BIČIULIS (V ir VI klasės)

B1. D 202 505

Galima stulpeliu (arba mintinai) sudėti 200 500 ir 2005, o galima ir dauginti: $2005 \cdot 100 + 2005 = 2005 \cdot (100 + 1) = 2005 \cdot 101 = 202\,505$.
Teisingas atsakymas **D**.

B2. C 6

Jei jos turėtų po lygiai saldainių, tai turėtų po $10 : 2 = 5$. Jeigu dabar Agnė atiduotų Betai vieną saldainį, tai Beta turėtų 6, o Agnė 4 — taip kaip reikia.
Teisingas atsakymas **C**.

Galima spręsti ir taip. Jeigu Agnei duotume dar du naujus saldainius, tai jos saldainių turėtų po lygiai, po $(10 + 2) : 2 = 6$. Tiek jų ir turi Beta.

B3. B 1
Žr. uždavinio M4 sprendimą.

B4. C 24
Žr. uždavinio M5 sprendimą.

B5. D 1775

Kadangi kairė pusė lygi 1800, tai peteliškė dengia dėmenį $1800 - 25 = 1775$.
Teisingas atsakymas **D**.

$$2005 - 205 = 25 +$$ 

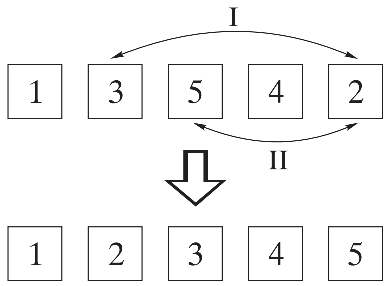
B6. D 60
Žr. uždavinio M16 sprendimą.

B7. E 37

Kiekvienas karpymas 1 lapelį paverčia į 10 lapelių, taigi lapelių skaičių padidina devyniais. Kadangi Jolita atliko 4 karpymus, tai lapelių pasidarė 36-iais daugiau, t. y. 37.
Teisingas atsakymas **E**.

B8. A 2

(Plg. uždavinio M23 sprendimą.) Kadangi ne savo vietose guli trys kortelės, tai jas reikės „pajudinti“. Kadangi vienu ėjimu pajudinti galima tik dvi korteles, tai reikės ne mažiau kaip dviejų ėjimų. Dviejų ėjimų tikrai pakanka: pavyzdžiui, I ėjimu dedame 2 į vietą (t. y. keičiame korteles 2 ir 3 vietomis), o tada vietomis keičiame 3 ir 5.
Teisingas atsakymas **A**.



B9. A 103

Kadangi Vesna skaičių padaugino iš 3, tai rezultatas turi dalytis iš 3. Tokie yra skaičiai **B**, **C**, **D** ir **E** (galite juos tiesiog padalyti iš 3 arba remtis taisykle — jų skaitmenų sumos dalijasi iš 3). Nesidalija iš 3 tik skaičius **A**, 103 (jo skaitmenų suma 4).
Teisingas atsakymas **A**.

B10. A
Žr. uždavinio M24 sprendimą.

B11. B 20

Nesunku iš eilės išrašyti visus tokius skaičius: 13, 15, 17, 19, 31, 35, 37, 39, 51, 53, 57, 59, 71, 73, 75, 79, 91, 93, 95, 97. Matome, kad jų yra 20.
Teisingas atsakymas **B**.

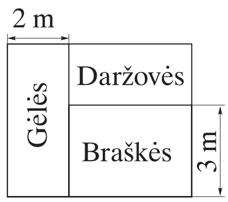
Skaičių galima ir neišrašinėti. Sudarant reikiamą skaičių tenka atlikti du darbus: 1) parašyti pirmą skaitmenį ir 2) parašyti antrą skaitmenį. Pirmą darbą galima atlikti 5 būdais (yra 5 nelyginiai skaitmenys). Kad ir kaip būtume atlikę pirmą darbą, antrą darbą galima atlikti 4 būdais (nes vienas iš 5 nelyginių skaičių jau paimtas). Remiantis kombinatorine sandaugos taisykle, du darbus (t. y. parašyti reikiamą dviženklį skaičių) galima atlikti $5 \cdot 4 = 20$ būdų.

B12. D 48

Į vieną galą kelionė ant dramblio trunka $32 : 2 = 16$ minučių. Todėl pėsčiomis į vieną galą Mauglis sugaišta $40 - 16 = 24$ minutes. Vadinasi, visa kelionė pėsčiomis jam trunka $24 \cdot 2 = 48$ minutes.
Teisingas atsakymas **D**.

Kai pusę kelio Mauglis ne joja, o eina pėsčiomis, jis praranda 8 minutes. Vadinasi, visą kelią eidamas pėsčiomis jis praras 16 minučių. Taigi pasivaikščiojimas truks $32 + 16 = 48$ minutes.

B13. C 8

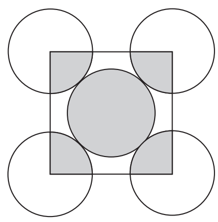


Kadangi gėlių sklypelio plotas yra $10\,\mathrm{m}^2$, tai jo ilgis $10 : 2 = 5\,\mathrm{m}$. Bet tai yra ir daržo plotis, todėl daržo ilgis yra $30 : 5 = 6\,\mathrm{m}$. Matome, kad daržovių sklypelio ilgis yra $6 - 2 = 4\,\mathrm{m}$, o plotis $5 - 3 = 2\,\mathrm{m}$. Vadinasi, daržovių sklypelio plotas lygus $4 \cdot 2 = 8\,\mathrm{m}^2$.
Teisingas atsakymas **C**.

B14. A 1

Ketvirtadalis paros yra 6 valandos, tų valandų trečdalis yra 2 valandos, o tokio laiko pusė yra 1 valanda.
Teisingas atsakymas **A**.

B15. B 2:3



Matome, kad užtušuotą sritį sudaro skritulys ir keturi skritulio ketvirtadaliai — kitaip sakant, užtušuotas plotas yra dviejų skritulių plotas. Neužtušuotas plotas lygus $5 - 2 = 3$ skritulių plotui. Vadinasi, ieškomas plotų santykis yra 2:3.
Teisingas atsakymas **B**.

B16. B 403

Aišku, kad penkių iš eilės einančių skaičių suma — tai penkiagubas vidurinysis skaičius. Vadinasi, vidurinis skaičius yra $2005 : 5 = 401$, todėl didžiausias yra 403.
Žinoma, buvo galima ir sudaryti lygtį.
Teisingas atsakymas **B**.

B17. E 9

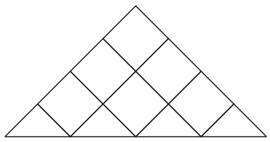
Kadangi $100 = 1 \cdot 100 = 2 \cdot 50 = 4 \cdot 25 = 5 \cdot 20 = 10 \cdot 10$, tai matome visus 9 daliklius: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.
Teisingas atsakymas **E**.

Galima daliklių ir neišrašinėti. Kadangi $100 = 2^2 \cdot 5^2$, tai kiekvienas daliklis yra pavidalo $2^m \cdot 5^n$, kur m ir n nepriklausomai gali įgyti 3 reikšmes — 0, 1 ir 2. Vadinasi, yra $3 \cdot 3$ dalikliai.

B18. E 1
Žr. uždavinio M14 sprendimą.

B19. C 3

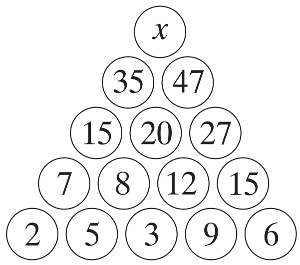
Svarbiausia susidaryti sistemą, kaip skaičiuoti. Pavyzdžiui, kvadratėlių yra 6, o vienas kvadratas yra 2×2, — iš viso 7 kvadratai. Trikampėlių su statiniais 1 yra keturi, su statiniais 2 — yra 3, su statiniais 3 — yra 2, ir pats didysis trikampis — iš viso $4+3+2+1 = 10$. Vadinasi, ieškomas skirtumas lygus $10 - 7 = 3$.
Teisingas atsakymas **C**.



B20. E 8
Žr. uždavinio M15 sprendimą.

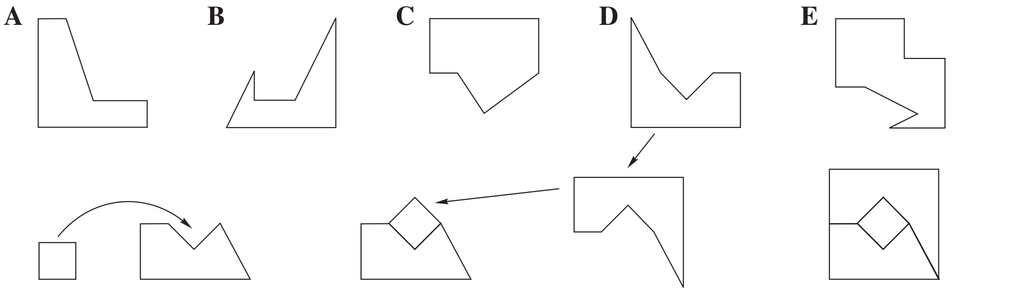
B21. D 82

Iš karto įrašome 9 $(= 15 - 6)$, 12 $(= 27 - 15)$, tada 3 $(= 12 - 9)$. Kai apatinė eilė užpildyta (žr. paveikslėlį), paprasčiausiai judame aukštyn, kol po x gauname skaičius 35 ir 47.
Vadinasi, $x = 35 + 47 = 82$.
Teisingas atsakymas **D**.



B22. D

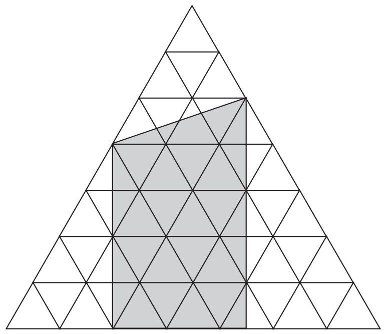
„Suklijavę“ dvi duotąsias dalis, iš karto matome, kad prie jų kaip trečioji dera dalis **D**. Kitaip dalių suklijuoti nepavyksta.



Teisingas atsakymas **D**.

B23. Ⓑ 22,5

Skaičiuoti galima labai įvairiai. Pavyzdžiui, galima suskaičiuoti apatinės užtušuotos juostos plotą — ją sudaro 4 lygiakraščiai trikampiai ir 2 pusės — taigi jos plotas 5. Užtušuotoje srityje tokių juostų keturios — turime plotą 20. Pagaliau, ant stačiakampio stovintis trikampis — tai lygiai pusė juostos. Taigi užtušuotas plotas lygus $20 + 5 : 2 = 22{,}5$.
Teisingas atsakymas **B**.



B24. Ⓓ 4

Antro ir trečio skaitmenų dalmens kvadratas (tai skaitmuo!) ne didesnis už 9, taigi dalmuo (jis nelygus vienetui) gali būti 2 arba 3. Taigi antro ir trečio skaitmenų poros galėtų būti 21, 42, 63, 84, 31, 62, 93. Bet tada triženkliai skaičiai būtų 421, 442, 463, 484, 931, 962, 993. Išmetus skaičius, kur skaitmenys kartojasi, lieka 421, 463, 931, 962, — 4 skaičiai.
Teisingas atsakymas **D**.

B25. Ⓒ 1

Galima grupuoti skaičius po 4 pradedant pirmuoju:
$(1 + 2 - 3 - 4) + (5 + 6 - 7 - 8) + \cdots + (2001 + 2002 - 2003 - 2004) + 2005.$
Tada kiekvieno ketverto skaičių suma lygi -4. Kadangi ketvertų yra $2004 : 4 = 501$, tai jie į sumą įneša $501 \cdot (-4) = -2004$. Pridėję 2005, gauname 1.
Teisingas atsakymas **C**.

Daug geriau į ketvertus jungti skaičius pradedant antruoju:
$1 + (2 - 3 - 4 + 5) + \cdots + (2002 - 2003 - 2004 + 2005).$
Kadangi kiekvieno ketverto skaičių suma lygi 0, tai ieškoma suma lygi 1.

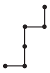
B26. Ⓒ 18

Nagrinėkime pusiaudienį — 12 valandą. Prieš 2 valandas Gudrusis Katinas pasakojo savo nuotykius, o po 1 valandos miegos, taigi plakatas meluoja. Situacija pasikeis po 14 valandos — prieš dvi valandas jis jau miegojo, po valandos — vis dar miegos, ir plakatas sakys teisybę. Lūžis įvyks 23 valandą — po jos, praėjus 1 valandai, jis jau pasakos nuotykius, o prieš 2 valandas dar bus miegojęs. Taigi plakatas vėl meluos. Antrą valandą ryto vėl įvyks lūžis — po šio momento prieš dvi valandas Katinas pasakojo nuotykius, tą patį darys ir po vienos valandos (taigi plakatas sako teisybę). Vėl kritinis momentas 11 valanda — po valandos jis jau miegos, o prieš dvi valandas jis pasakojo savo nuotykius, ir vėl plakatas meluos bent jau iki vidurdienio (tolimesnis laikas mūsų nedomina). Taigi plakatas sako teisybę nuo 14 val. iki 23 val. ir nuo 2 val. iki 11 val. — iš viso 18 valandų.
Teisingas atsakymas **C**.

Skaičiuoti galima ir kitaip — užtenka ištirti intervalą nuo 11 val. iki 23 val., o po to padvigubinti rezultatą (plakatas nemeluos nuo 14 val. iki 23 val., t. y. 9 valandas). Bet mes pateiksime vaizdesnį

sprendimą. Kad plakatas nemeluotų, tris valandas turi nebūti pasikeitimų Katino būklėje (miega — pasakoja). Jų nebus, kai trijų valandų ilgio intervale nebus taško 12 ir taško 24, o taip bus, kai intervalo pradžia slinks nuo 12 val. iki 21 val. ir nuo 0 val. iki 9 val. — iš viso aštuoniolika valandų.

B27. (B) 5

? Iš karto pastebime, kad lankstiniuose yra 2 vienodos detalės . Vadinasi, 4 atkarpas sutapdinti paprasta. Tiesa, uždėjus jas vieną ant kitos, lankstiniai toliau išsiskiria. Taip pat iš karto randame dvi vienodas (tiesa, vienodas apvertus) detales  ir , bet jas sutapdinus daugiau sutampančių dalių negausime. Taigi vėl turime 4 sutampančias atkarpas. Tai jau kelia mums mintį, kad gal būt sutapdinti galima ir 5 atkarpas. Dar ieškome panašių detalių. Nesunkiai randame detalę  — galime vadinti ją „dvi atkarpos į viršų, viena į dešinę, viena į viršų“ ir tokią pat, tik pasuktą: . O dabar jau matome, kad prieš pradžią dar galima prikabinti vieną atkarpą:  — „viena į dešinę, dvi į viršų, viena į dešinę, viena į viršų“ — ir tokią pat gauti dešiniajame lankstinyje: . Ją žinoma, reikės (su visu antruoju lankstiniu) pasukti ir uždėti ant pirmojo lankstinio.
Renkamės atsakymą **B**.

! Aišku, kad vieną lankstinį galima palikti vietoje, o galvoti tik apie kitą, kurį galima sukioti ir vartyti. Pirmas lankstinys telpa į stačiakampį 4×3, antras — į 3×3. Tai kelia mintį, kad antrąjį lankstinį reikia dar ir pastumdyti. Mums reikia įsitikinti, kad 6 atkarpos tikrai nesutaps.
Vienas būdas praktinis (= kompiuterinis). Languotame popieriuje nusibraižome pirmąją figūrą, o peršviečiamame languotame popieriuje — antrą. Tada antrą figūrą dedame ant pirmosios, ir stumdome per langelį į kairę-dešinę-apačią-viršų. Kiekvieną kartą suskaičiuojame bendrą atkarpų skaičių. Dabar peršviečiamą figūrą pasukame 90°, vėl atliekame tą patį, tada pasukame dar 90°, dar 90°, o tada figūrą apverčiame ir vėl kartojame procedūrą. Taip įsitikiname, kad spėjime **?** nurodytas uždėjimas vienintelis. Siūlome skaitytojui tuo įsitikinti pačiam.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Ir vis tik matematika galinga, ji ir perrankos nemėgsta — pasižiūrėkime, ar įmanoma įrodyti, kad lankstinių niekada nesutaps 6 atkarpos?
Pirmame lankstinyje vertikalios yra 4 atkarpos, ir jos telpa į stačiakampį 2×3, o antrame lankstinyje į bet kaip pasuktą stačiakampį 2×3 telpa tik 3 vienos krypties atkarpos — vadinasi, antras lankstinys gali uždengti ne daugiau kaip 3 vertikalias atkarpas. Pirmame lankstinyje į kvadratą 3×3 telpa tik 3 horizontalios atkarpos — vadinasi, antras gali uždengti tik 3 horizontalias atkarpas. Taigi antras lankstinys gali uždengti ne daugiau kaip 6 atkarpas. Įrodykime, kad uždengti 6 atkarpas neįmanoma. Tarkime priešingai — kad mums pavyko uždėti kvadratą 3×3 su antruoju lankstiniu taip, kad jis uždengia 3 horizontalias ir 3 vertikalias atkarpas. Tada viena kažkuria kryptimi jis uždengė 2 atkarpas, esančias stačiakampyje 3×1 (antrojo lankstinio horizontalios atkarpos telpa į tokį stačiakampį). Negana to, tos atkarpos turi būti zigzage „dvi į dešinę (viena į dešinę), viena į kairę“ arba simetriškame: dvi tiesiai (viena į kairę), viena į dešinę“ (skliausteliuose nurodyta atkarpa — tai nebūtinai lankstinio atkarpa). Sutapdinus zigzagų atkarpas, matome, kad 6 bendrų atkarpų nėra. Prieštara.

B28. (E) 536 479 879

! Pagalvokime, koks didžiausias gali būti skaitmuo K. Kadangi yra 4 didesni už jį skaitmenys (N, O, R, U), tai jis gali būti ne didesnis už 5 — jį ir bandykime, $K = 5$. Bet tada automatiškai $N = 6$, $O = 7$, $R = 8$, $U = 9$. Dabar mums rūpi didžiausias A. Negali būti $A = 4$, nes G didesnis, o jam nebeliko vietos. Taigi bandome $A = 3$, tada automatiškai $G = 4$. Gauname $KANGOUROU = 536\,479\,879$.
Teisingas atsakymas **E**.

B29. Ⓔ 3

(Plg. uždavinio M17 sprendimą.) Kadangi iš trijų draugų, sveriančių 75, 80 ir 85 kilogramus, jokie du netelpa į liftą, tai reikės ne mažiau kaip 3 kėlimų. Bet 3 kėlimų tikrai gana — užtenka pirmu kėlimu pakelti, pavyzdžiui, du lengviausius draugus: $50 + 75 = 125$ kg. Tada antru ir trečiu važiavimu pakeliame likusius draugus.
Teisingas atsakymas **E**.

B30. Ⓓ Elė

Molė nėra dešiniausia. Dolė nėra dešiniausia, nes dešiniau sėdi Elė. Selė nėra dešiniausia — ji iš viso nėra kraštinė. Vadinasi, turime dvi kandidates į dešiniausią vietą. Bet spėti dar ankstoka: jeigu tiktų abi, tai teisingas būtų atsakymas **A** „Nustatyti neįmanoma". Nagrinėkime toliau.
Sakykime, kad dešiniausia yra Kelė. Dolės dešinėje taip pat yra Elė. Kadangi Dolė nėra kairiausia, tai ji atsiduria šalia Selės, o tai neįmanoma. Taigi dešiniausia vieta lyg tai lieka Elei.
Renkamės atsakymą **D**.

Atsakymą **D** rinktis galėjome, nes konkurso taisyklėse garantuojama, jog teisingas tik vienas iš atsakymų. Dalykai netikėtai pasikeistų, jei atsakymas **A** būtų, sakysime toks: „Situacija iš viso neįmanoma" arba toks: „Nei vienas iš kitų atsakymų nėra teisingas". Tada tuo atveju, jei Elės neišeina pasodinti dešiniausiai, tektų rinktis jau ne atsakymą **E**, o atsakymą **A**.
Taigi išsiaiškinkime, ar įmanoma Elei sėdėti dešiniausiai. Kelė turi užimti kairiausią vietą, nes kitaip Kelė, Selė ir Dolė sėdėtų trijose vidurinėse vietose, ir šalia Selės sėdėtų arba Kelė, arba Dolė, o taip nėra. Toliau, vidurinę vietą užima Molė — ji turi atskirti Selę ir Dolę. Pagaliau, Selė nesėdi šalia Kelės, todėl ji sėdi tarp Molės ir Elės. Dolei lieka vieta tarp Kelės ir Molės. Vadinasi, mergaitės sėdi iš kairės į dešinę tokia tvarka: Kelė, Dolė, Molė, Selė, Elė. Nesunku pasitikrinti, kad uždavinio salygos išpildytos.
Teisingas atsakymas **D**.

Perskaityti surašytą sprendimą nėra sunku, — žymiai sunkiau suvokti, kaip gi reikia samprotauti, kuria tvarka surašinėti argumentus. Bet matematikoje samprotauti dažnai padeda formulės — formalizuoti sprendimą, pasirodo, įmanoma ir čia.
Sunumeruokime vietas iš kairės į dešinę numeriais 1, 2, 3, 4, 5. Mergaites žymėkime pirmąja jų vardo raide, o, pavyzdžiui, užrašas $M = 5$ reikš, kad Molė sėdi dešiniausiai. Sąlygą tada užrašome taip:

$$M \neq 5,\ D \neq 1,\ S \neq 5,\ S \neq 1,\ |K - S| \geqslant 2,\ |S - D| \geqslant 2,\ E > D. \qquad (*)$$

Galime sakyti, kad skaičiai 1, 2, 3, 4, 5 užšifruoti skirtingomis raidėmis M, D, S, E, K, ir reikia išspręsti parašytąją sistemą. Iš karto pastebime, kaip tai patogu — viskas surašyta vienoje eilutėje. Negana to — parašytos nelygybės dažnai pačios nurodo sprendimo kelią, formulės galvoja už mus.
Iš paskutines nelygybės $E > D$ aišku, kad $D \neq 5$. Taigi turime $2 \leqslant S \leqslant 4$, $2 \leqslant D \leqslant 4$. Bet $|S - D| \geqslant 2$, todėl S ir D įgyja reikšmes 2 ir 4 arba atvirkščiai.
Taigi turime du atvejus.

1) atvejis, $S = 2$, $D = 4$.
Persirašykime mūsų nelygybių sistemą atsižvelgdami į S ir D reikšmes ir išmesdami nebereikalingus sąryšius:
$S = 2$, $D = 4$, $M \neq 5$, $|K - 2| \geqslant 2$, $E > 4$.
Tai reiškia, kad $E = 5$, tada $K = 4$, — prieštara (reikšmė 4 jau užimta raidės D).
2) atvejis, $S = 4$, $D = 2$:
$S = 4$, $D = 2$, $M \neq 5$, $|K - 4| \geqslant 2$, $E > 2$.
Iš nelygybės $|K - 4| \geqslant 2$ aišku, kad $K = 1$ (nes reikšmė 2 užimta), tada $M = 3$, todėl $E = 5$. Taigi gavome sprendinį $K = 1$, $D = 2$, $M = 3$, $S = 4$, $E = 5$.
Patikrinę įsitikiname, kad jis tikrai tenkina sistemą $(*)$.

!!! Sprendime !! teko nagrinėti 2 atvejus. Pabandykime sprendimą formalizuoti ir tęsti toliau. Jau įrodėme, kad S (taip pat ir D) įgyja reikšmę 2 arba 4 — tai žymėsime taip: $S \in \{2, 4\}$, $D \in \{2, 4\}$. Mūsų sistema $(*)$ virsta

$$S \in \{2, 4\}, \quad D \in \{2, 4\}, \quad M \in \{1, 3\}, \quad |K - S| \geqslant 2, \quad E > D.$$

Kadangi $E > D$, tai $E \in \{3, 5\}$, o kadangi $|K - S| \geqslant 2$, tai $K \neq 3$, t. y. $K \in \{1, 5\}$. Gavome sistemą

$$S \in \{2, 4\}, \quad D \in \{2, 4\}, \quad M \in \{1, 3\}, \quad |K-S| \geqslant 2, \quad E > D, \quad K \in \{1, 5\}, \quad E \in \{3, 5\}.$$

Iš jos matome, kad S, $D \in \{2, 4\}$, M, K, $E \in \{1, 3, 5\}$, bet tiksliau ką nors pasakyti ar gauti naujų išvadų sunku. Tenka vėl nagrinėti dvi galimybes, tik čia pradėti galima nuo bet kurio kintamojo.
Pavyzdžiui: jei $E = 3$, tai $M = 1$, tada $K = 5$, iš nelygybės $E > D$ turime $D = 2$, tada $S = 4$, ir pažeista nelygybė $|K - S| \geqslant 2$; o jei $E = 5$, tai $K = 1$, tada $M = 3$, ir iš nelygybės $|K - S| \geqslant 2$ gauname $S = 4$, taigi $D = 2$. Gavome vienintelį sprendinį.
Arba, pavyzdžiui, taip: $K \neq 5$, nes jei $K = 5$, tai būtų $E = 3$, $D = 2$, $S = 4$, ir $|K - S| = 1$, — prieštara, vadinasi, $K = 1$, tada $M = 3$, $E = 5$, iš nelygybės $|1 - S| \geqslant 2$ turime $S = 4$, taigi $D = 2$, ir gavome sprendinį.