nuo a, taigi iš viso $a + 0{,}5a = 1{,}5a$. Tada $30 = 1{,}5a + a = 2{,}5a \implies 60 = 5a \implies a = 60 : 5 = 12$. Rūta teisingai atsakė į $30 - 12 = 18$ klausimų.

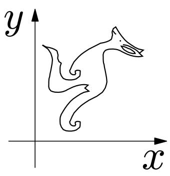
4. (A) 0

! Vieną skaičių išreikškime per kitą:

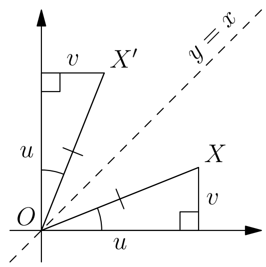
$$2015 \cdot 2017 = (2016 - 1)(2016 + 1) = 2016^2 - 1.$$

Taigi duotieji skaičiai yra gretimi ir tarp jų jokių natūraliųjų skaičių nėra.

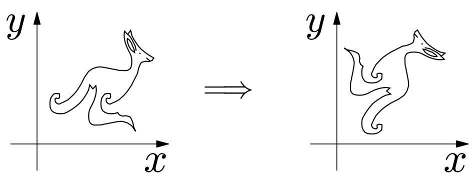
5. (A)



! Reikia išsiaiškinti, kas geometriškai sieja taškus $X(u, v)$ ir $X'(v, u)$. Jie simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu. Tai aišku dėl paveikslėlyje pavaizduotų stačiųjų trikampių lygybės. Atkarpos OX ir OX' lygios ir sudaro lygius kampus su tiese $y = x$.



Taigi ir naujasis kengūros vaizdas yra simetriškas senajam tiesės $y = x$ atžvilgiu.



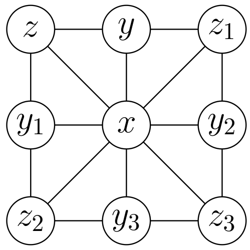
Ašys tarsi susikeičia vietomis: jei kengūra stovėjo virš Ox ašies ir žiūrėjo jos kryptimi, tai tai dabar stovi virš Oy ašies ir žiūri Oy kryptimi.

6. (C) 000000

! Turime $000 + 0000 = (-2) + (-3) = -5$. Pastebėkime dėsningumą: 2 nuliai žymi skaičių -1, tada 3 nuliai žymi -2, 4 nuliai žymi -3, ir t. t. Taigi skaičių $-n$ žymi $n + 1$ nulis. Todėl skaičių -5 žymi 6 nuliai 000000.

7. (C) 3

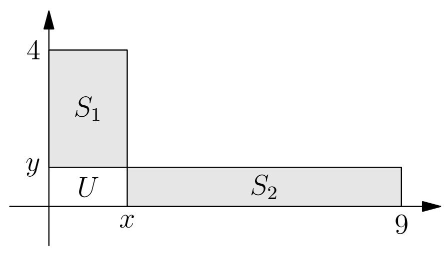
! Jei du trikampėliai turi bendrą kraštinę, tai jų viršūnėse, kurios nepriklauso tai bendrai kraštinei, esantys skaičiai yra lygūs. Pavyzdžiui, $x+y+z = x+y_1+z$ (žr. pav.), todėl $y_1 = y$. Analogiškai gauname, kad $y_2 = y$, $y_3 = y_1 (= y)$, $z_1 = z$, $z_2 = z$, $z_3 = z_1 (= z)$. Taigi visi skaičiai lygūs x, y arba z, ir Daina gali panaudoti daugiausiai tris skirtingus skaičius. Savo ruožtu trys skaičiai x, $y = y_1 = y_2 = y_3$, $z = z_1 = z_2 = z_3$ gali būti skirtingi (pvz., 0, 1 ir 2): kiekvieno trikampėlio skaičių suma lygi $x + y + z$.



8. (E) $\frac{9}{4}$

! Stačiakampio S_1 plotas yra $x(4-y) = 4x-xy$, o stačiakampio S_2 plotas yra $y(9-x) = 9y-xy$. Tada $4x - xy = 9y - xy \implies 4x = 9y \implies \frac{x}{y} = \frac{9}{4}$.

!! Būtų ypač lengva atlikti veiksmus mintinai, jei vietoj S_1 ir S_2 nagrinėtume stačiakampius T_1, kurį sudaro S_1 ir U, bei T_2, kurį sudaro S_2 ir U (žr. pav.). Stačiakampiai T_1 ir T_2 vėl lygiapločiai ir iš karto gauname lygybę $4x = 9y$.



9. (E) 4

! Kuo panašūs reiškiniai x^2-4x+2 ir $x+\frac{2}{x}$? Tereikia šiek tiek pastabumo ir spręsti kvadratinės lygties nereikės:

$$x^2+2=4x|:x \implies \frac{x^2+2}{x}=x+\frac{2}{x}=4.$$

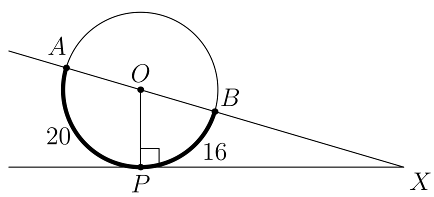
10. (D) d

! Spėjant galimą a reikšmę, lengva gauti kitas. Pvz., kai $a=2$, tai tinka $b=6$, $c=2$, $d=8$. Taigi teisingas vienas iš atsakymų **D** ir **E**. Norint atmesti **E**, reikia įrodyti nelygybes $d>a$, $d>b$, $d>c$ (t. y. kad jos galioja ne vienu atveju, o visais).

Kadangi skaičiai a,b,c yra natūralieji ir $d=2a+4=2b-4=4c$, tai akivaizdu, kad $d>a$ ir $d>c$. Dėl nelygybės $d=2b-4>b$ būtų galima suabejoti. Ji teisinga, jei $b>4$. Jei gali būti $b\leqslant 4$, tai teisingas atsakymas yra **E**. Visgi $b=a+4>4$, todėl $d>b$.

11. (E) $10°$

! Apskritimo liestinė XP statmena spinduliui OP (žr. pav.). Centriniai kampai AOP ir BOP sudaro ištiestinį kampą ir yra proporcingi lankų, į kuriuos remiasi, ilgiams. Tai yra,



$$\angle AOP+\angle BOP=180°,\quad \angle AOP:\angle BOP=20:16=5:4.$$

Iš šių lygybių išreiškiame $\angle BOP=80°$. Stačiajame trikampyje OPX turime $\angle OXP = = 90°-\angle XOP=10°$.

12. (D) 105

! Apatinės eilutės skaičius iš eilės pažymėkime x,y,z. Tada vidurinėje eilutėje yra skaičiai xy ir yz, o viršūnėje – skaičius $xy^2z=x\cdot y\cdot y\cdot z$ – keturių natūraliųjų skaičių, didesnių už 1, sandauga. Išskaidykime atsakymuose pateiktus skaičius pirminiais daugikliais:

$$56=2\cdot 2\cdot 2\cdot 7,\quad 84=2\cdot 2\cdot 3\cdot 7,\quad 90=2\cdot 3\cdot 3\cdot 5,\quad 105=3\cdot 5\cdot 7,\quad 220=2\cdot 2\cdot 5\cdot 11.$$

Skaičius 105 yra trijų pirminių skaičių sandauga, todėl keturių dauginamųjų, didesnių už 1, niekaip negausime. Kitų skaičių skaidiniai parodo, kad jie gali būti piramidės viršūnėje (yra keturi dauginamieji, iš kurių du sutampa).

Norint pasirinkti atsakymą, pakanka išnagrinėti arba skaičių 105, arba kitus keturis skaičius. Apskritai natūralusis skaičius gali būti piramidės viršūnėje tada ir tik tada, kai jis yra mažiausiai keturių pirminių skaičių sandauga, kurioje bent du dauginamieji sutampa.

13. Ⓒ $2^{2^{11}}$

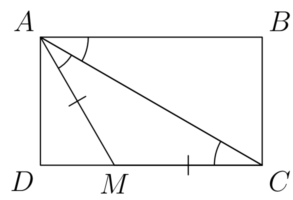
! Prisiminkime žymėjimų prasmę: $a^{b^c} = a^{(b^c)} \neq (a^b)^c = a^{bc}$. Iš eilės raskime sekos narius, stengdamiesi užrašyti juos pavidalu 2^{2^n}, kurį matome pateiktuose atsakymuose:

$$x_2 = x_1^{x_1} = 2^2, \quad x_3 = x_2^{x_2} = (2^2)^{2^2} = 2^{2\cdot 2^2} = 2^{2^3}.$$

Yra du būdai, kaip užrašyti x_3: $2^{2^3} = 2^8$. Panaudosime juos abu:

$$x_4 = x_3^{x_3} = (2^{2^3})^{2^8} = 2^{2^3\cdot 2^8} = 2^{2^{11}}.$$

14. Ⓔ Kitas atsakymas



! Stačiojo trikampio ABC (žr. pav.) įžambinė AC dvigubai ilgesnė už statinį BC, todėl prieš BC esantis kampas BAC lygus $30°$. Stačiakampio $ABCD$ kraštinės AB ir CD lygiagrečios, todėl $\angle ACM = \angle BAC = 30°$ (priešiniai kampai). Lygiašonio trikampio AMC ($AM = MC$) kampai prie pagrindo lygūs: $\angle CAM = \angle ACM = 30°$.

15. Ⓑ 4

! Jei stačiakampį sudaro vienodi kvadratai, tai jo kraštinę sudaro kvadratų kraštinės: ji gaunama suglaudus kvadratus į vieną eilę, kraštinę glaudžiant prie kraštinės. Taip pat turi būti sudėti vienas po kito ir tolimesni kvadratų sluoksniai. Tada stačiakampis tiesiog yra lentelė, padalyta į $m \times n$ kvadratinių langelių, kur $mn = 56$.

Langelio plotas yra $2016 : 56 = 36$, o kraštinės ilgis yra $\sqrt{36} = 6$. Tada stačiakampio matmenys yra $6m \times 6n$. Galime laikyti, kad $m \leqslant n$ (stačiakampiai $6m \times 6n$ ir $6n \times 6m$ yra vienodi). Skaičius 56 dalijasi iš m, todėl tinka tik $m = 1, 2, 4$ arba 7 (jei $m \geqslant 8$, tai $m \geqslant n$). Tada atitinkamai $n = 56/m = 56, 28, 14$ arba 8, o stačiakampio matmenys $6m \times 6n$ yra 6×336, 12×168, 24×84 arba 42×48.

Gavome keturis skirtingus stačiakampius. Jie visi tinka, nes $6m \times 6n$ matmenų stačiakampio, kur $mn = 56$, plotas yra $6m \cdot 6n = 2016$ ir tokį stačiakampį galima padalyti į $m \times n$ kvadratinių langelių.

16. Ⓑ 4

? Pakanka sukonstruoti sąlygą tenkinantį pavyzdį, kaip žmonės galėjo sėdėti aplink laužą. Matematikas, sėdintis tarp dviejų niektauzų, ir niektauza tarp dviejų matematikų sąlygai neprieštarauja, tad ir sodinkime juos pakaitomis. Turime dvi galimas situacijas: n-m-n-m-n-m-n ir m-n-m-n-m-n-m. Antroji netinka, o pirmoji tinka. Joje turime keturis niektauzas.

! Bet kuris prie laužo sėdėjęs matematikas turėjo būti tarp dviejų niektauzų, nes taip pats nemeluodamas pasakė. Tai reiškia, kad jokie du matematikai nesėdėjo greta. Vadinasi, matematikų buvo daugiausiai trys: keturiems matematikams vieną nuo kito atskirti prireiktų bent keturių niektauzų ir žmonių būtų mažiausiai $4+4>7$. Taigi niektauzų buvo mažiausiai keturi.

Joks niektauza nesėdėjo tarp dviejų niektauzų, nes kitaip būtų pasakęs tiesą. Tai reiškia, kad jokie trys niektauzos nesėdėjo greta, t. y. jie sėdėjo grupėmis po vieną ir po du, kurias skyrė matematikai. Vadinasi, niektauzų buvo daugiausiai keturi: penki niektauzos sudarytų bent tris grupes, kurioms vieną nuo kitos atskirti reiktų bent trijų matematikų, ir žmonių būtų mažiausiai $3+5>7$.

Taigi niektauzų aplink laužą buvo keturi.

17. (B) -2

! Pirmosios lygties sprendinius pažymėkime x_1 ir x_2, o antrosios – x_3 ir x_4. Sprendinių reiškimo per diskriminantą šiame uždavinyje galima išvengti, prisiminus Vijeto teoremą. Pagal ją

$$x_1+x_2=-a, \quad x_1x_2=b, \quad x_3+x_4=-b, \quad x_3x_4=a.$$

Sprendinių kvadratų sumą galima išreikšti per pačių sprendinių sumą ir sandaugą:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=a^2-2b.$$

Analogiškai $x_3^2+x_4^2=b^2-2a$. Taigi

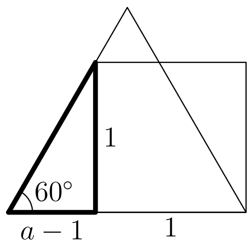
$$a^2-2b=b^2-2a \implies a^2-b^2=2b-2a \implies (a+b)(a-b)=-2(a-b).$$

Iš $a-b\neq 0$ galima dalyti: $a+b=-2$.

18. (B) $3+\sqrt{3}$

! Kvadrato kraštinės ilgis yra 1. Lygiakraščio trikampio kraštinės ilgį pažymėkime a. Reikia rasti perimetrą $3a$.

Paryškinto stačiojo trikampio su 60° kampu statiniai yra 1 ir $a-1$ (žr. pav.). Kampo tangentas lygus statinių santykiui:

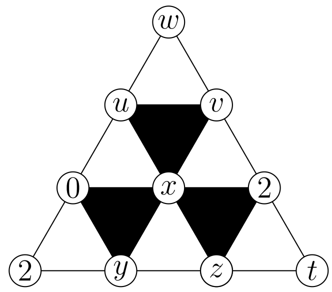


$$\operatorname{tg} 60^\circ = 1:(a-1) \implies a-1=(\operatorname{tg} 60^\circ)^{-1}=\frac{\sqrt{3}}{3} \implies 3a=3+\sqrt{3}.$$

(Neprisimenant trigonometrinių funkcijų reikšmių, galima pastebėti, kad paryškintas trikampis yra pusė lygiakraščio trikampio, kurio kraštinės ilgis yra $2(a-1)$, ir pritaikyti Pitagoro teoremą: $(2a-2)^2=(a-1)^2+1^2$. Tik čia dar tektų atmesti netinkamą gautos lygties sprendinį, mažesnį už 1.)

19. (A) Tik 0

! Nežinomus skaičius pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje.



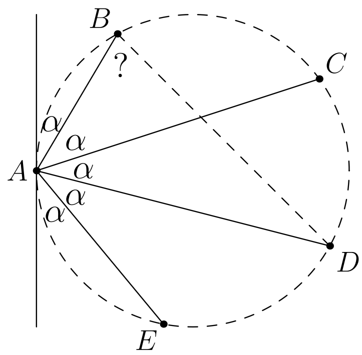
Kadangi $0+2+y$ dalijasi iš 3, tai $y=1$. Kadangi $0+x+y = x+1$ nesidalija iš 3, tai $x \neq 2$. Taigi $x=0$ arba $x=1$.

Tarkime, kad $x=1$. Tada $u+0+x=u+1$ bei $v+x+2 = v+3$ dalijasi iš 3. Todėl $u=2$, $v=0$ ir $u+v+x=3$ dalijasi iš 3, bet taip negali būti. Taigi $x=0$.

(Kad sprendimas būtų pilnas, pastebėkime, jog situacija $x=0$ galima: $y=v=1$, $z=t=w=2$, $u=0$.)

20. (C) 72°

! Žinoma, $\alpha = 180° : 5 = 36°$. Į lankus BC, CD, DE remiasi įbrėžtiniai kampai, lygūs α – penktadaliui ištiestinio kampo, todėl šie lankai lygūs ir sudaro po penktadalį apskritimo. Tokie patys yra ir lankai AB bei EA: dėl to, kad jie lygūs tarpusavyje dėl simetrijos ir jiems lieka $2/5$ apskritimo, arba dėl to, kad stygos AB ir AE sudaro su liestine kampus, lygius penktadaliui ištiestinio kampo. Taigi taškai A, B, C, D, E yra taisyklingojo penkiakampio viršūnės. Jo įstrižainės DA ir DB lygios dėl simetrijos, trikampis ADB lygiašonis, todėl $\angle ABD = \angle BAD = 2\alpha = 72°$.



!! Apskritimo centrą pažymėkime O. Stygos AD su liestine sudaromas kampas 2α lygus pusei atitinkamo centrinio kampo AOD. Įbrėžtinis kampas ABD taip pat lygus pusei to paties centrinio kampo. Taigi $\angle ABD = 2\alpha = 2 \cdot (180° : 5) = 72°$.

21. (C) 3

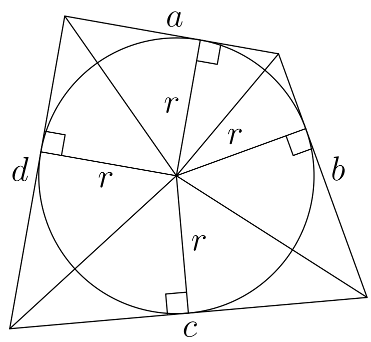
! Galimi du atvejai:

1) $x^2+x-30=0$ ir tada $x=5$ arba $x=-6$;

2) $x^2+x-30=b\neq 0$ ir tada, abi duotos lygybės puses pakėlę laipsniu b^{-1}, gauname, kad $x^2-4x+5=1$ ir $x=2$.

Trys gautos x reikšmės tenkina pradinę lygybę. Į tai verta atkreipti dėmesį, nes reiškinio a^b reikšmė ne visada apibrėžta (pvz., $(-1)^{1,5}$ arba 0^{-6}).

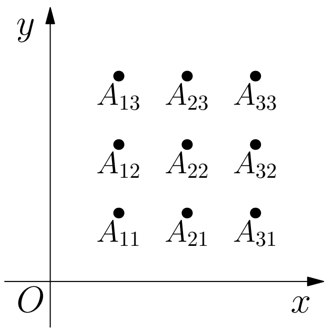
22. (E) $4:3$



! Keturkampio kraštinių ilgius pažymėkime a, b, c, d, o apskritimo spindulį – r. Tada $(a+b+c+d) : (2\pi r) = 4 : 3$. Apskritimo centrą atkarpomis sujungę su keturkampio viršūnėmis, keturkampį padalysime į keturis trikampius. Apskritimo centrą atkarpomis sujungę su apskritimo ir keturkampio lietimosi taškais, gausime tų trikampių aukštines; kiekvienos iš jų ilgis yra r. Keturkampio plotas lygus trikampių plotų sumai $\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{dr}{2}$. Tada keturkampio ir skritulio plotų santykis lygus

$$\left(\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}+\frac{dr}{2}\right) : (\pi r^2) = \frac{r(a+b+c+d)}{2\pi r^2} = (a+b+c+d) : (2\pi r) = 4 : 3.$$

23. (D) 22



? Uždavinyje kalbama ne apie bet kokią kreivę, o apie funkcijos grafiką. Funkcijos grafikas negali eiti per du taškus, esančius vienoje vertikalioje tiesėje: vienos x reikšmės negali atitikti dvi y reikšmės. Turime tris taškų, esančių vienoje vertikalioje tiesėje, trejetus. Todėl iš kiekvieno trejeto turime imti po lygiai vieną tašką, o tai galima padaryti $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ būdais.

Tačiau ar visi 27 taip gaunami taškų trejetai tinka? Kvadratinės funkcijos grafikas yra parabolė (šakos gali būti nukreiptos aukštyn arba žemyn). Mintyse įsivaizduojant parabolę, lengva patikėti tokiu teiginiu: jokie trys parabolės taškai nėra vienoje tiesėje. Lengva jį ir įrodyti: vertikalios tiesės atvejį jau aptarėme, o tiesei $y = kx + m$ ir parabolei $y = ax^2 + bx + c$ kvadratinė lygtis $ax^2 + bx + c = kx + m$ turi daugiausiai du sprendinius. Taigi 5 iš 27 trejetų netinka: visi trys taškai negali būti horizontalioje tiesėje, netinka ir A_{11}, A_{22}, A_{33} bei A_{13}, A_{22}, A_{31} (žr. pav.).

Likę 22 atvejai galimi. Tuo gali būti ne taip lengva patikėti, ypač jei kalbama apie taškus A_{12}, A_{21}, A_{33}, tarsi prieštaraujančius parabolės simetriškumui. Visgi galima įsivaizduoti parabolę, einančią ir per juos. Abejojant dėl šių trijų taškų ir per daug neskubant prie kitų uždavinių, galima nagrinėti taškus $A_{12}(1;2)$, $A_{21}(2;1)$, $A_{33}(3;3)$ (pasirinktos koordinatės neprieštarauja sąlygai) ir rasti konkrečią per juos einančią parabolę $y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + 6$ (sudarant lygčių sistemą; žr. **!** dalį).

! Kad **?** dalyje atsijoti 22 atvejai galimi, išplaukia iš tokio teiginio: per bet kuriuos tris taškus $(x_1; y_1), (x_2; y_2), (x_3; y_3)$ su skirtingomis x koordinatėmis, nesančius vienoje tiesėje, eina tam tikros kvadratinės funkcijos $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, grafikas. Kiekvienu atveju galima mėginti įsivaizduoti per duotus taškus einančią parabolę, bet visgi vaizduotė čia nėra tokia patikima. Juk ne kiekviena kreivė, atrodanti kaip parabolė, yra parabolė (pvz., funkcijos $y = x^4$ grafikas yra gana panašios formos).

Teiginys išplaukia iš to, kad lygčių sistema

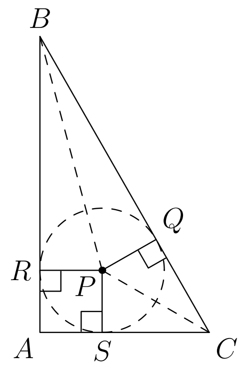
$$\begin{cases} ax_1^2+bx_1+c=y_1, \\ ax_2^2+bx_2+c=y_2, \\ ax_3^2+bx_3+c=y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_1^2+bx_1+c=y_1, \\ a(x_2^2-x_1^2)+b(x_2-x_1)=y_2-y_1, \\ a(x_3^2-x_1^2)+b(x_3-x_1)=y_3-y_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} ax_1^2+bx_1+c=y_1, \\ a(x_2+x_1)+b=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \\ a(x_3+x_1)+b=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_1^2+bx_1+c=y_1, \\ a(x_2+x_1)+b=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \\ a(x_3-x_2)=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a=(\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1})/(x_3-x_2), \\ b=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-a(x_2+x_1), \\ c=y_1-ax_1^2-bx_1 \end{cases}$$

turi sprendinį (a,b,c), kur $a \neq 0$ (duota, kad trys taškai nėra vienoje tiesėje, tad per juos negali eiti funkcijos $y=bx+c$ grafikas).

24. Ⓔ 4



! Trikampio ABC pusiaukampinių susikirtimo taškas P yra ir įbrėžtinio apskritimo centras. Taškus, kuriuose šis apskritimas liečia kraštines BC, AB ir AC, atitinkamai pažymėkime Q, R ir S (žr. pav.). Tada apskritimo spinduliai PQ, PR ir PS yra lygūs, jie statmeni atitinkamoms kraštinėms. Todėl $PR=PS=PQ=\sqrt{8}$, o keturkampis $ARPS$ yra kvadratas. Ieškomas atstumas lygus kvadrato įstrižainės ilgiui $AP=\sqrt{2}\cdot PS=\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4$.

25. Ⓐ 1500

! Sudarytuosius skaičius pažymėkime $\overline{a_1a_2a_3}, \overline{b_1b_2b_3}, \overline{c_1c_2c_3}$. Tada jų suma lygi

$$\overline{a_1a_2a_3}+\overline{b_1b_2b_3}+\overline{c_1c_2c_3}=$$

$$=100a_1+10a_2+a_3+100b_1+10b_2+b_3+100c_1+10c_2+c_3=$$

$$=99a_1+9a_2+99b_1+9b_2+99c_1+9c_2+(a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3+c_1+c_2+c_3)=$$

$$=99a_1+9a_2+99b_1+9b_2+99c_1+9c_2+(1+2+3+4+5+6+7+8+9)=$$

$$=99a_1+9a_2+99b_1+9b_2+99c_1+9c_2+45.$$

Visi sumos dėmenys dalijasi iš 9, todėl ir suma dalijasi iš 9. Tada sumos skaitmenų suma taip pat dalijasi iš 9. Tačiau $1+5+0+0=6$ ir atsakymas **A** negali būti sudarytųjų skaičių suma.

Kad sprendimas būtų pilnas, parodykime, kad kiti duoti skaičiai gali būti lygūs tokiai sumai: $1503=123+584+796$, $1512=315+428+769$, $1521=314+528+679$, $1575=$ $=123+465+987$.

!! Sudarytuosius skaičius pažymėkime $\overline{a_1a_2a_3}, \overline{b_1b_2b_3}, \overline{c_1c_2c_3}$. Uždavinį galima išspręsti ir trumpiau nei **!** dalyje.

Natūralusis skaičius dalijasi iš 9 tada ir tik tada, kai jo skaitmenų suma dalijasi iš 9. Šį teiginį galima ir apibendrinti: natūralusis skaičius ir jo skaitmenų suma dalijasi iš 9 su ta pačia liekana. Be to, sumoje dėmenį pakeitus jo dalybos iš natūraliojo skaičiaus n liekana, visos sumos dalybos iš n liekana nepakinta. Todėl trijų skaičių suma dalijasi iš 9 su ta pačia liekana kaip

$$a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 + c_1 + c_2 + c_3 = 45.$$

Taigi ji dalijasi iš 9 su liekana 0 ir negali būti lygi skaičiui 1500.

26. (C) 6

! Piramidės tūris V proporcingas pagrindo plotui S ir į pagrindą nuleistos aukštinės ilgiui h, jis lygus $V = \frac{1}{3}hS$. Visų šešių piramidžių pagrindai yra kubo sienos, todėl jų plotai lygūs: $S = a^2$, kur a yra kubo kraštinės ilgis.

Nagrinėkime bet kurias dvi piramides, kurių pagrindai yra priešingos kubo sienos. Į pagrindus nuleiskime aukštines. Kadangi jos išvestos iš vieno taško ir statmenos lygiagrečioms sienoms, tai sudaro vieną atkarpą, o tos atkarpos ilgis (aukštinių ilgių suma) lygus atstumui tarp sienų: $h_1 + h_2 = a$. Tada dviejų tūrių suma lygi $\frac{1}{3}h_1a^2 + \frac{1}{3}h_2a^2 = \frac{1}{3}a^3$. Taigi visoms tokioms piramidžių poroms (jų yra trys) tūrių suma yra ta pati.

Vadinasi, tarp duotų penkių skaičių turi būti dvi poros su ta pačia suma. Tinka 5, 11 bei 2, 14, nes $5 + 11 = 2 + 14 = 16$. Perrenkant visas skaičių poras ir užrašant sumas, galima įsitikinti, kad kitos poros netinka. Tada likęs skaičius 10 ir ieškomas tūris taip pat sudaro porą su ta pačia suma $\frac{1}{3}a^3 = 16$. Ieškomas tūris lygus $16 - 10 = 6$.

27. (A) Čiuožimas

! Kadangi Ema ir Fredas sėdėjo greta, tai Aušra ir Benas taip pat sėdėjo greta. Tada tėra keturi variantai, kaip sportininkai sėdėjo pagal laikrodžio rodyklę: 1) A, B, E, F; 2) A, B, F, E; 3) B, A, E, F; 4) B, A, F, E. Aušrai iš kairės ir priešais Beną sėdėjo skirtingi žmonės (slidininkas ir čiuožėjas), todėl galime iš karto atmesti atvejus 3) ir 4). Abiem likusiais atvejais Aušrai iš kairės sėdintis Benas turi būti slidininkas. Čiuožėjui, sėdinčiam priešais Beną, iš kairės sėdi Aušra. Todėl Aušra negali būti moteris, sėdėjusi iš kairės ledo ritulininkui. Tada ši moteris yra Ema. Atvejis 1) netinka, nes čia Ema sėdi iš kairės slidininkui Benui, o ne ledo ritulininkui. Lieka atvejis 2). Čia Ema sėdi priešais Beną, taigi yra čiuožėja. (Fredas yra ledo ritulininkas, o Aušra – snieglentininkė.)

28. (A) 217

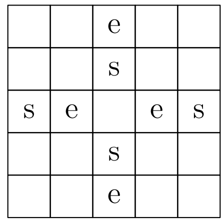
! Pažymėkime $s = 1 + 2 + \ldots + n$. Tada

$$2s = (1 + n) + (2 + (n - 1)) + (3 + (n - 2)) + \ldots + (n + 1) = (n + 1)n$$

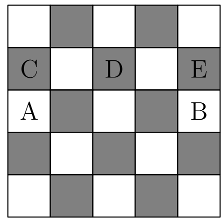
dalijasi iš p. Kadangi n iš p nesidalija, tai $n + 1$ dalijasi iš p ir $n + 1 \geqslant p$. Be to, skaičiai $1, 2, \ldots, n$ nelygūs p, todėl $p \geqslant n + 1$. Vadinasi, $p = n + 1$. Tada $n + p = 2p - 1$ gali būti tik ta reikšmė, prie kurios pridėjus 1 ir padalijus iš 2, gaunamas pirminis skaičius p.

Kai $2p-1 = 217$, 221, 229, 245 arba 269, tai atitinkamai $p = 109$, 111, 115, 123 arba 135. Skaičiai 115 ir 135 dalijasi iš 5, o 111 ir 123 – iš 3, jie nėra pirminiai. Lieka skaičius $p = 109$, jis pirminis ir kartu su $n = p - 1 = 108$ tenkina uždavinio sąlygą.

29. (A) Mažiau nei 10



? Spalvinkime (bet kokia tvarka – nuo jos niekas nepriklauso) tuos langelių trejetus, kur vidurinis langelis pažymėtas (žr. pav.): jei langelis pažymėtas raide e, tai imkime eilutės langelius, o jei raide s, tai stulpelio langelius. Taip per 8 ėjimus ir gausime norimą rezultatą: vieną kartą spalvinti langeliai taps juodi, o du ar keturis kartus spalvintieji liks balti (galutinė langelio spalva priklauso nuo spalvinimų skaičiaus lyginumo). Taigi pakanka mažiau nei 10 ėjimų.



! Gautas ėjimų skaičius 8 yra tikslus uždavinio atsakymas: mažiau nei 8 ėjimų nepakaks.

Tarkime, kad norimas kvadratas gautas per $x < 8$ ėjimų. Kiekvienam langeliui priskirkime skaičių, kiek kartų jis spalvintas. Juodai nuspalvinta 12 langelių ir jų skaičiai nelyginiai, o kiti skaičiai lyginiai, todėl bendra skaičių suma $3x$ lyginė ir $x \neq 7$.

Kiekvieno ėjimo metu buvo paveikiami daugiausiai du iš 12 juodų langelių. Todėl $x \geqslant 12 : 2 = 6 \implies x = 6$. Nelygybė virsta lygybe $x = 12 : 2 = 6$, tik jei kiekvieno ėjimo metu paveikiami **lygiai** du iš 12 langelių. Taip gauname juodų langelių 6 poras. Bet kurios poros langelius skiriantis baltas langelis turėjo būti spalvintas bent du kartus, todėl jį atitinka dvi skirtingos poros. Langelius A ir B (žr. pav.) atitinka daugiausiai po vieną porą, todėl jie išvis nespalvinti. Tada langelis C tegali sudaryti porą su D, o langelis E lieka be poros. Gavome prieštarą. Taigi $x \geqslant 8$.

30. (C) 9

! Apie daliklius lengviau kalbėti, turint skaičiaus skaidinį pirminiais daugikliais. Todėl ir duotąjį skaičių išskaidykime: $648 = 2^3 \cdot 3^4$. Matome, kad N turi pirminius daliklius 2 ir 3, todėl dalijasi iš 1, 2, 3 ir $6 = 2 \cdot 3$. Pažymėkime $N = 6M$. Galime iš eilės tikrinti M reikšmes.

Kai $M = 1$, tai $N = 6$ neturi šešių daliklių.

Kai $M = 2$, tai $N = 12$ ir šeši dalikliai yra 1, 2, 3, 4, 6, 12. Jų visų sandauga lygi $2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2^2 \cdot 3) = 2^6 \cdot 3^3$. Penkių daliklių sandauga dalijasi iš 3^4, o visų šešių daliklių – tik iš 3^3. Taip būti negali.

Kai $M = 3$, tai $N = 18$ ir šeši dalikliai yra 1, 2, 3, 6, 9, 18. Jų visų sandauga lygi $2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 3^2) = 2^3 \cdot 3^6$. Dabar aiškiai matyti, kad norint gauti $2^3 \cdot 3^4$, reikia pašalinti daliklį $3^2 = 9$. Taigi tinka $N = 18$ ir penki dalikliai 1, 2, 3, 6, 18, kurių sandauga lygi 648. Šeštasis daliklis yra 9.

Kad sprendimas būtų pilnas, atmeskime likusius atvejus: jei $M > 3$, tai N turi mažiausiai 7 skirtingus daliklius $1 < 2 < 3 < 6 < 2M < 3M < 6M$.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	D
2	C
3	D
4	A
5	A
6	C
7	C
8	E
9	E
10	D
11	E
12	D
13	C
14	E
15	B
16	B
17	B
18	B
19	A
20	C
21	C
22	E
23	D
24	E
25	A
26	C
27	A
28	A
29	A
30	C