KADETAS (VII ir VIII klasės)

K1. C 1204

? Rezultatas yra mažesnis už 2000 ir turi baigtis 4.
Renkamės atsakymą **C**.

! Skaičiuojame: $2004 - 200 \cdot 4 = 2004 - 800 = 1204$.
Teisingas atsakymas **C**.

K2. E 300°

! Jeigu taip suktume trikampį ABC, tai jis grįžtų į savo padėtį po posūkio 360° kampu. Kadangi pasuktas 60° trikampis ABC sutaps su trikampiu ACD, tai trikampis ACD pirmą kartą sutaps su ABC pasisukęs kampu $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$.
Teisingas atsakymas **E**.

K3. E 42

! Skaičiuoti lengva „nuo galo“: $50 - 1 = 49$, $\sqrt{49} = 7$, $7 \cdot 3 = 21$, $21 : 0{,}5 = 42$.
Teisingas atsakymas **E**.

!! Žinoma, galima spręsti ir lygtį $\left(\frac{x \cdot 0{,}5}{3}\right)^2 + 1 = 50$, bet iš esmės bus atlikti tie patys veiksmai.

K4. B 2

? Į pirmos eilutės antrą langelį galima įrašyti tik 4. Tada x galima imti 2 arba 3.
Renkamės atsakymą **B**.

! (Plg. su uždavinio B2 sprendimu.)
Iš tikrųjų reikia įsitikinti, kad abu minėti pasirinkimai leidžia užpildyti visą lentelę. Įrašę 4 į pirmos eilutės antrą langelį, užpildome pirmą stulpelį — įrašome 2, žemiau 3. Dabar trečioje eilutėje rašome 1, 4, o po šiais skaičiais 4, 1 (arba trečioje 4, 1, o po jais 1, 4). Matome, kad vietoje x galima imti tiek 2, tiek 3. Jeigu imame 2, tai pirmoje eilutėje stovi 2, 3, antroje po šiais skaičiais 3, 2, ir lentelė užpildyta. Jeigu imame 3, tai pirmoje eilutėje stovi 3, 2, antroje — 2, 3, ir vėl lentelė užpildyta teisingai.
Teisingas atsakymas **B**.

1	4	x	
4	1		
2	3	1	4
3	2	4	1

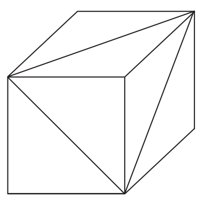
K5. D 48

! Neapsirikime — sudėti reikia minus vienetą ir 49 vienetus. Vadinasi, gauname 48.
Teisingas atsakymas **D**.

K6. A Lygiakraštis trikampis

? Kadangi sienose bus trys atkarpos, tai pjūvis bus trikampis, o kadangi jo kraštinės lygios, tai gausime lygiakraštį trikampį.
Renkamės atsakymą **A**.

! Įsitikinkime, kad iš tų trijų atkarpų trikampis pjūvyje susidaro. Vaizdu bus, jeigu dešinį išklotinės kvadratą laikysime priekine siena, o gretimą — pagrindu. Tada sulanksčius kairysis kvadratas taps viršutine siena, ir gausime paveikslėlyje pavaizduotą pjūvį.
Teisingas atsakymas **A**.



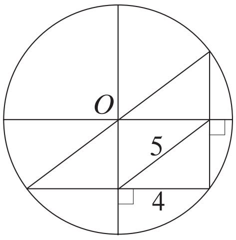
K7. C 21%

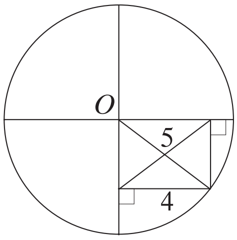
? Imkime kvadratą su kraštine 10 — jo plotas 100. Padidinkime kraštinę 10%, t. y. vienu dešimtadaliu — kraštinė bus 11. Naujo kvadrato plotas 121, jis didesnis už senąjį 21, o tai sudaro 21%. Renkamės atsakymą **C**.

! Žinoma, atsakymas liks tas pat, jei imsime bet kurį stačiakampį. Jei jo kraštinės a ir b, tai plotas ab. Kraštinėms padidėjus, jos bus $1{,}1a$ ir $1{,}1b$, o naujo stačiakampio plotas $1{,}1a \cdot 1{,}1b = 1{,}21ab$. Plotas padidėjo $0{,}21ab$, o tai sudaro 21% ploto ab.
Teisingas atsakymas **C**.

K8. C 10

? Panašu, kad pratęsę stačiojo trikampio statinius iki susikirtimo su apskritimu ir sujungę kirtimosi taškus, gauname skersmenį, dukart didesnį už naujo trikampio vidurinę liniją (žr. kairįjį pav.).
Renkamės atsakymą **C**.





! Nesunku būtų spėjimą padaryti griežtu sprendimu, bet paprasčiausia išvesti kitą stačiakampio įstrižainę. Ji taip pat lygi 5, bet kartu yra ir apskritimo spindulys (žr. dešinįjį pav.). Vadinasi, skersmuo lygus 10.
Teisingas atsakymas **C**.

K9. B 10

! Sužymėkime ledų rūšis skaičiais 1, 2, 3, 4, 5. Tada įmanoma sudaryti poras 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45 — iš viso 10 porų.
Teisingas atsakymas **B**.

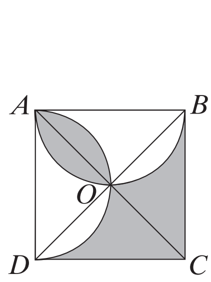
!! Galima pritaikyti ir daugybos taisyklę. Įsivaizduokime, kad mums svarbu, kokią porciją suvalgyti pirma, o kokią — paskui. Tada pirmą porciją galima išsirinkti 5 būdais, antrą — 4 būdais. Vadinasi, abi porcijas galima suvalgyti $5 \cdot 4 = 20$ būdų. Todėl nekreipiant dėmesio į porcijų valgymo tvarką būdų bus dvigubai mažiau, t. y. 10.

K10. D 42

! Kadangi žiedo „storis" yra $3 - 2 = 1$ cm, tai nuo pirmo žiedo kairiojo krašto iki antro žiedo yra $6 - 2 = 4$ cm. Todėl kiekvienas žiedas prailgina grandinę 4 cm, o paskutinis — 6 cm. Vadinasi, iki paskutinio žiedo kairiojo krašto grandinės ilgis lygus $170 - 6 = 164$ cm, o tai atitinka $164 : 4 = 41$ žiedą. Pridėję paskutinį žiedą, gauname 42 žiedus.

K11. B 8

! Išveskime įstrižainę BD, įstrižainių susikirtimo tašką pažymėkime O. Matome keturias lygių skritulių nuopjovas. Jų plotai vienodi, nes vienodos nuopjovų stygos.
Užtušuotą plotą sudaro kreiviniai trikampiai CDO, BCO ir dvi nuopjovos. Vadinasi, jis lygus trikampio BCD plotui, t. y. 8.
Teisingas atsakymas **B**.



K12. B 8

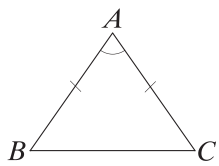
Žr. uždavinio B23 sprendimą.

K13. C Penktadienių

! Kadangi nekeliamieji metai turi $365 = 52 \cdot 7 + 1$ dieną, tai visų savaitės dienų metuose yra tiek pat, išskyrus tą dieną, kuria baigiasi metai. Vadinasi, pirmieji metai baigėsi ketvirtadieniu. Antrieji metai prasidėjo penktadieniu, pirma ir kitos savaitės baigėsi ketvirtadieniu, o paskutinė metų diena vėl buvo penktadienis. Taigi penktadienių buvo daugiausia — vienu daugiau nei kitų savaitės dienų. Teisingas atsakymas **C**.

K14. D 4

! Kadangi $\angle B = \angle C$, tai $2\angle B + \angle A = 180°$, ir pagal sąlygą $2\angle B < 120°$, t. y. $\angle B < 60°$. Vadinasi, $\angle A > \angle B$, todėl $BC > AC$, t. y. $BC > 5$. Kita vertus, remiantis trikampio nelygybe didžiausia kraštinė BC mažesnė už AB ir AC sumą, t. y. $BC < 10$. Taigi BC gali įgyti sveikąsias reikšmes 6, 7, 8, 9.
Teisingas atsakymas **D**.



K15. E Penktadienį 11:11

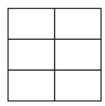
? Kadangi Mutis išlaikė galvą smėlyje daugiau kaip 4 paras, tai ją ištraukė penktadienį vėliau kaip 8:15. Tėra tik vienas tinkamas atsakymas.
Renkamės atsakymą **E**.

! Žinoma, lengva ir suskaičiuoti. 98 h 56 min yra 4 paros plius 2 h 56 min, todėl Mutis galvą ištraukė penktadienį $8{:}15 + 2{:}56 = 10{:}71 = 11{:}11$.
Teisingas atsakymas **E**.

K16. D 36

? Vienos kaladėlės tūris 6. Tikriname, kokius tūrius duoda atsakymai: $12 \cdot 6 = 2^3 \cdot 3^2$, $18 \cdot 6 = 2^2 \cdot 3^3$, $24 \cdot 6 = 2^4 \cdot 3^2$, $36 \cdot 6 = 2^3 \cdot 3^3$, $60 \cdot 6 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Matome, kad tik atveju **D** gauname sveikąją kubo briauną a: $a^3 = 2^3 \cdot 3^3$, $a = 6$.
Renkamės atsakymą **D**.

! Vienos kaladėlės tūris yra 6. Vadinasi, kubo tūris dalijasi iš 6, taigi ir iš 2, ir iš 3. Pažymėkime kubo kraštinę a. Kadangi tūris a^3 lyginis, tai ir a lyginis. Kadangi $a^3 = a \cdot a \cdot a$ dalijasi iš 3, tai ir a dalijasi iš 3. Vadinasi, a dalijasi iš 6, mažiausia kubo kraštinė ne mažesnė už 6, o kubo tūris ne mažesnis už 6^3. Nesunku įsitikinti, kad iš kaladėlių tikrai galima sudėti kubą $6 \times 6 \times 6$.



Laikykime, kad kaladėlės aukštis 1, tada jos pagrindas — stačiakampis 2×3. Iš 6 tokių stačiakampių nesunku sudėti kvadratą 6×6 (žr. paveikslėlį). Vadinasi, iš 6 kubelių galima sudėti aukščio 1 „sluoksnį“ $6 \times 6 \times 1$, o 6 tokiems sluoksniams prireiks 36 kubelių.
Teisingas atsakymas **D**.

K17. C 256

? Į sandaugą įeina tik pirminiai daugikliai 2, todėl atkrinta **A** ir **B** (turi daugiklį 5), **D** (turi daugiklį 3). Lieka atsakymai **C**: $256 = 2^8$ ir **E**: 2^{11}. Bet atsakymas 2^{11} per didelis — didžiausia sandauga galėtų būti tik $4^5 = 2^{10}$.
Renkamės atsakymą **C**.

! Įsitikinti, kad 2^8 tinka, — paprasta: pavyzdžiui, $2^8 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 1$ arba $2^8 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 2$. Beje, taip pat nesunku įsitikinti, kad daugiau būdų gauti sandaugą 256 nėra: dviejų ketvertukų per mažai, nes tada sandauga būtų ne didesnė kaip $4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$, o jeigu yra 3 ketvertukai, tai likusių dviejų dauginamųjų sandauga lygi $256 : 64 = 4$, ir 4 galima išskaidyti tik 2 būdais.
Teisingas atsakymas **C**.

K18. Ⓔ 75

? Tikriname atsakymus nuo vidurio — nuo **C**. Jei seneliui būtų 73 metai, tai senelei 70, 7 vaikaičiams kartu — $7 \cdot 15 = 105$ metai, ir visų amžiaus vidurkis būtų $(105 + 73 + 70) : 9$, bet visų dalinio skaitmenų suma $1 + 5 + 7 + 3 + 7 = 23$ iš 9 nesidalija. O štai padidinus senelio amžių 2 metais, tiek pat padidėtų ir senelės amžius, ir 27 jau dalytųsi iš 9.
Renkamės atsakymą **E**.

! Visiems kartu yra $28 \cdot 9$ metai, vaikaičiams kartu $7 \cdot 15$ metų, todėl seneliui ir senelei kartu yra $28 \cdot 9 - 7 \cdot 15 = 7 \cdot 3(4 \cdot 3 - 5) = 7 \cdot 3 \cdot 7 = 147$ metai. Jei senelė būtų 3 metais vyresnė, ji turėtų tiek pat metų, kaip ir senelis, taigi abu turėtų po $150 : 2 = 75$ metus. Tiek metų senelis turi ir dabar.
Teisingas atsakymas **E**.

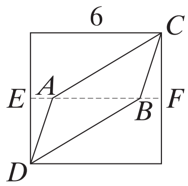
K19. Ⓑ 1

! Sakykime, kad kengūrų buvo šešios, tada pirmoji kengūra sakė tiesą, todėl visos likusios kengūros melavo. Jeigu kengūrų buvo ne šešios, tai pirma kengūra melavo, o antra sakė tiesą, todėl visos kitos kengūros melavo, ir vėl vienintelė kengūra sakė tiesą.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Galima sakyti, kad pirma kengūra sakė „Mūsų iš viso yra 6“, o antra — „Mūsų iš viso yra ne 6“. Nežiūrint, kiek tų kengūrų buvo, iš šių dviejų teiginių vienas teisingas, kitas — ne. Todėl likusios kengūros melavo, taigi tiesą sakė viena kengūra.

K20. Ⓒ 4

? Imkime $EA = BF$, tada iš trikampių EAD ir CBF lygybės DA ir BC lygios ir lygiagrečios. Todėl vidurinė kvadrato dalis — lygiagretainis. Kadangi kvadrato plotas lygus 36, tai kiekvienos dalies plotas 12. Todėl trikampio ABC plotas lygus 6. Bet jo aukštinė lygi 3, todėl $AB = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$.
Renkamės atsakymą **C**.



! Kadangi trikampių ABC ir ABD pagrindas bendras, o aukštinės lygios, tai jų plotai lygūs. Vidurinės dalies plotas lygus trečdaliui kvadrato ploto, t. y. 12, todėl $\triangle ABC$ plotas lygus 6. Jo aukštinė CF lygi 3, todėl $AB = 2 \cdot 6 : 3 = 4$.
Teisingas atsakymas **C**.

K21. Ⓑ 15

? Sakykime, kad Igno kelias į mokyklą lygus 30 km. Tada į mokyklą jis važiuoja $30 : 10 = 3$ h, o iš mokyklos $30 : 30 = 1$ h. Iš viso jis nuvažiuoja 60 km per 4 valandas, todėl jo vidutinis greitis 15 km/h.
Renkamės atsakymą **B**.

! Sprendimas nedaug skiriasi, jeigu nedarysime prielaidos, kad Igno kelias į mokyklą lygus 30 km. Iš tikrųjų, pažymėkime kelią į mokyklą $30a$ km. Tada į mokyklą Ignas važiuoja $30a : 10 = 3a$ valandų, iš mokyklos $30a : 30 = a$ valandų, o visą kelią $60a$ km jis nuvažiuoja per $4a$ valandų. Todėl jo vidutinis greitis lygus $60a : (4a) = 15$ (km/h).
Teisingas atsakymas **B**.
Pastaba. Skaitytojui gali kilti klausimas — o kas gi tas a? Atsakymas paprastas — tai Igno kelio į mokyklą trisdešimtoji dalis.

K22. Ⓑ 524

? Labai lengva sudaryti 500 puslapių — paėmus po vieną abiejų rūšių žurnalą, gauname 100 puslapių — vadinasi, užtenka paimti po 5 žurnalus. Panašiai lengva surinkti $568 = 520+48$, $588 = 300+6\cdot 48$, $620 = 520 + 100$ puslapių. Surinkti **B** bent jau iš karto nepavyksta.
Renkamės atsakymą **B**.

! Atvejis **A** jau išnagrinėtas. Nagrinėkime atvejį **B**. 11 žurnalų turi daugiau kaip $480 + 48 = 528$ puslapius, 9 žurnalai — mažiau kaip $520 - 52 = 468$ puslapius, todėl galėtų būti tik 10 žurnalų. jeigu pirmųjų žurnalų bus x, tai antrųjų $10 - x$, ir puslapių bus $48x + (10 - x)52 = 524$, $4x = -4$, $x = -1$. Prieštara.
Atveju **C** žurnalų daugiau kaip $\frac{568}{52} = \frac{142}{13} = 10,\ldots$, bet mažiau kaip $\frac{568}{48} = \frac{142}{12} = \frac{71}{6} = 11,\ldots$. Vadinasi, žurnalų yra 11, jie puslapių turi $48x + (11 - x)52 = 568$, $4x = 4$, $x = 1$, taigi pirmųjų žurnalų reikia imti vieną, antrųjų — dešimt.
Atveju **D** žurnalų daugiau kaip $\frac{588}{52} = \frac{147}{13} = 11,\ldots$, bet mažiau kaip $\frac{588}{48} = \frac{147}{12} = 12,\ldots$. Vadinasi, žurnalų yra 12, jie puslapių turi $48x + (12 - x)52 = 588$, $4x = 36$, $x = 9$, taigi pirmųjų žurnalų reikia imti devynis, antrųjų — tris.
Atveju **E** žurnalų daugiau kaip $\frac{620}{52} = \frac{155}{13} = 11,\ldots$, bet mažiau kaip $\frac{620}{48} = \frac{155}{12} = 12,\ldots$. Vadinasi, žurnalų yra 12, jų puslapių skaičius $48x + (12-x)52 = 620$, $12x + (12-x)13 = 155$, $x = 1$, todėl pirmųjų žurnalų reikia imti vieną, o antrųjų — vienuolika.
Taigi negalima sudaryti tik puslapių skaičiaus 524.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Pažymėkime 48 puslapių žurnalų skaičių x, 52 puslapių žurnalų skaičių — y. Tada bendras visų žurnalų puslapių skaičius $48x + 52y$, ir reikia spręsti lygtis $48x + 52y = 500$ (arba $= 524, 568, 588, 620$), t. y. lygtis $12x + 13y = 125$ (131, 142, 147, 155). Perrenkant sprendinius padės dalumas iš 12: kadangi $13y = 12y + y$, tai y dalijimo iš 12 liekana bus 5 (11, 10, 3, 11).
Atveju **A** $y = 5$ ($y \geqslant 17$ jau per daug), atveju **B** $y = 11$ — jau per daug, atveju **C** $y = 10$, atveju **D** $y = 3$, atveju **E** $y = 11$. Sprendinio negavome tik atveju **B**.

K23. Ⓐ 128

Žr. uždavinio B26 sprendimą.

K24. Ⓑ 641

? Iš karto pastebime, kad $641 = 625 + 16$, ir jų sandauga $5^4 \cdot 2^4 = 10^4$.
Renkamės atsakymą **B**.

! Kadangi $ab = 2^4 \cdot 5^4$, tai į vieno iš skaičių a skaidinį įeina tik dvejetukai, į kito — tik penketukai. Vadinasi, tie skaičiai 2^4 ir 5^4, o jų suma lygi 641.
Teisingas atsakymas **B**.

K25. Ⓐ -2

! Kadangi kalbama apie rezultato pirmos ir antros komponenčių skirtumą, tai pasižiūrėkime, kaip jis pakinta po vienos operacijos. Matome, kad $a - b$ virsta $b - a$, t. y. skirtumas keičia ženklą. Po dviejų operacijų skirtumas vėl bus tas pats, $a - b$, ir t. t. Vadinasi, po lyginio operacijų skaičiaus (taigi ir po 2004) skirtumas vėl bus pradinis, $1 - 3 = -2$.
Teisingas atsakymas **A**.

K26. Ⓔ M ir T

Žr. uždavinio M24 sprendimą.

K27. Ⓒ 14

! Kubo sienose parašytus skaičius pažymėkime a, v, k, d, p, u (apatinis, viršutinis, kairysis, dešinysis, priekinis, užpakalinis). Tada viršūnėse esančių skaičių suma lygi

$$\begin{aligned} &akp + adp + aku + adu + vkp + vdp + vku + vdu = \\ &\quad = ak(p+u) + ad(p+u) + vk(p+u) + vd(p+u) = \\ &\quad = (p+u)(a(k+d) + v(k+d)) = \\ &\quad = (p+u)(k+d)(a+v). \end{aligned}$$

Pagal sąlygą $(p+u)(k+d)(a+v) = 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$. Kadangi kiekvienas dauginamasis ne mažesnis už 2, tai daugikliai $p+u$, $k+d$, $a+v$ lygūs tam tikra tvarka 2, 5 ir 7. Todėl visose sienose parašytų skaičių suma $p+u+k+d+a+v$ lygi $2+5+7 = 14$.
Teisingas atsakymas **C**.

K28. Ⓔ 18

! Jeigu keturženklis skaičius dalijasi iš 12, tai jis dalijasi iš 4 ir iš 3. Vadinasi, jo dviskaitė galūnė dalijasi iš 4. Kadangi pirmas skaitmuo $\geqslant 1$, tai galūnės skaitmenų suma $\leqslant 5$, todėl galūnė gali būti 00, 04, 12, 20, 32, 40. Galūnę 00 turi skaičiai 1500, 2400, 3300, 4200, 5100, 6000. Galūnę 04 turi skaičiai 1104 ir 2004. Galūnę 12 turi skaičiai 1212, 2112, 3012. Galūnę 20 turi skaičiai 1320, 2220, 3120, 4020. Galūnę 32 turi skaičius 1032. Galūnę 40 turi skaičiai 1140 ir 2040. Radome 18 skaičių.
Teisingas atsakymas **E**.

!! Žinoma, pačių skaičių galima ir neišrašinėti. Prieš galūnę 00 turi stovėti dviženklis skaičius, kurio skaitmenų suma 6. Pirmas skaitmuo gali įgyti 6 reikšmes nuo 1 iki 6, antras nustatomas vienareikšmiškai (6 skaičiai). Prieš galūnę 04 ir 40 turi stovėti dviženklis skaičius, kurio skaitmenų suma 2 — taigi pirmas skaitmuo gali įgyti 2 reikšmes ($2 \cdot 2 = 4$ skaičiai). Prieš galūnę 12 turi stovėti dviženklis, kurio skaitmenų suma 3 (3 skaičiai). Prieš galūnę 20 turi stovėti dviženklis, kurio skaitmenų suma 4 (4 skaičiai). Prieš galūnę 32 turi stovėti dviženklis skaičius, kurio skaitmenų suma lygi 1 (1 skaičius). Iš viso turime $6+4+3+4+1 = 18$ skaičių.

K29. Ⓒ 18
Žr. uždavinio B30 sprendimą.

K30. Ⓐ 17
Žr. uždavinio B29 sprendimą.