JUNIORAS (IX ir X klasės)

J1. Ⓑ 24
Žr. uždavinio M5 sprendimą.

J2. Ⓒ 99
! Neapsirikime: prieš Simoną buvo ne 50, o tik 49 mokiniai. Tiek pat buvo už jos, taigi iš viso $2 \cdot 49 + 1 = 99$ mokiniai dalyvavo konkurse.
Teisingas atsakymas **C**.

J3. Ⓔ 1
Žr. uždavinio M4 sprendimą.

J4. Ⓒ 14
! Dviejų berniukų poros yra su numeriais 1, 3, 5, 7, 9, — penkios poros. Mergaitės ir berniuko poros yra su numeriais 2, 4, 6, 8 — keturios. Vadinasi, berniukų yra $2 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 14$.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Dažnai verta spręsti atvirkščią uždavinį, taigi — kiek yra mergaičių? Jų yra po vieną tik porose su lyginiais numeriais 2, 4, 6, 8. Vadinasi, mergaičių yra 4. Todėl berniukų yra 14.
Čia šis „atvirkštinis“ būdas padėjo nedaug, tačiau kartais jis padeda kaip reikiant!

J5. Ⓓ 288
! Per 3 minutes Jonukas pripučia 8 balionus, todėl per 120 minučių jis pripučia $8 \cdot 40 = 320$ balionų. Iš jų 32 susprogsta, taigi lieka $320 - 32 = 288$ balionai.
Teisingas atsakymas **D**.

J6. Ⓐ 2:3
Žr. uždavinio B15 sprendimą.

J7. Ⓔ 60%
! Neskaičiavę matome, kad plytos $12 \times 14 \times 16$ tūris $\frac{16}{10} = 1{,}6$ karto didesnis už plytos $10 \times 12 \times 14$. Tai sudaro 60%.
Teisingas atsakymas **E**.

J8. Ⓑ 3
Žr. uždavinio B19 sprendimą.

J9. Ⓓ
Žr. uždavinio M24 sprendimą.

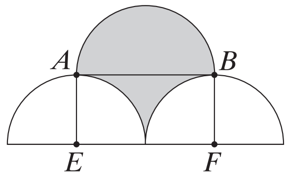
J10. Ⓒ 51
! Šokliukas sustojo nušuoliavęs $25 \cdot 2 = 50$ m. Jo mamai atšuoliuoti iki tos vietos antrą kartą iš viso reikės įveikti $330 + 50 = 380$ m. Tai įvyks po $380 : 5 = 76$ sekundžių nuo starto, taigi Šokliukui teks laukti $76 - 25 = 51$ sekundę.
Teisingas atsakymas **C**.

J11. Ⓑ 1
Žr. uždavinio K19 sprendimą.

J12. Ⓑ 5
Žr. uždavinio K20 sprendimą.

J13. D 8

! Užtušuotą sritį sudaro pusskritulis ir „trikampė“ sritis (žr. brėžinį). Vadinasi, užtušuotas plotas lygus stačiakampio $ABFE$ plotui, nes šį sudaro 2 skritulio ketvirčiai ir ta pati trikampė sritis. O stačiakampio plotas lygus $2 \cdot 4 = 8\,\mathrm{cm}^2$.
Teisingas atsakymas **D**.



J14. A 11:4

! Sakykime, kad butelių talpa $1{,}5\,\ell$. Tada pirmame butelyje vandens yra $1/3$ dalis, t. y. $0{,}5\,\ell$, o antrame — $1/5$ dalis, t. y. $0{,}3\,\ell$. Vadinasi, $3\,\ell$ mišinyje vandens yra $0{,}8\,\ell$, o sulčių $2{,}2\,\ell$. Todėl sulčių ir vandens santykis yra 22:8, arba 11:4.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Žinoma, niekas nepasikeis, jei butelių talpa kitokia. Pažymėkime ją $15A$ litrų (kas tas A? — ogi $\frac{1}{15}$ butelio talpos). Tada vandens pirmame butelyje yra $5A$ litrų, antrame — $3A$ litrų. Vadinasi, $30A$ litrų mišinyje vandens yra $8A$ litrų, taigi sulčių — $22A$ litrų. Sulčių ir vandens santykis mišinyje lygus 22:8, arba 11:4.

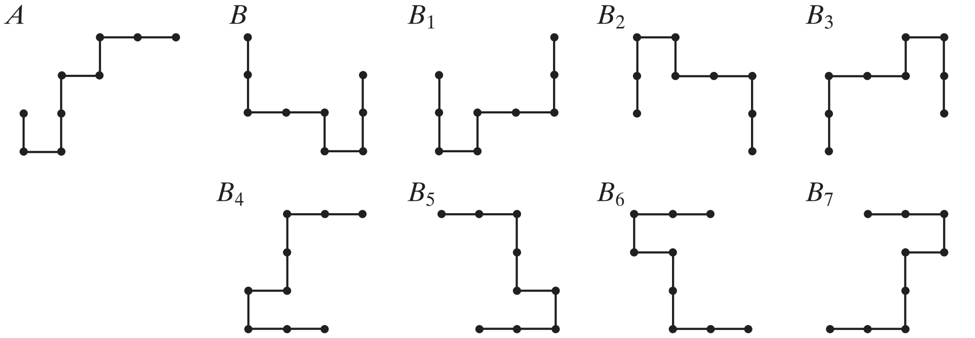
J15. A 720°
Žr. uždavinio K24 sprendimą.

J16. D 136

! (Plg. uždavinio K27 sprendimą.) Kadangi 16 skaičių vidurkis lygus 16, tai jų suma lygi $16 \cdot 16$. Didžiausią reikšmę kuris nors skaičius įgis, kai kiti 15 įgis mažiausias įmanomas reikšmes — o tai 1, 2, 3, ..., 15. Šių skaičių suma lygi $15 \cdot \frac{16}{2} = 15 \cdot 8$, todėl didžiausia didžiausio skaičiaus reikšmė lygi $16^2 - 15 \cdot 8 = 8 \cdot (16 \cdot 2 - 15) = 8 \cdot 17 = 136$.
Teisingas atsakymas **D**.

J17. D 5

! (Plg. uždavinio B27 sprendimą. Čia pateikiamas kitas sprendimo būdas.) Tirkime, kiek daugiausiai atkarpų gali sutapti. Matome, kad kairysis lankstinys A (kurio nesukiosime ir nevartysime) telpa į stačiakampį 3×4, dešinysis lankstinys B — į 3×3. Bet lankstinyje A joks kvadratas 3×3 neapima visų 4 horizontaliųjų atkarpų, o tik 3, taigi jau nustatėme, kad maksimalus sutampančių atkarpų skaičius $M \leqslant 7$.
Lankstinyje A visos 4 vertikalios atkarpos telpa į stačiakampį 2×3. Ar galima jas visas uždengti horizontaliosiomis atkarpomis? Ne, nes jų iš viso tik 3. O vertikaliomis? Ne, nes į „statų“ stačiakampį 2×3 iš B galima suimti tik 3 vertikalias atkarpas. Vadinasi, kad ir kaip uždėtume lankstinį B, iš vertikaliųjų 4 atkarpų galima uždengti daugiausiai 3 atkarpas.



Kadangi lankstinys B, būdamas bet kurioje padėtyje, uždengia ne daugiau kaip 3 horizontalias atkarpas ir ne daugiau kaip 3 vertikalias atkarpas, tai jis gali uždengti ne daugiau kaip 6 atkarpas,

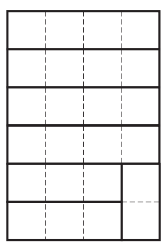
$M \leqslant 6$. O ar tikrai galima uždengti 3 horizontalias atkarpas? Taip, pavyzdžiui, lankstiniu B_1: jis turi detalę . O ar tikrai galima uždengti 3 vertikalias atkarpas? Taip, lankstiniu B — jis turi detalę . Vadinasi, šiuo keliu įverčio $M \leqslant 6$ nebepagerinsime. Mintis dabar paprasta: uždenkime 3 horizontalias atkarpas visais galimais būdais ir žiūrėkime, kiek užsidengė vertikalių atkarpų, po to uždenkime 3 vertikalias atkarpas visais galimais būdais ir žiūrėkime, kiek užsidengė horizontaliųjų atkarpų. Taip mes ne tik įsitikinsime, kad 6 atkarpų uždengti neįmanoma (o įmanoma tik 5), bet ir rasime visus galimus 5 atkarpų uždengimo būdus.
Iš pradžių denkime lankstinio A horizontalias atkarpas horizontaliosiomis (t. y. padėtimis B, B_1, B_2, B_3). Kadangi lankstinyje B visos 3 horizontalios atkarpos telpa į stačiakampį 3×1, o į tokį stačiakampį telpa tik viršutinės dvi horizontaliosios atkarpos lankstinyje A, tai jas reikia sutapdinti. Tam tinka tik B_1, bet taip uždėjus sutaps tik viena vertikali atkarpa.
Dabar denkime lankstinio A horizontalias atkarpas vertikaliosiomis lankstinio B atkarpomis (t. y. denkime jas lankstinių B_4, B_5, B_6, B_7 horizontaliosiomis atkarpomis). Bet į kvadratą 3×3 pakliūna lankstinio A tik trijų atkarpų detalės ir , o tokių detalių nerandame.
Denkime lankstinio A vertikalias atkarpas vertikaliosiomis (t. y. lankstiniais B, B_1, B_2, B_3). Jau matėme, kad jos telpa į stačiakampį 2×3. Lankstinyje A yra tik 3 trijų atkapų konfigūracijos: , , . Konfigūraciją aptinkame tik lankstinyje B, bet tada jas sutapdinus daugiau bendrų atkarpų nėra. Konfigūracijos nerandame. Konfigūracijos taip pat nerandame.
Denkime lankstinio A vertikalias atkarpas horizontaliosiomis (t. y. lankstinių B_4, B_5, B_6, B_7 vertikaliosiomis) atkarpomis. Dabar konfigūracijos nerandame, konfigūraciją randame lankstinyje B_7, konfigūracijos nerandame. Sutapdiname lankstinių A ir B_7 konfigūracijas , ir matome, kad sutapo dar dvi horizontalios atkarpos.
Taigi įsitikinome, kad 6 atkarpų sutapdinti negalima, o 5 atkarpas galima sutapdinti vieninteliu būdu — pasukus B prieš laikrodžio rodyklę 90° kampu ir sutapdinus detales .
Teisingas atsakymas **D**.

J18. Ⓒ 10

Suskirstykime rutulius į grupes (1, 17), (2, 16), (3, 15), (4, 14), (5, 13), (6, 12), (7, 11), (8, 10), (9). Yra 9 grupės. Jei trauksime 9 rutulius, tai dar nebūtinai dviejų suma bus 18 (pavyzdžiui, ištrauksime rutulius 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). O štai ištraukus 10 rutulių, būtinai bus 2 rutuliai iš vienos grupės (nes grupių tik 9), ir tų rutulių suma bus 18.
Teisingas atsakymas **C**.

J19. Ⓑ 20

Kadangi pradinio stačiakampio plotas 24, tai ir naujojo stačiakampio plotas $ab = 24$ (čia a ir b — kraštinių ilgiai). Kadangi $24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$, tai $a + b$ gali įgyti tik reikšmes 25, 14, 11, 10, iš kurių mažiausia 10. Todėl naujo stačiakampio mažiausias įmanomas perimetras $2(a + b) = 20$.
Dar reikia įsitikinti, kad tokį stačiakampį sudėti galima. Tai padaryti paprasta: iš pradžių iš gabalų 3, 3 ir 2 sudedame stačiakampį 4×2, o tada ant jo sukrauname likusius 4 stačiakampius 4×1.
Gauname stačiakampį 4×6.
Teisingas atsakymas **B**.



J20. (D) 22:10

? Paspėliokime — taigi kiek detalių bus pagaminta 22:00? Aišku, $1160 + 900 = 2060$. O kiek gi 22:10? Aišku, $2060 + 900 : 6 = 2060 + 150 = 2210$. Štai ir viskas.
Renkamės atsakymą **D**.

! Galima spręsti ir nespėliojant. Kadangi detalių reikės turėti daugiau nei 2100, tai jų pagaminti dar reikės daugiau nei 940, o tam prireiks daugiau nei valandos. Pasižiūrėkime, kas gi bus 22:00 valandą — turėsime $1160 + 900 = 2060$ detalių. Vėl reikia vytis, pagaminti bent 2200 detalių, t. y. dar 140 detalių. Kadangi per minutę pagaminama $900 : 60 = 90 : 6 = 15$ detalių, tai reikės daugiau kaip 9 minučių. Situacija 22:09 bus $2060 + 135 = 2195$ detalės, o štai 22:10 — kaip tik 2210 detalės.

!! Suprantama, pajutus, kad viskas įvyks po 22:00 valandos, spręsti paprasta sudarius lygtį. 22:00 valandą jau pagaminta 2060 detalių, ir kiekvieną minutę bus pagaminama 15 detalių. Po x minučių bus pagaminta $15x$ detalių, laikrodis rodys skaičių $2200 + x$, o detalių bus $2060 + 15x$. Turime lygtį

$$2200 + x = 2060 + 15x,$$
$$14x = 140, x = 10.$$

Vadinasi, rodmenys sutaps 22:10 valandą.

J21. (A) $a + b$
Žr. uždavinio K26 sprendimą.

J22. (E) 4

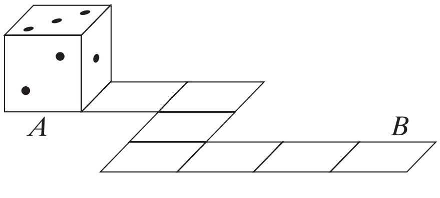
! Pažymėkime piramidės šonines briaunas a, b ir c. Tada $ab : 2 = 3$, $ac : 2 = 4$, $bc : 2 = 6$, t. y. $ab = 6$, $ac = 8$, $bc = 12$. Išspręsti šią sistemą paprasta, bet lengviausia sudauginti lygtis, tada $(abc)^2 = 6 \cdot 8 \cdot 12 = 6^2 \cdot 16$, $abc = 6 \cdot 4 = 24$. Dalydami šią lygtį iš pradinių, gauname $c = 4$, $b = 3$, $a = 2$.
Dabar reikia apskaičiuoti šios piramidės tūrį. Jeigu pagrindo kraštines apskaičiuoti dar ir paprasta — pagal Pitagoro teoremą jos lygios $\sqrt{4^2 + 3^2}$, $\sqrt{4^2 + 2^2}$, $\sqrt{3^2 + 2^2}$, tai apskaičiuoti pagrindo plotą ir piramidės aukštinę visai nemalonu.
Bet yra graži išeitis: paverskime piramidę taip, kad jos pagrindas būtų trikampis su statiniais a ir b, tada c bus aukštinė (įsivaizduokite kambario kampą prie grindų). Pagrindo plotas bus $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$, o piramidės tūris $\frac{1}{3}SH$ bus $\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 = 4$.
Teisingas atsakymas **E**.

!! Sprendimą galima dar sutrumpinti. Piramidės tūris, kaip jau matėme, lygus $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}ab \cdot c = \frac{1}{6}abc$. Taip pat radome, kad $abc = 24$. Vadinasi, piramidės tūris lygus 4.

J23. (B) Skaičius 288 dalijasi iš 12
Žr. uždavinio K29 sprendimą.

J24. (E) 6

! Po pirmo pavertimo viršuje atsidurs 6, po antro — 4, bet priekyje tebebus 2, o užpakalyje 5. Matome, kad galima viską surašyti, bet paprasčiau sekti konkrečias sieneles — jų yra tik 3 poros.



Vartydami sekime sienelę 1. Kai kauliukas stovės antrame langelyje, ji bus apačioje, kai trečiame — kairėje, kai 4-tame, 5-tame — liks kairėje, 6-tame langelyje bus viršuje, 7-tame — dešinėje, langelyje B — apačioje. Vadinasi, viršuje bus 6 taškai.
Teisingas atsakymas **E**.

J25. E 5

! Akivaizdu, kad skaičiai $n = 2000$, 2001, 2002, 2003, 2004 tenkina nelygybę. Bet taip pat aišku, kad jei $n \leqslant 1999$, tai

$$\sqrt{n(n+1)} \leqslant \sqrt{1999 \cdot 2000} < 2000,$$

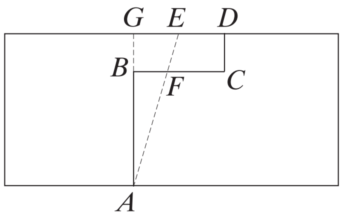
o jei $n \geqslant 2005$, tai

$$\sqrt{n(n+1)} \geqslant \sqrt{2005 \cdot 2006} > 2005.$$

Taigi nelygybę tenkina 5 skaičiai.
Teisingas atsakymas **E**.

J26. C 12

? Sugudraukime — spėti pradėkime nuo vidurinės reikšmės — tada jau bent žinosime, į kurią pusę judėti.



Sakykime, kad $ED = 12$. Tada $EG = 12$, iš trikampių panašumo $BF = 12 \cdot 3/4 = 9$, $FC = 15$, ir $\triangle ABF$ ir keturkampio $FCDE$ plotai lygūs: $S_{ABF} = 30 \cdot 9/2 = 9 \cdot 15$, o $S_{FCDE} = (15+12) \cdot 10/2 = 27 \cdot 5$. Mums pasisekė — iš karto atspėjome atsakymą.
Renkamės atsakymą **C**.

! Spręsti galima panašiai: plotai $FCDE$ ir ABF turi būti lygūs, ir tada sklypų plotai nepakis. Pažymėkime $DE = x$. Tada $EG = 24 - x$, iš $\triangle AGE$ ir $\triangle ABF$ panašumo $BF = 0{,}75(24 - x)$, $FC = 24 - 0{,}75(24 - x)$. Sulyginame reikiamus plotus:

$$\frac{24 - 0{,}75(24 - x) + x}{2} \cdot 10 = 0{,}75(24 - x) \cdot \frac{30}{2},$$

$$96 - 3(24 - x) + 4x = 9(24 - x),$$

$$12(24 - x) = 96 + 4x, \quad 3(24 - x) = 24 + x, \quad 4x = 2 \cdot 24, \quad x = 12.$$

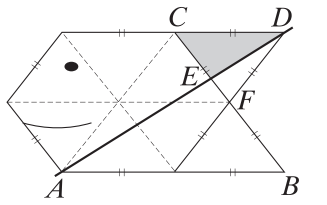
Vadinasi, $DE = 12$.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Daug paprasčiau spręsti pastebėjus, kad jeigu $S_{FCDE} = S_{ABF}$, tai ir $S_{BCDG} = S_{AGE}$. Tada $10 \cdot 24 = GE \cdot \frac{40}{2}$, $GE = 12$, taigi ir $DE = 12$.

J27. D 5
Žr. uždavinio K30 sprendimą.

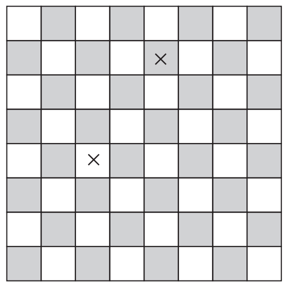
J28. Ⓒ 2

Sudalykime figūrą į lygiakraščius trikampius, kaip parodyta paveikslėlyje.



Kadangi trikampiai 8, tai vieno trikampio plotas lygus 3. Trikampiai AEB ir DEC panašūs, AB dukart ilgesnė už CD, todėl BE dukart ilgesnė už CE, ir $CE = \frac{1}{3}CB = \frac{2}{3}CF$. Trikampių CED ir CFD aukštinė iš viršūnės D bendra, todėl jų plotai sutinka kaip pagrindai, $S_{CED} : S_{CFD} = CE : CF$, $S_{CED} : 3 = \frac{2}{3}CF : CF$, ir $S_{CED} = 2$.
Teisingas atsakymas **C**.

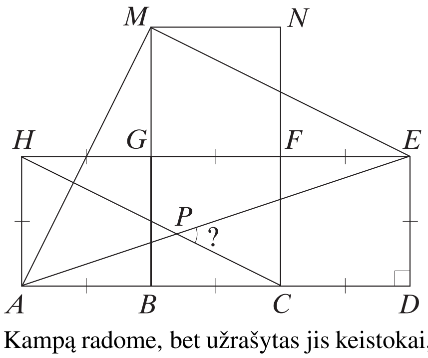
J29. Ⓔ 768



Pasirinkime baltą langelį, tam yra $64 : 2 = 32$ būdai. Kad ir kaip pasirinktume baltą langelį, jo eilutėje ir jo stulpelyje yra po 4 juodus langelius, taigi juodą langelį galima rinktis $32 - 8 = 24$ būdais. Remiantis kombinatorine sandaugos taisykle, baltą ir juodą langelį galima pasirinkti $32 \cdot 24 = 768$ būdais.
Teisingas atsakymas **E**.

J30. Ⓑ 45°

Ieškomasis $\angle CPE$ yra $\triangle APC$ priekampis, todėl $\angle CPE = \angle EAD + \angle HCA = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.



Kampą radome, bet užrašytas jis keistokai, o ir atsakymo tokio nėra. Pasižymėkime jį x, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \alpha$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \beta$. Tada $x = \alpha + \beta$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}$, ir

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{3+2}{6-1} = 1.$$

Kadangi $\operatorname{tg} x = 1$, o x garantuotai tarp 0° ir 180°, tai $x = 45°$.
Teisingas atsakymas **B**.

Kiek sunkiau uždavinį išspręsti geometriškai. Pripieškime dar vieną kvadratą $GMNF$ (žr. brėžinį) ir sujunkime M su A ir su E. Kadangi $HMEC$ — lygiagretainis, tai $ME \parallel HC$ ir $\angle AEM = \angle EPC$. Bet remiantis Pitagoro teorema $AM = \sqrt{5}$, $EM = \sqrt{5}$, $AE = \sqrt{10}$, todėl remiantis atvirkštine Pitagoro teorema $\triangle AME$ statusis, o kadangi jis lygiašonis, tai $\angle AEM = 45°$. Vadinasi, $\angle EPC = 45°$.