SENJORAS (XI ir XII klasės)

S1. B 3

! Jeigu Juozas turi bent 4 pilkas peles, tai pelių septynete, į kurį įeina tos 4 pelės, tėra 3 pilkos pelės, — prieštara. Vadinasi, Juozas turi daugiausiai 3 pilkas peles.
Renkamės atsakymą **B**.

!! Juozas gali turėti lygiai 3 pilkas peles. Iš tikrųjų, tada bet kuriame septynete bus daugiausiai 3 pilkos pelės, ir mažiausiai keturios pelės bus baltos.
Teisingas atsakymas **B**.

S2. A 8

! Kadangi dėžutės tūris $64\,\mathrm{cm}^3$, tai jos kraštinė $4\,\mathrm{cm}$. Vadinasi, dėžutę galima suskaidyti į $2 \times 2 \times 2$ ląsteles, iš kurių kiekvienoje telpa po vieną metalinį rutuliuką.
Aišku, kad daugiau rutuliukų į dėžutę patalpinti negalima.
Renkamės atsakymą **A**.

!! Sumažinkime visus matmenis 2 kartus. Tada gauname ekvivalentų uždavinį:
Kiek daugiausiai metalinių rutuliukų, kurių skersmuo 1, galima įdėti į kubinę dėžutę, kurios tūris lygus 8?
Griežtai įrodyti, kad į dėžutę netelpa 9 rutuliukai, sunku (o gal ir neįdomu).

S3. E $\frac{1}{a}$

! Pagal logaritmo pagrindo keitimo formulę gauname: $\log_{10} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 10} = \frac{1}{a}$.

!! Kadangi $\log_2 10 = a$, tai $2^a = 10$, todėl $\log_{10} 2^a = 1$, $a \cdot \log_{10} 2 = 1$, $\log_{10} 2 = \frac{1}{a}$.

S4. E Kitas skaičius

! Išrašykime visus skaičius, mažesnius už 1000, kurių skaitmenų suma lygi 2. Tai skaičiai, kurie turi dvejetą ir po jo kitus nulius (arba pats dvejetas), ir skaičiai, kurie turi du vienetus ir kitus nulius (arba tik 2 vienetus):

$$2, 11, 20, 101, 110, 200.$$

Skaičiai 2, 11 ir 101 yra pirminiai, taigi lieka skaičiai 20, 110 ir 200.
Teisingas atsakymas **E**.

S5. B $\frac{1}{3}$

! Turima galvoje, kad reikia rasti sąlygą tenkinančių triženklių skaičių kiekio ir visų triženklių skaičių kiekio santykį.
Triženklių skaičių — skaičių nuo 100 iki 999 yra tiek pat, kiek ir nuo 1 iki 900 (atėmėme po 99), t. y. 900. Lyginių skaičių nuo 400 iki 999 yra kiek ir nuo 0 iki 599, o tai tiek pat, kiek nuo 1 iki 600, t. y. $600 : 2 = 300$. Todėl ieškomoji tikimybė lygi $300 : 900 = 1/3$.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Įdomus klausimas, kaip galima realizuoti atsitiktinį triženklio skaičiaus pasirinkimą. Yra išrasta daug būdų tai padaryti — kompiuteriu, naudojantis vadinamosiomis atsitiktinių skaičių lentelėmis ir pan. O mes galime įsivaizduoti, kad visus triženklius skaičius nuo 100 iki 900 surašome ant popierėlių, juos susukame į gniužulėlius, sumetame į „būgną“, gerai išmaišome ir ištraukiame vieną iš jų.

S6. D 10^9

! Prie skaitiklio pridėję 1, gautume 1 su 18 nulių, t. y. 10^{18}. Vadinasi, skaitiklis yra $10^{18}-1$, vardiklis 10^9-1, todėl duotasis skaičius lygus $(10^{18}-1)/(10^9-1)-1=(10^9+1)-1=10^9$.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Galima apsieiti ir be formulių. Subendravardiklinę duotąjį reiškinį, gauname
$999\,999\,999\,000\,000\,000/999\,999\,999 = 1\,000\,000\,000$.

S7. A $x=y$

! Kadangi $BCED$ lygiagretainis, tai $BC=DE$. Kadangi trikampių BCA ir DEC pagrindai lygūs ir aukštinės lygios, tai $S_{BCA}=S_{DEC}$. Todėl $x=S_{BCA}+S_{ACD}=S_{DEC}+S_{ACD}=y$.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Galima remtis ir ploto formulėmis: $x=(AD+BC)h/2=(AD+DE)h/2=AE\cdot h/2=y$.

S8. B 7

! Iš sąlygos turime $xyzt=2002$. Kadangi $2002=2\cdot 1001=2\cdot 11\cdot 91=2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$, tai nesunku surašyti visus galimus ketvertus:
$1\cdot 2\cdot 7\cdot 143$, $1\cdot 2\cdot 11\cdot 91$, $1\cdot 2\cdot 13\cdot 77$, $1\cdot 7\cdot 11\cdot 26$, $1\cdot 7\cdot 13\cdot 22$, $1\cdot 11\cdot 13\cdot 14$, $2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$.
Jų yra 7.
Teisingas atsakymas **B**.

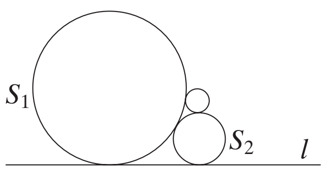
S9. D 17:25

! Sakykime, kad tai įvyks po x valandų. Tada pirmas dviratininkas bus nuvažiavęs $32x$ km, o antras $24x$ km. Atstumo tarp jų kvadratas pagal Pitagoro teoremą lygus $(32x)^2+(24x)^2=130^2$. Todėl $16^2x^2+12^2x^2=65^2$, $4^2x^2(4^2+3^2)=65^2$, $16x^2=13^2$, $4x=13$, $x=3\frac{1}{4}$ h. Vadinasi, tai įvyks 14 val. 10 min. + 3 val. 15 min. = 17 val. 25 min.
Teisingas atsakymas **D**.

S10. Žr. uždavinio J5 sprendimą.

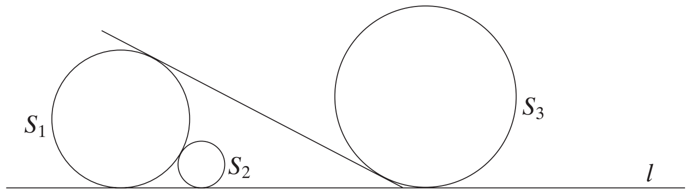
S11. C Yra lygiai du apskritimai, kurie liečia S_1, S_2 ir l

? Retas atvejis, kai iš viso geriausia spėti — ką nors įrodyti per keletą minučių vistiek nepavyks.
Iš karto matome, kad apskritimų ir tiesės apribotame „kreiviniame trikampyje“ yra reikiamas apskritimas. Tai, kaip sakoma, aišku iš „fizikinių sumetimų“. Iš tikrųjų, imkime tokio mažo spindulio apskritimą, kad šis dar tilptų kreivinės srities viduje. Pradėkime apskritimą „pūsti“ kaip kamuolį ir laikykime, kad jis tik „atsiremia“ į srities „kraštines“, o iš srities išlįsti negali. Tada jis iš pradžių palies vieną „kraštinę“, po to — kitą ir pagaliau — trečią.
Kadangi atsakymas matyt nepriklauso nuo apskritimų spindulių santykio, tai imkime mažesniojo apskritimo spindulį „mažą“. Dabar vėl remkimės fizikiniais sumetimais ir imkime „mažą“ apskritimą, kuris liestų apskritimus S_1 ir S_2.

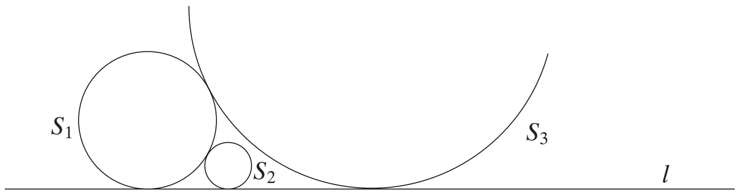


Vėl pradėkime trečią apskritimą pūsti, spausdami jį prie S_1 ir S_2. Aišku, kad kai apskritimas pasidarys „didelis“, jis kirs tiesę, o prieš tai bus momentas, kai jis tiesę lies.
Daugiau reikiamų apskritimų nematyti.
Renkamės atsakymą **C**.

! Iš tų pačių fizikinių sumetimų aišku, kad atsakymas toks bus visada. Įsitikinkime tuo.

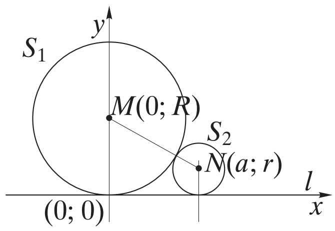


Išveskime liestinę apskritimui S_1, lygiagrečią tiesei l. Dabar tą liestinę vos vos pasukime, kad S_2 liktų po ja ir neliestų jos. Ta liestinė jau kirs tiesę l. Į liestinės ir tiesės sudaromą kampą įbrėžkime apskritimą. Dabar apskritimą pūskime, kad jis visą laiką liestų kampo kraštines. Kairysis lietimosi taškas slinks link S_1 ir galų gale jį palies. Gausime paveiksle pavaizduotą padėtį.



Turime apskritimą S_3, kuris liečia S_1 ir l, o apskritimas S_2 yra po juo. Dabar stenkimės, kad apskritimas S_3 visą laiką liestų S_1 ir l ir „išleidinėkime orą“, t. y. mažinkime apskritimo S_3 spindulį. Aišku, bus momentas, kai apskritimas S_3 palies S_2. Toliau mažinant apskritimo S_3 spindulį, apskritimas S_3 atsidurs trikampės srities viduje ir lies apskritimą S_2 iš „kitos pusės“.
Taigi taip samprotaudami gavome abi reikiamas apskritimo padėtis ir įsitikinome, kad daugiau jų nėra.

!! Galima uždavinį išspręsti ir „griežtai“, tiesa, tai … nelabai įdomu.
Sakykime, kad S_1 ir S_2 centrai yra M ir N, o spinduliai R ir r, $R > r$.
Įveskime koordinačių sistemą taip, kad l sutaptų su x-ų ašimi, o y ašis eitų per M. Galima laikyti, kad N yra į dešinę nuo y ašies. Tada taškų M ir N koordinatės yra $(0; R)$ ir $(a; r)$, kur a — apskritimų bendros liestinės ilgis (laikome, kad M yra į dešinę nuo y ašies).



Pagal Pitagoro teoremą $a^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr$. Tarkime, kad egzistuoja apskritimas S_3 su spinduliu t ir centru taške $(b; t)$, kuris liečia S_1, S_2 ir l. Kadangi S_3 liečia apskritimą S_1, tai vėl

$$b^2 = (R + t)^2 - (R - t)^2 = 4Rt.$$

Kadangi S_3 liečia ir apskritimą S_2, tai vėl pagal Pitagoro teoremą

$$|b - a|^2 = (r + t)^2 - |r - t|^2,$$
$$(b - a)^2 = (r + t)^2 - (r - t)^2,$$
$$4rt = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Įstatę į paskutinę lygybę $a = 2\sqrt{Rr}$ ir $b = 2\sqrt{Rt}$, gauname

$$\begin{aligned}
&4rt = 4Rr + 4Rr - 8R\sqrt{rt},\\
&2R\sqrt{rt} = Rr + Rt - rt,\\
&4R^2rt = R^2r^2 + R^2t^2 + r^2t^2 + 2R^2rt - 2r^2Rt - 2Rrt^2,\\
&(R-r)^2t^2 - 2Rr(R+r)t + R^2r^2 = 0,\\
&t = \frac{Rr(R+r) \pm \sqrt{R^2r^2(R+r)^2 - R^2r^2(R-r)^2}}{(R-r)^2} = \frac{2Rr}{(R-r)^2}\cdot\Big(\frac{R+r}{2} \pm \sqrt{Rr}\Big).
\end{aligned}$$

Kadangi skliaustuose aritmetinis vidurkis didesnis už geometrinį ($R > r$), tai visada gauname dvi reikšmes t_1 ir t_2 ir atitinkamai du apskritimus su spinduliais t_1 ir t_2, kurie liečia S_1, S_2 ir l.
Įrodėme, kad teisingas atsakymas **B**.

S12. Ⓐ $16\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$

Nubraižyta figūra vaizduoja išklotinę taisyklingosios trikampės prizmės, kurios šoninė briauna lygi pagrindo kraštinei. Šios prizmės tūris lygus $V = SH = \frac{4^2\sqrt{3}}{4}\cdot 4 = 16\sqrt{3}\,(\mathrm{cm}^3)$.
Teisingas atsakymas **A**.

S13. Ⓔ 25

Čia spėti labai lengva — pakelis greičiausiai kainuoja 25 centus. Tada iš tikrųjų už 16 pakelių jūs mokate 4 dolerius, o už 1 dolerį gaunate 4 pakelius.
Spėjimą dar palengvina tai, kad greičiausiai 100 turi dalytis iš pakelio kainos.
Renkamės atsakymą **E**.

Jeigu pakelis kainuoja x centų $= \frac{x}{100}$ dolerio, tai 16 pakelių kainuoja $\frac{x\cdot 16}{100}$ dolerių. Už vieną dolerį jūs gaunate $1 : \frac{x}{100} = \frac{100}{x}$ pakelių. Pagal sąlygą $\frac{x\cdot 16}{100} = \frac{100}{x}$, $16x^2 = 100^2, 4x = 100, x = 25$ centai.
Teisingas atsakymas **E**.

S14. Ⓐ $(10^4+1)^2$

Nario 10^8 numeris yra 10^4, todėl sekančio sekos nario numeris yra $10^4 + 1$. Vadinasi, sekantis sekos narys yra $(10^4+1)^2$.
Teisingas atsakymas **A**.

S15. Ⓔ $\overrightarrow{CE}$

Kadangi $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CA}$, tai

$$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BF}.$$

Atsakymuose jam lygus tik vektorius $\overrightarrow{CE}$.

Tą patį sprendimą galima užrašyti $-\overrightarrow{AD}$ pakeitus $\overrightarrow{DA}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AF} =\\
&= \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AF} =\\
&= \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BF}.
\end{aligned}$$

Teisingas atsakymas **E**.

!! Kadangi $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$, o $2\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BE}$, tai duotasis reiškinys lygus $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE}$. Žinoma, uždavinį galima spręsti tiesiog braižant vektorius.

S16. Ⓐ Laimėjo A

! Iš viso buvo sužaistos $C_4^2 = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$ rungtynės, per kurias visos komandos gavo $7+4+3+3 = 17$ taškų iš 18 galimų. Vadinasi, tik vienerios rungtynės baigėsi lygiosiomis (per tokias rungtynes komandos gauna po 1 tašką — iš viso 2 taškus; jei rungtynės baigiasi ne lygiosiomis, komandos gauna $3+0 = 3$ taškus — kitaip sakant, sužaidusios lygiomis, o ne kitaip, abi komandos skaičiuojant jų bendrus taškus praranda 1 tašką). Todėl C ir D neturėjo lygiųjų, ir lygiosiomis sužaidė A su B. Todėl komanda A likusias dvejas rungtynes laimėjo (taigi ir prieš D).
Teisingas atsakymas **A**.

S17. Ⓓ $\pi(3 - 2\sqrt{2}) + 1$

? Čia spėti verta: iš karto matome, kad dviejų užtušuotų trikampių plotas 1, o skritulio plotas — maždaug pusė baltojo trikampio, t. y. maždaug 0,5. Todėl iš karto atkrenta atsakymai **A**, **B**, **C**. Kadangi $\pi\frac{\sqrt{2}}{2} > 3 \cdot 0{,}7$, atkrenta ir šitas atsakymas.
Renkamės atsakymą **D**.

! Baltojo trikampio plotas lygus 1, o jo perimetras $2 + 2\sqrt{2}$. Todėl įbrėžtinio apskritimo spindulys lygus $1/(\sqrt{2}+1) = (\sqrt{2}-1)$, o plotas lygus $\pi(\sqrt{2}-1)^2 = \pi(3 - 2\sqrt{2})$. Pridedame užtušuotųjų trikampių plotą, kuris lygus 1.
Teisingas atsakymas **D**.

S18. Ⓔ ab

? Atspėti atsakymą lengva, paėmus paprasčiausią trikampį, tenkinantį sąlygą — lygiašonį statųjį su kraštinėmis $0{,}9/\sqrt{2}$; $0{,}9/\sqrt{2}$; $0{,}9$. Tada atsakymai virsta skaičiais $0{,}9^2$; $0{,}9^2 \cdot 2$; $0{,}9$; $0{,}9\sqrt{2}$; $0{,}9^2/2$. Iš jų paskutinis mažiausias.
Renkamės atsakymą **E**.

! Kadangi stačiojo trikampio įžambinė mažesnė už 1, tai $a < 1, b < 1$, todėl $a > a^2$, $b > b^2$. Vadinasi, $a + b > a^2 + b^2 \geqslant 2ab > ab$. Kita vertus, $(a+b)^2 > a^2 + b^2$, o $ab < 0{,}9 \cdot 0{,}9 < 0{,}9$. Taigi mažiausias skaičius yra ab.
Beje, užtenka stačiojo trikampio nelygybių: $a < c, b < c, a + b > c$. Iš tikrųjų,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 = c \cdot c > a \cdot b, \\ (a+b)^2 &> c^2 = c \cdot c > a \cdot b, \\ 0{,}9 &= c > a > a \cdot b, \\ a + b &> c > a > ab. \end{aligned}$$

!! Įdomiausia būtų išrikiuoti skaičius pagal dydį. Matėme, kad

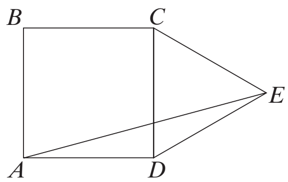
$$(a+b)^2 > a^2 + b^2 > ab, \quad a + b > 0{,}9 > a^2 + b^2 > ab.$$

Vadinasi, skaičiai $a^2 + b^2 > ab$ mažiausi. O štai skaičius $(a+b)^2$ įsiterpti į antrą eilutę gali ir prieš $a + b$, ir po 0,9, ir tarp $a + b$ ir 0,9. Iš tikrųjų, jeigu $(a+b)^2 \geqslant 1$ (kaip pavyzdyje su $a = b = 0{,}9/\sqrt{2}$, tai skaičius $(a+b)^2$ ne mažesnis už abu.
Jeigu $0{,}9 < (a+b)^2 \leqslant 1$ (pavyzdžiui, $a + b = 0{,}99$), tai $0{,}9 < (a+b)^2 \leqslant a + b$.
Pagaliau, kai $(a+b)^2 \leqslant 0{,}9$ (pavyzdžiui, $a + b = 0{,}9$), tai $(a+b)^2 \leqslant 0{,}9 < a + b$.

S19. Žr. uždavinio K25 sprendimą.

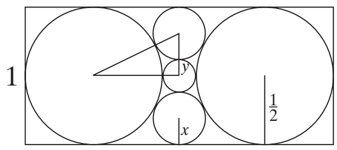
S20. Ⓒ 45°

Trikampis AED lygiašonis, todėl $\angle EAD = \angle DEA = (180° - -\angle ADE)/2 = 15°$. Vadinasi, $\angle AEC = 60° - \angle AED = 45°$.



S21. Ⓓ $\sqrt{5}$

Sakykime, kad brėžinyje pavaizduotų mažesniųjų apskritimų spinduliai yra x ir y. Tada iš brėžinio aišku, kad $4x + 2y = 1$. Remiantis Pitagoro teorema $(1/2+x)^2 = (x+y)^2+(1/2+y)^2$, $x = 2xy + 2y^2 + y$. Dauginame pastarąją lygtį iš 4 ir įstatome $4x = 1-2y$. Tada $1-2y = 2y(1-2y)+8y^2+4y$, $4y^2+8y-1 = = 0$, $(2y + 2)^2 = 5$, $2y + 2 = \sqrt{5}$, $2y = \sqrt{5} - 2$.
Vadinasi, ilgesnioji stačiakampio kraštinė lygi $2 + 2y = \sqrt{5}$.



S22. Ⓒ Trečia

Aišku, kad bet kuris stačiakampis $4k \times m$ (arba $m \times 4k$, o tai yra tas pat) turi vienodai visų 4 spalvų langelių. Padalykime mūsų stačiakampį į du: apačioje tegu bus stačiakampis 40×43, o viršuje — stačiakampis 3×43. Viršutinį stačiakampį vėl dalykime į du: kairėje 3×3, dešinėje 3×40. Kadangi stačiakampiuose 40×43 ir 3×40 kiekvienos spalvos langelių tiek pat, tai viską lemia kvadratas 3×3, esantis kairiajame viršutiniame lentelės kampe. Matome, kad jame daugiausia trečios spalvos langelių.
Teisingas atsakymas **C**.

S23. Ⓔ 9

Kadangi skaičius 2001 dalijasi iš 3, tai jau 2001^2 dalijasi iš 9. Vadinasi, duotojo skaičiaus skaitmenų suma dalijasi iš 9 ir t. t. Todėl ir gautas vienaženklis skaičius $l(2001^{2001})$ dalysis iš 9, t. y. bus lygus 9.
Teisingas atsakymas **E**.

S24. Ⓑ 2

Paskutinis kvadrato skaitmuo gali būti $0, 1, 4, 5, 6, 9$. Kiekvieną skaičių $\overline{ab}$ galima užrašyti kaip $10a + b$. Kadangi $(\overline{ab})^2 = (10a + b)^2 = 100a + 20ab + b^2$, tai paskutinis kvadrato skaitmuo negali būti nelyginis: jei $b = 1, 3, 5, 7, 9$, tai $b^2 = 1, 9, 25, 49, 81$, ir $(\overline{ab})^2$ priešpaskutinis skaitmuo lyginis. Vadinasi, lieka patikrinti galūnes 00, 44, 66. Bet galūnę 66 galėtų turėti tik lyginio skaičiaus kvadratas, o tada jis dalytųsi iš 4. Vadinasi, lieka galūnės 00 ir 44. Jos tikrai įmanomos — pavyzdžiui, $10^2 = 100$, $12^2 = 144$.
Teisingas atsakymas **B**.

S25. Ⓓ 28

Kadangi $\lg mn = \lg m + \lg n \approx 27{,}7$, tai $27 < \lg mn < 28$, iš čia $10^{27} < mn < 10^{28}$. Vadinasi, sandauga mn turi 28 skaitmenis.
Teisingas atsakymas **D**.

S26. Ⓒ 9

Iš karto aišku, kad 5 kėlimųsi neužteks — net jei valtys būtų pilnos, persikelti į antrą krantą būtinai reikėtų 3 kėlimųsi, o valtį kas nors turi grąžinti. Nesunku sugalvoti, kaip 9 kėlimaisi perkelti visus:

Nr.	I krantas	Valtyje	II krantas
1	VV	$BB \rightarrow$	$-$
2	VV	$B \leftarrow$	B
3	VB	$V \rightarrow$	B
4	VB	$B \leftarrow$	V

Keturiais persikėlimais pervkėlėme vieną vyrą (V) į kitą krantą. Dar keturiais persikėlimais perkeliame kitą vyrą. Paskutiniu devintuoju kėlimusi persikelia abu berniukai.
Renkamės atsakymą **C**.

! 1) Aišku, kad pirmą kartą keltis per upę turi abu berniukai — kitaip valtis grįš su tuo pačiu žmogumi atgal, ir turėsime pradinę padėtį.
Vėl aišku, kad grįžti turi tik vienas iš berniukų — kitaip vėl gausime pradinę padėtį.
2) Dabar persikelti turi vyras — kitaip vėl gausime turėtą padėtį.
Dabar grįžti turi antras berniukas — kitaip vėl gausime turėtą padėtį.
3) Dabar keltis negali berniukas — kitaip gausime turėtą padėtį. Negali keltis ir suaugęs — po sekančio kėlimosi vėl gausime turėtą padėtį. Todėl keltis turi abu berniukai.
Grįžti turi vienas berniukas: jei grįš abu berniukai, gausime turėtą padėtį; jei grįš vyras — po sekančio ėjimo vėl gausime turėtą padėtį.
4) Dabar keliasi vyras — kitaip gausime turėtą padėtį.
Grįžti turi berniukas — kitap vėl gausime turėtą padėtį.
5) Dabar abu berniukai keliasi į kitą krantą. Gavome $4 \cdot 2 + 1 = 9$ persikėlimus.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Formalizuokime sprendimą ir įsitikinkime, kad šis 9 upės kirtimų persikėlimo būdas — vienintelis. Įsivaizduokime, kad radome trumpiausią būdą persikelti. Tada jame po kelių persikėlimų padėtis negali kartotis — tuos persikėlimus tiesiog išbrauktume ir gautume trumpesį būdą. Pradinę padėtį žymėkime $VVBB - 0$. Po pirmo persikėlimo galima gauti 3 padėtis:

$$VVB - B, VV - BB, VBB - V$$

(aišku, kad mums visiškai nesvarbu, kuris vyras ar kuris berniukas keliasi). Pirma ir trečia padėtis po sekančio persikėlimo veda prie pradinės padėties. Vadinasi, trumpiausio būdo pirmas kėlimasis yra
1) $VV - BB$.
Antras „ėjimas“ privalomas:
2) $VVB - B$.
Trečias kėlimasis aiškus — jei B grįš, gausime 1) padėtį. Vadinasi,
3) $VB - VB$.
Vėl vyrui grįžus gausime 2) padėtį, todėl grįžta berniukas:
4) $VBB - V$.
Berniukui plaukti neverta — gausime 3) padėtį. Vyrui plaukti neverta — po privalomo sekančio ėjimo vėl gausime 4) padėtį. Todėl plaukia abu berniukai:
5) $V - VBB$.
Vėl abiem berniukam grįžti neverta, plaukti vyrui — irgi neverta (V bus priverstas grįžti). Taigi
6) $VB - VB$.
Dabar keltis berniukui neverta — gausime 5) padėtį, todėl
7) $B - VVB$.
Grįžti vyrui neverta, todėl
8) $BB - VV$.
Vienam berniukui keltis negalima — gausime 7 padėtį. Taigi
9) $0 - VVBB$.
Įrodėme, kad tik tokiais vienintelaiais ėjimais 9 persikėlimais pasiekiame tikslą.
Daugiau apie panašius uždavinius galima pasiskaityti žurnale „Alfa plius omega“ 2000 metų Nr. 1(9) J. Mačio straipsnyje „Tyrimo uždaviniai ir galingieji medžiai“.

S27. Ⓒ $2\sqrt{37 \cdot 13}$

Nuleiskime statmenį iš apskritimo centro A į stygą EF ir jo ilgį pažymėkime h. Statmuo stygą EF dalija pusiau, todėl pagal Pitagoro teoremą $FE^2/4 = R^2 - h^2$, kur $R = AC$ — apskritimo spindulys. Bet $AC = BD = \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{4^2 \cdot 5^2 + 3^2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{4^2 + 3^2} = 25$, o $h \cdot 25 = 15 \cdot 20$, todėl $h = 3 \cdot 4 = 12$. Vadinasi, $EF^2 = 4(25^2 - 12^2)$, $EF = 2\sqrt{37 \cdot 13}$.
Teisingas atsakymas **C**.

S28. Ⓑ 3002

Duotasis reiškinys lygus

$$\frac{(2^2-1)\cdot(3^2-1)\cdot\ldots\cdot(2001^2-1)}{2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot 2001^2} =$$
$$= \frac{(1\cdot 3)\cdot(2\cdot 4)\cdot(3\cdot 5)\cdot\ldots\cdot(1998\cdot 2000)\cdot(1999\cdot 2001)\cdot(2000\cdot 2002)}{2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot 2001^2} =$$
$$= \frac{2\cdot 2001\cdot 2002}{2^2\cdot 2001^2} = \frac{1001}{2001}.$$

Gautoji trupmena nesuprastinama,— jeigu skaitiklis ir vardiklis dalytųsi iš $d \neq 1$, tai ir jų skirtumas 1000 dalytųsi iš d, todėl d dalytųsi iš 2 arba 5. Bet 1001 nei iš 2, nei iš 5 nesidalija.
Kadangi $1001 + 2001 = 3002$, tai teisingas atsakymas **B**.

S29. Ⓒ 10

Sakykime, kad dėdės Beno pagautų žuvų masė buvo M. Kiekviena žuvis, kurią suėdė šuo, vidutiniškai svėrė $\frac{0{,}35}{3}M$. Katė suėdė $\frac{5}{13}\cdot 0{,}65M = 0{,}25M$. Kiekviena iš katės suėstų žuvų vidutiniškai svėrė $\frac{0{,}25M}{3}$. Vakarienei liko $M - 0{,}35M - 0{,}25M = 0{,}4M$ žuvies. Jeigu vakarienei buvo suvalgyta n žuvų, tai kiekviena jų vidutiniškai svėrė $\frac{0{,}4M}{n}$, ir

$$\frac{0{,}25M}{3} < \frac{0{,}4M}{n} < \frac{0{,}35M}{3}.$$

Padauginę iš $3 \cdot 20/M$, gauname $5n < 24 < 7n$, t. y. $n < 5, n > 3$. Vadinasi, vakarienei buvo suvalgytos 4 žuvys, o dėdė Benas sugavo $3 + 3 + 4 = 10$ žuvų.
Teisingas atsakymas **C**.

S30. Ⓒ $\frac{10}{3}$

Nesunku įsitikinti, kad trijų trikampių, imant juos kas antrą, plotų sandauga lygi kitų trijų trikampių plotų sandaugai:

$$S_{\triangle ATB} \times S_{\triangle CTD} \times S_{\triangle ETF} =$$
$$= \frac{1}{2}AT\cdot BT\sin\angle ATB \times \frac{1}{2}CT\cdot DT\sin\angle CTD \times \frac{1}{2}ET\cdot FT\sin\angle ETF =$$
$$= \frac{1}{2}CT\cdot BT\sin\angle CTB \times \frac{1}{2}ET\cdot DT\sin ETD \times \frac{1}{2}AT\cdot FT\sin ATF =$$
$$= S_{\triangle BTC}\cdot S_{\triangle DTE}\cdot S_{\triangle FTA}.$$

Vadinasi, $S_{\triangle FTA}\cdot 2\cdot 3 = 1\cdot 4\cdot 5$, ir $S_{\triangle FTA} = 10/3$.
Teisingas atsakymas **C**.