KADETAS (VII ir VIII klasės)

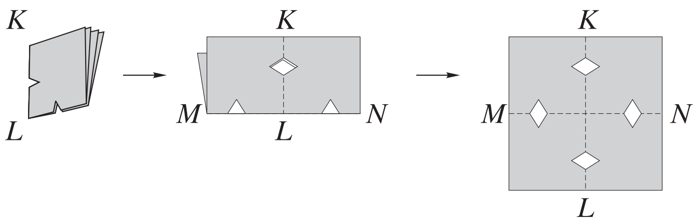
K1. E 10 000

? Galima tikrinti atsakymus. Kadangi vidutinė kaina sumažėjo, tai brangiausia papūga kainavo daugiau kaip 6000 litų. Vadinasi, parduotoji papūga kainavo daugiau kaip 6000 litų, o pagal atsakymus — 10 000.
Renkamės atsakymą **E**.

! Iš pradžių visos papūgos kainavo $5 \cdot 6000 = 30\,000$ litų. Kai pardavė papūgą už 10 000 litų, likusios kainavo 20 000 Lt, o vidutinė jų kaina pasidarė $20\,000 : 4 = 5000$ Lt.
Teisingas atsakymas **E**.

K2. C

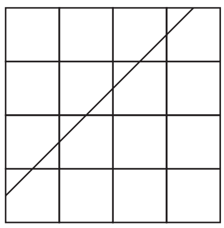
? Galima samprotauti taip. Kadangi servetėlės centras atitinka kairiojo paveikslėlio tašką L, o tas taškas neiškirptas, tai atsakymas **E** netinka. O dabar pastebėkime, kad iškirptų lygių kampų smailumos nukreiptos į skirtingas kvadrato kraštines. Iš atsakymų **A**, **B**, **C**, **D** taip yra tik atsakyme **C**.
Renkamės atsakymą **C**.



! Atlankstykime servetėlę. Nesunku suvokti, kad po pirmo atlenkimo gauname figūrą, pavaizduotą viduriniame paveikslėlyje, o po antro — figūrą, pavaizduotą dešiniajame paveikslėlyje, t. y. figūrą, nurodytą atsakyme **C**.
Teisingas atsakymas **C**.

K3. D 7

? Jaučiame, kad geriausia kirsti kvadratą, kaip tat parodyta piešinyje.

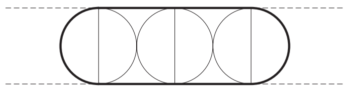


Suskaičiavę gauname 7 perkirstus kvadratėlius.
Renkamės atsakymą **D**.

! Skaičiuokime langelius taip: į naują langelį patenkame tik perkirtę horizontalę arba vertikalę. Kol pasiekiame kvadrato kraštą, kertame daugiausiai 3 vertikales ir 3 horizontales, taigi turime pradinį langelį ir dar daugiausiai 6, į kuriuos įeiname. Kad 7 langelius kirsti įmanoma, rodo piešinys.
Teisingas atsakymas **D**.

K4. Ⓒ $a+2b$

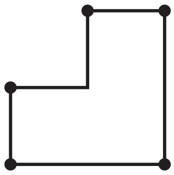
! Siūlas apjuosia du kvadratus ir du pusskritulius:



Todėl siūlo apjuosiamos srities plotas lygus $a+2b$.
Teisingas atsakymas **C**.

K5. Ⓓ 5

? Greitai pavyksta nusibraižyti šešiakampį, turintį 5 stačiuosius vidinius kampus. Nusibraižyti šešiakampio, turinčio 6 stačiuosius vidinius kampus, nepavyksta.



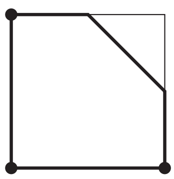
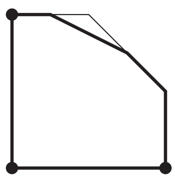
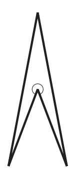
Renkamės atsakymą **D**.

! Įrodysime, kad šešiakampyje gali būti daugiausiai 5 statieji vidiniai kampai. Iš tikrųjų, šešiakampio visų kampų suma lygi $180^\circ(6-2)=720^\circ$. Todėl jei jis turi 5 kampus po 90°, tai šeštas kampas lygus $720^\circ-5\cdot 90^\circ=270^\circ$.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Įdomu nustatyti, kiek stačiųjų vidinių kampų gali turėti n-kampis.
Iš pradžių imkime iškiluosius n-kampius.
Kadangi trikampio visų trijų kampų suma lygi 180°, tai jis gali turėti tik vieną statųjį kampą (ir kartais jį turi).
Keturkampis gali turėti visus 4 stačiuosius kampus — tai stačiakampis. (Įdomus šuolis — trikampis daugiausiai turi 1 statųjį kampą, keturkampis — net 4.)
Penkiakampio kampų suma lygi $180^\circ(5-2)=540^\circ$. Visi penki kampai negali būti statūs, nes $5\cdot 90\neq 540$. Jeigu 4 kampai būtų statūs, tai penktas kampas būtų lygus $540^\circ-360^\circ=180^\circ$, o toks kampas nebūna.
Panašiai samprotaujame ir toliau. Imkime n-kampį ($n\geqslant 6$), jo kampų suma lygi $180^\circ(n-2)$. Visi kampai negali būti statūs, nes tada būtų $90^\circ n=180^\circ(n-2)$, $n=2(n-2)$, $n=4$. Sakykime, kad jis turi k stačiųjų kampų ir $n-k$ ($\geqslant 1$) nestačiųjų kampų. Kadangi iškilojo daugiakampio kampai mažesni už 180°, tai

$$180^\circ(n-k)+90^\circ k>180^\circ(n-2),\quad 2(n-k)+k>2(n-2),$$

t. y. $k<4$. Vadinasi, iškilasis n-kampis ($n\geqslant 5$) gali turėti daugiausiai 3 stačiuosius kampus.
Paprasta įsitikinti, kad iškilasis n-kampis ($n\geqslant 5$) iš tikrųjų gali turėti 3 stačiuosius kampus.
Imkime kvadratą ir nukirpkime vieną jo kampą per kraštinių vidurius (žr. kairiuosius brėžinius).

Gavome penkiakampį su 3 stačiaisiais kampais. Dabar nukirpkime vieną nestatųjį jo kampą per jį sudarančių kraštinių vidurius — gauname šešiakampį su 3 stačiaisiais kampais. Aišku, kad šią nestačiųjų kampų skaičiaus didinimo procedūrą galima tęsti iki bet kurio n.

Pereikime prie bet kurių (nebūtinai iškilų) n-kampių. Skirtumas čia tas, kad neiškilojo daugiakampio vidinis kampas gali būti ir didesnis už 180°; jis mažesnis už 360°, bet gali būti kiek norima artimas 360° net keturkampyje (žr. dešinį brėžinį).

Trikampių neiškilųjų nebūna, todėl trikampiai, kaip jau įsitikinome, gali turėti daugiausiai vieną statųjį kampą. Stačiakampiai jų turi net keturis. Penkiakampio atveju senasis samprotavimas tinka, todėl penkiakampis turi daugiausiai 3 stačiuosius kampus.

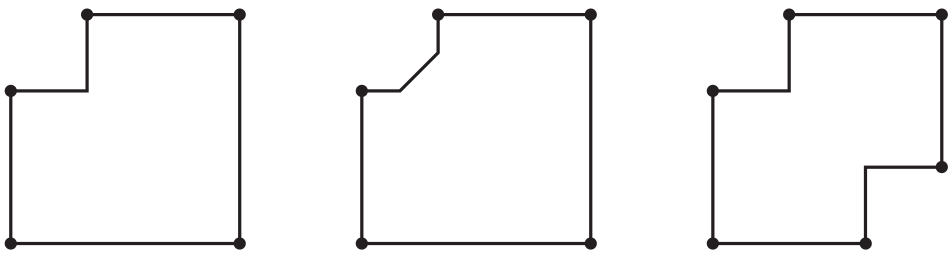
Taigi imkime $n \geqslant 6$. Kadangi ir neiškilojo n-kampio vidaus kampų suma lygi $180^\circ(n-2)$, tai jau matėme, kad jis turi ir nestačiųjų kampų. Jeigu stačiųjų kampų yra k, o nestačiųjų $n-k$, tai

$$360^\circ(n-k) + 90^\circ k > 180^\circ(n-2), \quad 4(n-k) + k > 2n - 4, \quad 3k < 2n + 4.$$

Vadinasi, $3k \leqslant 2n + 3$, $k \leqslant \left[\frac{2n}{3}\right] + 1$.

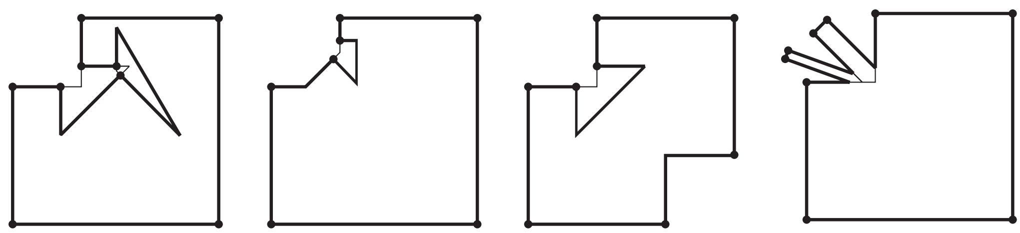
Pavyzdžiais pademonstruosime, kad reikšmė $\left[\frac{2n}{3}\right] + 1$ įgyjama. Vadinasi, n-kampis ($n \geqslant 6$) daugiausiai gali turėti $k_{\max} = \left[\frac{2n}{3}\right] + 1$ statųjį kampą. Tai galima užrašyti ir be sveikosios dalies ženklo ($m \in \boldsymbol{N}$): jeigu $n = 3m + 3$, tai $k_{\max} = 2m + 3$; jeigu $n = 3m + 4$, tai $k_{\max} = 2m + 3$; jeigu $n = 3m + 5$, tai $k_{\max} = 2m + 4$.

Iš tikrųjų, kai $m = 1$, tai viskas aišku: pavyzdžiai rodo, kad kai $n = 6$, tai $k_{\max} = 5$; kai $n = 7$, tai $k_{\max} = 5$; kai $n = 8$, tai $k_{\max} = 6$ (juodais skrituliukais pažymėtos vidinių stačiųjų kampų viršūnės).



$n = 6$ $\qquad$ $n = 7$ $\qquad$ $n = 8$

Dabar užtenka parodyti, kaip konstruojami daugiakampiai, kurie, padidinus viršūnių skaičių trimis, turi dviem stačiaisiais kampais daugiau. Pavyzdžiui, galima imti kampą $> 180^\circ$ ir iškirpti prie jo viršūnės iš daugiakampio „trikampį be viršūnės“, o procedūrą tęsti mažinant trikampius (žr. tris kairiuosius paveikslėlius).



$n = 3m + 3$ $\qquad$ $n = 3m + 4$ $\qquad$ $n = 3m + 5$

Galima ir pripiešinėti prie kampų $> 180^\circ$ viršūnių iš išorės „nudrožtą pieštuką“ (žr. dešinį paveikslėlį).

Taigi neiškilasis n-kampis ($n \geqslant 6$) turi daugiausia $\left[\frac{2n}{3}\right] + 1$ statųjį kampą.

K6. B 4

! Pažymėkime ąsočio talpą a, butelio b, stiklinės s, bokalo k. Pagal sąlygą $a = b + s$, $b = s + k$, $3k = 2a$. Todėl $3k = 2a = 2b + 2s = 2s + 2k + 2s$, t. y. $3k = 4s + 2k$, arba $k = 4s$.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Galima lygtis parašyti taip: $2a = 2b + 2s$, $2b = 2s + 2k$, $3k = 2a$. Jas sudėję, iš karto gauname $k = 4s$.
Beje, ne pro šalį sprendinį patikrinti. Randame, kad $a = 6s$, tada $b = 5s$, ir visos uždavinio sąlygos išpildytos.

!!! Žinoma, įmanoma sprendimą užrašyti ir be lygčių. Kadangi į ąsotį telpa butelis ir stiklinė, o į butelį — stiklinė ir bokalas, tai į ąsotį telpa bokalas ir 2 stiklinės. Vadinasi, į 2 ąsočius telpa 2 bokalai ir 4 stiklinės. Bet tai yra tiek pat, kiek ir 3 bokalai, todėl bokalas yra 4 stiklinės.

K7. B 16

! Kaip ir uždavinyje M24, aišku, kad visas „sąsmaukas" uždengiame vieninteliu būdu — neįlįsdami į kvadratų vidų. Iš tikrųjų, sakykime, pavyzdžiui, kad įsibrovėme į kairįjį viršutinį kvadratą iš dešinės. Tada jame liko 7 neuždengti kvadratėliai. Jų skaičius nelyginis, todėl reikia dar įsibrauti į minėtą kvadratą iš apačios. Bet tada to kvadrato dešinysis apatinis kampas lieka neuždengtas.
Liko uždengti kvadratus. Kiekvieną kvadratą galima uždengti dviem būdais: pavyzdžiui, minėto kvadrato kairįjį viršutinį langelį galima dengti horizontaliu kauliuku arba vertikaliu kauliuku, o po to kiti kauliukai savo vietas užima automatiškai.
Vadinasi, 4 kvadratus galima uždengti $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ būdų.
Teisingas atsakymas **B**.

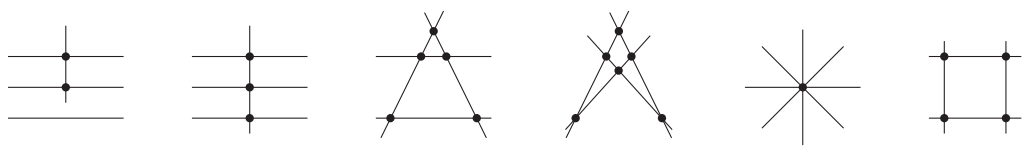
K8. D 19

? Nepanašu, kad nubraukus paskutinį skaitmenį, skaičius sumažėtų 20 kartų — juk tada pradinis skaičius baigtųsi nuliu ir sumažėtų tik 10 kartų. O štai paėmus 19 ir nubraukus 9 lieka 19 kartų mažesnis skaičius.
Renkamės atsakymą **D**.

! Sakykime, kad skaičius yra $n = \overline{xy} = 10x + y$. Nubraukus paskutinį skaitmenį, jis tampa x. Gauname $nx = 10x + y$, $(n - 10)x = y$. Kadangi $y \leqslant 9$, $x \geqslant 1$, tai $n - 10 \leqslant 9$, $n \leqslant 19$. Šis įvertis pasiekiamas — užtenka imti $x = 1$, $y = 9$. Iš tikrųjų, $19 : 1 = 19$.
Teisingas atsakymas **D**.

K9. E 7

? Kengūriškas atsakymas paprastas: kadangi pavyzdžiai rodo, jog gali būti 2, 3, 5, 6 susikirtimo taškai, tai renkamės atsakymą **E**.



! Atkarpos taip pat gali turėti 1 ir 4 susikirtimo taškus. O štai 7 taškų turėti jos negali: net 4 tiesės (ką jau tada šnekėti apie atkarpas) gali turėti tik 6 susikirtimo taškus. Iš tikrųjų, kiekviena tiesių pora gali turėti daugiausiai vieną susikirtimo tašką. Kadangi iš 4 tiesių a, b, c, d galima sudaryti tik 6 poras ab, ac, ad, bc, bd, cd, tai susikirtimo taškų gali būti daugiausiai 6.
Teisingas atsakymas **E**.

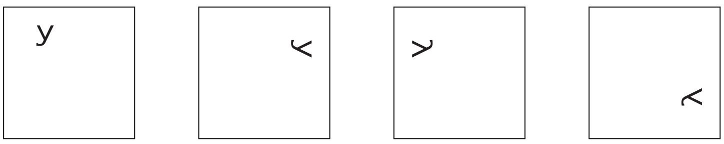
K10. Ⓒ 3125

! Padauginę 768 iš 2500 gauname $A = 768 \cdot 2500 = 384 \cdot 5000 = 1\,920\,000 = ...20\,000$, t. y. 4 nulius (nerašome pirmųjų skaitmenų). Taip pat 4 nulius duos daugyba iš 5000 — nes $2A = ...40\,000$, iš 7500 — nes $3A = ...60\,000$, daugyba iš 10 000 — nes $4A = ...80\,000$. O štai daugyba iš 3125 duoda penkis nulius: $768 \cdot 3125 = 384 \cdot 6250 = 192 \cdot 12\,500 = 96 \cdot 25\,000 = 48 \cdot 50\,000 = 24 \cdot 100\,000$.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Nulių skaičių lemia tai, kiek dvejetų ir penketų porų įeina į sandaugą. Kadangi $768 = 2^8 \cdot 3$, $2500 = 5^4 \cdot 2^2$, $5000 = 5^4 \cdot 2^3$, $7500 = 5^4 \cdot 2^2 \cdot 3$, $10\,000 = 5^4 \cdot 2^4$, $3125 = 5^5$, tai iš tikrųjų sandaugos nulių skaičių lemia penketuko laipsnis. Vadinasi, daugindami 3125, gauname daugiausiai nulių — penkis.

K11. Ⓐ <

? Paprasčiausia paimti ploną popieriaus lapą, nupiešti tą raidę ryškiai, kad ji matytųsi iš kitos pusės (pavyzdžiui, prieš langą), ir atlikti su lapu nurodytus veiksmus. (Beje, tai prieš langą įmanoma atlikti su pačiu užduoties lapeliu.)
Gauname atsakymą **A**.



! Galima pavaizduoti visas raidės padėtis. Pasukę lapą 90° pagal laikrodžio rodyklę, gausime antrą paveikslėlį. Pervertę per kairįjį jo kraštą, gausime trečią paveikslėlį. Pagaliau pasukę lapą 180°, gauname ketvirtą paveikslėlį. Matome, kad jame raidės padėtis tokia, kaip atsakyme **A**.
Teisingas atsakymas **A**.

K12. Ⓒ 3

? Galima pradėti nuo atsakymų. Jei imame **C**, aukštį 3 cm, tai apatiniame, pagrindo sluoksnyje bus $42 : 3 = 14$ kubelių. Vadinasi, pagrinde gali būti tik stačiakampis 1×14 arba 2×7. Pirmo stačiakampio perimetras 30, antro — 18, kaip ir turi būti.
Renkamės atsakymą **C**.

! Kadangi kubelio briauna lygi 1 cm, tai stačiakampio gretasienio ilgis x cm, plotis y cm ir aukštis z cm yra natūralieji skaičiai. Pagal sąlygą tūris $xyz = 42$, perimetras $2x + 2y = 18$. Vadinasi, $x + y = 9$, ir kadangi natūralu laikyti ilgį didesniu už plotį, tai tinka tik poros $(x, y) = (5, 4)$, $(6, 3)$, $(7, 2)$, $(8, 1)$. Iš jų tik pora $(7, 2)$ duoda natūraliąją z reikšmę: $z = 42 : (x \cdot y) = 42 : (7 \cdot 2) = 3$. Vadinasi, Mykolo sudėto stačiakampio gretasienio aukštis yra 3 cm.
Teisingas atsakymas **C**.

K13. Ⓒ 36

? Pirmame ir antrame taikinyje Lukas po 2 kartus pataikė į kiekvieną iš trijų zonų ir surinko $29 + 43 = 72$ taškus. Vadinasi, pataikius po vieną kartą į kiekvieną zoną surenkami 36 taškai. Būtent tiek ir surinko Lukas ketvirtame taikinyje. Beje, trečio taikinio rezultatų mums nė neprireikė.
Renkamės atsakymą **C**.

! Ne pro šalį patikrinti, ar situacija įmanoma. Pažymėję zonų taškus a, b ir c, gauname $2b + c = 29$, $2a + c = 43$, $2a + b = 47$. Sudėję I ir III lygtis ir atėmę II, gauname $3b = 33$, $b = 11$, todėl $c = 7$, $a = 18$. Matome, kad uždavinio sąlygos išpildytos, ir ketvirtame taikinyje Lukas išmušė 36 taškus.
Teisingas atsakymas **C**.

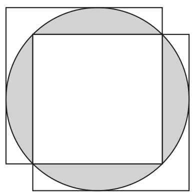
K14. E 75%

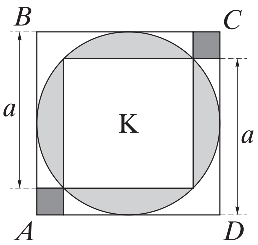
! Tegu x kg — pradinė krovinio kaina. Pagal sąlygą $x = 0{,}8(2000 + x)$, arba $5x = 4(2000 + x)$, iš čia $x = 8000$ kg. Vadinasi, po pirmo sustojimo krovinio liko $8000 \cdot \frac{3}{4} = 6000$ kg, ir jis palyginus su bendra sunkvežimio ir krovinio mase sudaro $\frac{6000}{2000+6000} \cdot 100 = \frac{3}{4} \cdot 100 = 75\%$.
Teisingas atsakymas **E**.

!! Įdomu, kad sunkvežimio masės nereikia nė žinoti. Iš tikrųjų, tegu y — sunkvežimio masė, x — pradinė krovinio masė. Pagal sąlygą $x = 0{,}8(x + y)$, iš kur $y = x/4$. Po pirmo sustojimo krovinys svėrė $3x/4$, todėl jis palyginti su bendra sunkvežimio ir to likusio krovinio mase sudaro $(3x/4) : (y + 3x/4) = (3x/4) : (x/4 + 3x/4) = 3/4$, t. y. 75%.

K15. D $9(\pi - 2)$

? Panašu, kad viduryje neužtušuota figūra (žr. kairįjį paveikslėlį) yra kvadratas, kurio įstrižainė lygi skritulio skersmeniui, t. y. 6. Vadinasi, skritulio plotas lygus 9π, kvadrato plotas 18 (nes jį įstrižainės dalija į 4 stačiuosius trikampius, kiekvieno iš kurių plotas $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3$), o užtušuotos srities plotas $9\pi - 18 = 9(\pi - 2)$.
Renkamės atsakymą **D**.





! Įrodysime, kad vidurinis neužtušuotas stačiakampis K — iš tikrųjų kvadratas. Abiejų lygių kvadratų kraštinės ilgį pažymėkime a cm. Pratęskime jų kraštines (žr. dešinįjį paveikslėlį). Kadangi į keturkampį $ABCD$ įbrėžtas skritulys, tai $ABCD$ — kvadratas (jo kraštinė — tai skritulio skersmuo, taigi pagal sąlygą lygi 6 cm). Kadangi mažųjų stačiakampių prie viršūnių A ir C kraštinės lygios $6 - a$, tai jie — kvadratai. Bet tada stačiakampio K kraštinės lygios $a - (6 - a) = 2a - 6$, taigi jis — kvadratas. Plotus jau suskaičiavome anksčiau.
Teisingas atsakymas **D**.

K16. D 6
Žr. uždavinio B25 sprendimą.

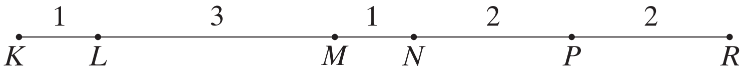
K17. C 2

! Mažiausias skaičiaus n daliklis, nelygus vienetui — tai mažiausias pirminis p, iš kurio dalijasi n. Jeigu skaičius n dalijasi iš d, tai jis dalijasi ir iš $\frac{n}{d}$ (iš tikrųjų, $n : \frac{n}{d} = d$). Kadangi p — mažiausias daliklis, tai $\frac{n}{p}$ — didžiausias. Pagal sąlygą $\frac{n}{p} = 15p$, t. y. $n = 15p^2$. Matome, kad n dalijasi iš 3, todėl p (būdamas mažiausias daliklis) turi tenkinti sąlygą $p \leqslant 3$. Vadinasi, arba $p = 2$, arba $p = 3$, taigi yra du skaičiai, tenkinantys uždavinio sąlygą: $n = 60$ ir $n = 135$.
Teisingas atsakymas **C**.

K18. D $KL = MN$

? Pagal sąlygą atkarpos KN ir MR lygios. Todėl atmetę iš jų bendrą atkarpą MN, gauname $KM = NR$. Kita vertus, pagal sąlygą ir $LN = NR$, taigi $KM = LN$. Atmetę iš pastarųjų atkarpų bendrą dalį LM, gauname $KL = MN$.
Renkamės atsakymą **D**.

! Dar reikėtų įsitikinti, kad kiti atsakymai teisingi nevisada. Tam užtenka pateikti pavyzdį.



Teisingas tik atsakymas **D**.

K19. Ⓒ 4

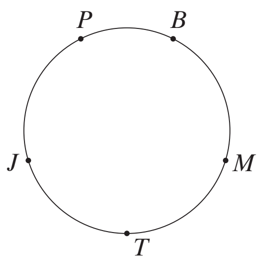
? Kadangi lygių sumų daug, tai spėjame, kad ir kortelėse „daug“ lygių skaičių. Kadangi 3 vienodų skaičių suma lygi 18, tai spėjame, kad yra bent 3 kortelės su skaičiumi 6. Kadangi dar yra suma 16, tai turėtų būti kortelė su skaičiumi 4. Bet jei kortelių su skaičiumi 4 būtų dvi, tai susidarytų ir suma $4+4+6=14$. Lieka patikrinti, ar uždavinio sąlygos išpildytos, jeigu yra penkios kortelės su skaičiumi 6 ir tik viena su skaičumi 4.
Renkamės atsakymą **C**.

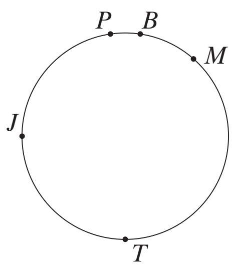
! Kadangi ne visos Marytės sumos lygios, tai ne visi kortelėse parašyti skaičiai lygūs. Bet trijų skirtingų skaičių kortelėse būti negali. Iš tikrųjų, tarkime priešingai, kad yra bent trys skirtingi skaičiai $a<b<c$. Tada $a+b<a+c<b+c$. Paėmę dar vieną kortelę (sakykime, joje parašytas skaičius x) gautume nelygias sumas $a+b+x$, $a+c+x$, $b+c+x$. Vadinasi, iš tikrųjų kortelėse yra tik 2 skirtingi skaičiai — a ir b.
Įsitikinkime, kad vienas iš skaičių parašytas tik vienoje kortelėje. Jeigu būtų ne taip, tai turėtume korteles su skaičiais a, a, b, b, b. Tada sumos $2a+b$, $2b+a$ ir $3b$ skirtingos, o tai prieštarauja sąlygai.
Taigi kortelėse parašyti skaičiai — tai a, b, b, b, b, b. Ir iš tikrųjų, visos galimos trijų kortelių skaičių sumos įgyja tik dvi reikšmes po 10 kartų: $a+2b$ ir $3b$. Kadangi pagal sąlygą skaičiai a ir b natūralieji, tai $3b$ dalijasi iš 3, vadinasi, ta suma 18. Todėl $3b=18$, iš kur $b=6$. Taigi $a=16-2b=16-12=4$. Vadinasi, mažiausias kortelėse parašytas skaičius yra 4.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Iš pateikto sprendimo matome, kad sąlygoje visai nebūtina reikalauti, kad kiekvieną iš reikšmių 16 ir 18 įgytų lygiai po 10 sumų — užtenka reikalauti, kad sumos įgytų tik šias dvi reikšmes.
Beje, jeigu nereikalautume, kad skaičiai kortelėse būtų sveiki, tai gautume dar vieną sprendinį: $3b=16$, $a+2b=18$, taigi $a=\frac{22}{3}$, $b=\frac{16}{3}$.

K20. Ⓒ Mykolas ir Tomas stovi greta

? Kadangi Pauliaus (P) ir Barto (B) vardai buvo ištarti po 2 kartus, tai spėjame, kad Paulius ir Bartas stovi greta. Pabandykime imti padėtį, kai Mykolas (M) ir Tomas (T) stovi greta (paveikslėlis kairėje; jei nepavyktų — bandytume juos statyti negreta). Dabar aišku, ką reikia daryti: pastumti M toliau nuo T, kad T ištartų Jono (J) vardą. Perdarome paveikslėlį į dešinįjį. Tada J ir B ištaria P vardą, P ir M ištaria B vardą, o T ištaria J vardą, ir uždavinio sąlygos išpildomos.
Renkamės atsakymą **C**.





! Jeigu Paulius ir Bartas nestovėtų greta, tai Paulius ištartų ne Barto vardą, o Bartas — ne Pauliaus. Vadinasi, bent du kartus būtų buvęs ištartas ne Barto ar Pauliaus vardas. Bet pagal sąlygą toks vardas buvo ištartas tik vieną kartą. Taigi Paulius ir Bartas stovi greta.
Dabar aišku, kad Mykolas ir Tomas stovi greta — kitaip jie abu būtų Jono kaimynai. Tada Jonas būtų ištaręs arba Mykolo, arba Tomo vardą, o pagal sąlygą nė vienas šių vardų nebuvo ištartas.
Dar turime įsitikinti, kad aprašytoji situacija įmanoma, bet tai įrodo dešinysis paveikslėlis.
Teisingas atsakymas **C**.

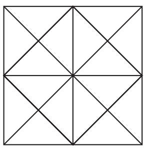
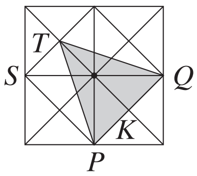
!! Iš sprendimo matome, kad atsakymas **C** bus teisingas ir bendresnėje situacijoje — kai kiekvienas berniukas gali sakyti bet kurio savo kaimyno vardą (o nebūtinai artimiausio).

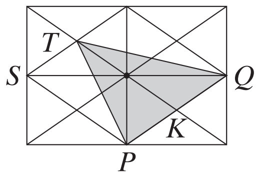
K21. Ⓓ

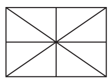
Žr. uždavinio M22 sprendimą.

K22. Ⓑ $\frac{1}{4}$

? Atspėti atsakymą lengva — imame kvadratą (juk neuždrausta) ir sudalijame jį į 16 lygių trikampių, kaip parodyta kairiajame brėžinyje. Vieno trikampio plotas lygus $\frac{1}{16}$ (laikome, kad kvadrato plotas lygus 1), o stačiakampio $TKPS$ plotas lygus $4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$. Todėl trikampio TKP plotas lygus pusei to ploto, t. y. $\frac{1}{8}$. Vadinasi, dvigubai didesnis trikampio PQT plotas lygus $\frac{1}{4}$.
Renkamės atsakymą **B**.



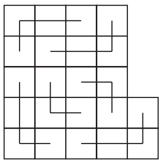


! Iš esmės niekas nesikeičia, jei nagrinėjame (ploto 1) stačiakampį — tik tiek, kad dabar trikampukai nėra lygūs, bet vis tiek lygiapločiai (pavyzdžiui, todėl, kad kiekvienas jų sudėtas iš dviejų lygių trikampukų) — žr. dešinį paveikslėlį. Lygiagretainį sudaro 4 trikampukai, jo plotas $4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$. Trikampis TKP yra pusė lygiagretainio $TKPS$, todėl jo plotas $\frac{1}{8}$. Lygiai taip pat įrodome, kad trikampio TKQ plotas lygus $\frac{1}{8}$. Vadinasi, trikampio PQT plotas lygus $\frac{1}{4}$.
Teisingas atsakymas **B**.

K23. Ⓑ 2

! Labai lengva sudėti figūrą, jei fragmentus galima vartyti, ir tam tereikia dviejų trikvadračių fragmentų. Bet vartyti negalima, todėl sudėti figūrą panaudojant trikvadračius fragmentus daug sunkiau. Bet svarbiausia — net sudėjus figūrą su 2 trikvadračiais, dar neaišku, ar negali užtekti vieno (gal nereikės nė vieno) trikvadračio. Vis dėlto nesunku įsitikinti, kad 0 ar 1 trikvadračio neužteks: kadangi figūroje 22 langeliai, tai neimant trikvadračių liktų visi 22 langeliai keturkvadračiams, bet 22 iš 4 nesidalija. Negali būti ir 1 trikvadračio — tada liktų 19 langelių. Ir tik jei imsime 2 trikvadračius, tai keturkvadračiams liks 16 langelių, ir yra vilties, kad iš 2 trikvadračių ir 4 keturkvadračių figūrą sudėti pavyks. Beje, neįmanoma sudėti figūros imant 3 trikvadračius (lieka 13 langelių), 4 trikvadračius (lieka 10 langelių), 5 trikvadračius (lieka 7 langeliai), ir tik imant 6 trikvadračius lieka 4 langeliai vienam keturkvadračiui. Bet šiaip jau sunku patikėti, kad tai ir būtų atsakymas.

Vadinasi, tikimės, kad atsakymas yra 2 trikvadračiai, ir lieka pasistengti sugalvoti dėjinį. Beje, tikint, kad tai įmanoma, sudėlioti nėra sunku (žr. pavyzdį paveikslėlyje).



Teisingas atsakymas **B**.

!! Žinoma, galima užrašyti trikvadračių ir keturkvadračių kiekybių sąryšį lygtimi. Jeigu figūrą pavyko sudėti iš m trikvadračių ir n keturkvadračių fragmentų, tai $3m + 4n = 22$, ir aišku, kad n gali būti tik 4 (tada $m = 2$) arba 1 (tada $m = 6$). Didžiausias vargas vis tiek liko — reikia įsitikinti, kad iš 2 trikvadračių ir 4 keturkvadračių sudėti figūrą galima.

K24. (D) 64

? Kadangi apie persiklojančias baltąsias dalis nieko nepasakyta, tai galima įsivaizduoti, kad jų plotai „kiek norint maži“ (ar net lygūs 0). Tad spėjame, kad plotų skirtumas bus $11^2 + 7^2 - 9^2 - 5^2 = 11^2 - 9^2 + 7^2 - 5^2 = (11-9)(11+9) + (7-5)(7+5) = 2 \cdot 20 + 2 \cdot 12 = 2 \cdot 32 = 64$.
Renkamės atsakymą **D**.

! Pažymėkime pilkųjų dalių bendrą plotą A, juodųjų — B, baltųjų — C. Tada suma $A + C$ lygi kvadratų su kraštinėmis 11 ir 7 plotų sumai, t. y. $A + C = 11^2 + 7^2$. Analogiškai $B + C = 9^2 + 5^2$. Todėl ieškomas skirtumas lygus $A - B = (A + C) - (B + C) = 11^2 + 7^2 - 9^2 - 5^2 = 64$.
Teisingas atsakymas **D**.

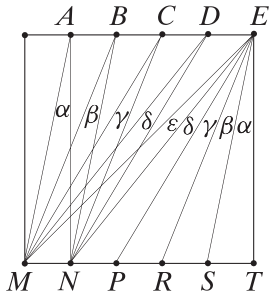
K25. (C) Yra trys paeiliui stovinčios matematikos knygos

? Pabandykime sustatyti knygas taip: MMF MMF ... MMF MM. Tada sąlyga išpildyta, bet trijų iš eilės einančių matematikos knygų nėra.
Renkamės atsakymą **C**.

! Įrodysime, kad teiginiai **A**, **B**, **D**, **E** visada teisingi, kad ir kaip sustatytume knygas. Iš tikrųjų, pastebėkime, kad iš bet kurių 3 paeiliui stovinčių knygų fizikos knygų bus daugiausia viena (iš tikrųjų, jos negali stovėti greta, bet jeigu tai pirma ir trečia knygos, tai matematikos knyga neturi kaimyninės matematikos knygos). Aišku, ir iš 2 greta stovinčių knygų fizikos knygų daugiausiai viena. Suskirstykime iš eilės knygas į 16 trejetų ir paskutinę porą. Fizikos knygų bus ne daugiau kaip 17, todėl teiginys **B** teisingas. Bet iš viso knygų yra 50, todėl matematikos knygų ne mažiau kaip 33, taigi ir teiginys **A** teisingas.
Teisingas ir teiginys **D**. Iš tikrųjų sakykime, kad yra 17 fizikos knygų. Jeigu pirma knyga ne fizikos, o matematikos, tai ir jos kaimynė — matematikos knyga, o likusiuose 16 trejetų gali būti daugiausiai 16 fizikos knygų. Lygiai taip pat ir paskutinė knyga fizikos — skaičiuojame nuo galo. Taigi įsitikinome, kad jeigu fizikos knygų 17, tai ir pirma, ir paskutinė — fizikos. Vis dėlto verta patikrinti, ar iš viso tokia situacija įmanoma. Nuo 2-os iki 49 knygos yra 48 vietos, ir jose knygas galima statyti taip: MMF MMF ... MMF MMM. Tarp jų bus 15 fizikos knygų, taigi iš viso — 17.
Teisingas ir teiginys **E**: suskirstome tas devynias knygas į 3 trejetus, ir kadangi juose daugiausiai 3 fizikos knygos, tai devynete mažiausiai 6 matematikos knygos.
Vadinasi, atsakymai **A**, **B**, **D**, **E** visada teisingi. O štai atsakymas **C** kartais teisingas, kartais klaidingas (jau turėjome pavyzdį, kai 3 iš eilės matematikos knygų nėra, ir pavyzdį, kai yra).
Reikia rinktis atsakymą **C** — tik jis būna ir klaidingas, ir teisingas.

K26. B 45°

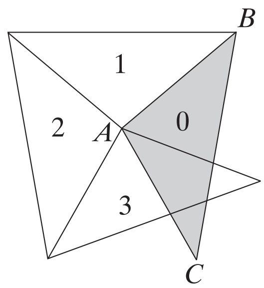
Sąlygoje išvardytų kampų didumus pažymėkime α, β, γ, δ, ε, o taškų B, C, D, E projekcijas į tiesę MN — raidėmis P, R, S, T. Kadangi $AE = MS$, tai $AESM$ — lygiagretainis, ir $ES \parallel AM$, todėl $\angle TES = \alpha$. Panašiai $\angle SER = \beta$, $\angle REP = \gamma$, $\angle PEN = \delta$, todėl $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = \angle TEM = 45°$.



Teisingas atsakymas **B**.

K27. E 18

Trikampis su numeriu k sutaps su trikampiu 0, kai trikampių su numeriais 0, 1, 2, ..., $k-1$ kampų prie viršūnės A suma bus 360° kartotinis, t. y. kai $\frac{100k}{360} = \frac{5k}{18}$ bus sveikas skaičius. Mažiausias toks skaičius yra 18.



Teisingas atsakymas **E**.

K28. A 22

Jeigu 2003 dalydami iš n gauname liekaną 23, tai $2003 = k \cdot n + 23$, ir $23 < n$. Vadinasi, turi būti teisinga lygybė $kn = 1980$, ir $n > 23$. Taigi lieka atsakyti į klausimą — kiek yra skaičiaus 1980 daliklių, didesnių už 23. Vienoje eilutėje rašykime skaičiaus $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ daliklius didėjimo tvarka, o kitoje — mažėjimo tvarka:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 15, 18, 20, 22, 30, 33, 36, 44, 45, 55, 60, 66, 90, \ldots,$$

$$\frac{1980}{1}, \frac{1980}{2}, \frac{1980}{3}, \ldots, \frac{1980}{33}, \frac{1980}{36}, \frac{1980}{44}, \frac{1980}{45}, \frac{1980}{55}, \frac{1980}{60}, \frac{1980}{66}, \frac{1980}{90}, \ldots$$

Matome, kad $\frac{1980}{66} = 30$, $\frac{1980}{90} = 22$, taigi didesni už 23 yra antroje eilutėje išrašyti dalikliai iki $\frac{1980}{66}$, o jų yra tiek pat, kiek daliklių pirmoje eilutėje iki 66 — būtent 22.
Teisingas atsakymas **A**.

K29. Ⓑ 25

? Nujaučiame, kad daugiausiai atkarpų gausime, jei imsime po 5 taškus kiekvienoje tiesės pusėje. Iš kiekvieno iš 5 taškų iš vienos tiesės pusės į kitą eis 5 atkarpos, kurias kirs tiesė, taigi iš viso turėsime 25 reikiamas atkarpas.
Nesunku nurodyti ir konkretų pavyzdį, kai gauname 25 atkarpas. Imkime apskritimą ir jo horizontaliąją simetrijos ašį. Dabar 5 taškus pasirinkime viršutiniame pusapskritimyje, likusius 5 — apatiniame. Ašį kirs $5 \cdot 5 = 25$ atkarpos.
Renkamės atsakymą **B**.

! Sakykime, kad k taškų yra vienoje tiesės pusėje, tada kitoje $10 - k$ taškų. Bus iš viso $k(10-k)$ atkarpų, kurios kerta tiesę (remiantis sąlyga jokios dvi atkarpos nesutampa). Vadinasi, reikia rasti didžiausią iš skaičių $k(10-k)$, $k = 0, 1, ..., 9, 10$. Išrašę visas sandaugas, gauname 0, 9, 16, 21, 24, 25, 24, 21, 16, 9, 0. Iš jų didžiausia yra $25 = 5 \cdot (10 - 5)$.
Teisingas atsakymas **B**.

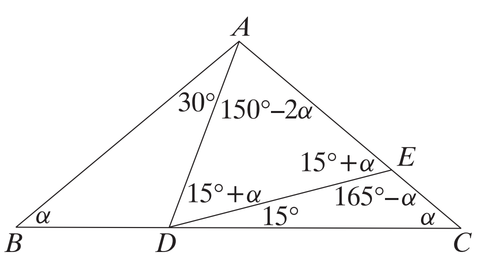
!! Žinoma, didžiausią reiškinio $k(10-k)$ reikšmę rasti galima ir paprasčiau. Kadangi

$$k(10-k) = 10k - k^2 = -(k^2 - 10k) = -(k-5)^2 + 25,$$

tai didžiausia reikšmė yra 25 (net jeigu nereikalautume, kad k turi būti sveikas).
Beje, mums visiškai aišku, kad jeigu duoti 10 taškų, tai visada galima išvesti tokią tiesę, kad kiekvienoje pusplokštumėje būtų po 5 taškus (net jeigu 3 ar daugiau taškų yra vienoje tiesėje). Formaliai tai įrodyti galima, pavyzdžiui, taip. Sujunkime kiekvienus du taškus tiese. Tokių tiesių „nedaug“ (ne daugiau kaip $10 \cdot 9/2 = 45$). Pasirinkime bet kurį tašką, nesutampantį nė su vienu iš duotųjų, ir per jį išveskime visoms toms tiesėms lygiagrečias. O dabar per tą tašką išveskime tiesę, nesutampančią su išvestosiomis (kitaip sakant, bet kuriame tų tiesių sudaromame kampe imkime tašką ir sujunkime jį tiese su pasirinktuoju tašku). Šią tiesę imkime abscisių ašimi, o bet kurią jai statmeną — ordinačių. Aišku, kad visų 10 taškų ordinatės skirtingos, $y_1 < y_2 < y_3 < ... < y_{10}$. Tada, pavyzdžiui, tiesė $y = \frac{y_5 + y_6}{2}$ tinka kaip ieškomoji.

K30. Ⓑ 15°

! Lygiašonio trikampio BAC kampus B ir C pažymėkime α, tada kampas prie viršūnės A lygus $180^\circ - 2\alpha$.



Todėl lygiašonio trikampio DAE kampas prie viršūnės A lygus $150^\circ - 2\alpha$, o kampai prie pagrindo $15^\circ + \alpha$. Vadinasi, $\angle DEC = 165^\circ - \alpha$, ir trečias $\triangle CDE$ kampas $\angle CDE = 15^\circ$.
Teisingas atsakymas **B.**