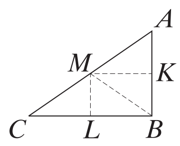
KADETAS (VII ir VIII klasės)

K1. Ⓑ stačiakampis

! Aišku, kad trikampis lankstomas per jo vidurines linijas. Pažymėkime kraštinių AB, BC ir AC vidurio taškus K, L ir M.



Sulenkus trikampį per tiesę ML, trikampis MLC sutaps su trikampiu MLB, o sulenkus trikampį per tiesę MK, trikampis MKA sutaps su trikampiu MKB. Taigi gausime stačiakampį $KBLM$ (iš dvigubo popieriaus).
Teisingas atsakymas **B**.

K2. Ⓔ 31

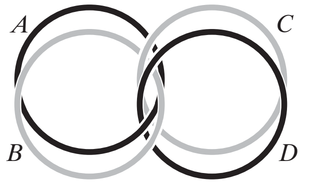
! Supakuoti 178 vienos spalvos kengūrėlėms reikia 18 dėžučių — į 17 dėžučių jos netelpa, o į 18 telpa. Supakuoti 121 kitos spalvos kengūrėlei reikia 13 dėžučių — į 12 jos netelpa, o 13 dėžučių užtenka. Iš viso prireiks 31 dėžutės.
Teisingas atsakymas **E**.
Pastaba. Sąlygoje geriau būtų sakyti ne „turi supakuoti po 10 į kiekvieną dėžutę“, o „pakuoja į dėžutes, į kurias telpa po 10“, bet ir senoji formuluotė nepadarė uždavinio dviprasmiško.

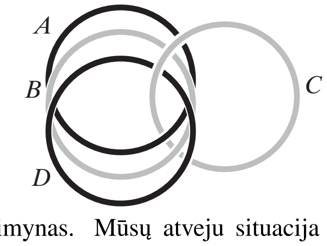
K3. Ⓒ C

? Žiedai A ir C sukibę (sąlygos paveikslėlyje viename jų „susikirtimo“ taške vaizduojama, kad žiedas A yra virš žiedo C, o kitame — atvirkščiai) — vadinasi, vieną iš jų reikia pjauti. Bet perpjovus A, lieka sukibę žiedai C ir D. Vadinasi, reikia pjauti žiedą C.
Renkamės atsakymą **C**.

! Apskritai kalbant, dar nieko neįrodėme: o gal dar liko sukibusių žiedų, taigi norimo žiedo nėra, ir galbūt teisingas atsakymas **E**. Įsitikinkime, kad sukibusių žiedų, perpjovus C, nebelieka. Iš tikrųjų, A yra „virš“ žiedo D ir žiedo B, o B — „virš“ žiedo D. Vadinasi, perpjauti žiedą C gana.
O gal galima perpjauti dar kurį nors žiedą? Ne, jau įsitikinome, kad iš A ir C bent vieną žiedą pjauti reikia, ir A pjauti neverta. Vadinasi, vienintelis teisingas sprendimas — pjauti žiedą C.

!! Beje, nesunku nurodyti, kaip sukabinti žiedus, kad vieno iš jų perpjauti neužtenka (žr. pav. kairėje):





Perpjovus vieną žiedą, jo pareigas atlieka kaimynas. Mūsų atveju situacija tokia: A virš B, B virš D, ir žiedus galima suvaryti į padėtį, pavaizduotą dešinėje.

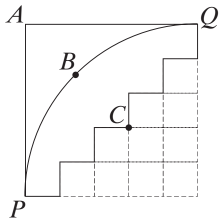
K4. Ⓑ 7

? Čia spėlioti nors ir neverta, bet galima. Tikrinkime atsakymą **C**. Tada klasėje mergaičių 9, berniukų $9 + 7 + 1 = 17$, o tai nėra du kartus daugiau, nei mergaičių.
Tikrinkime atsakymą **B**. Tada klasėje mergaičių 8, berniukų $8+7+1 = 16$, ir tai yra dukart daugiau.
Renkamės atsakymą **B**.

! Vis tiek geriausia sudaryti lygtį. Jeigu klasės draugių Giedrė turi x, tai mergaičių klasėje yra $x + 1$. Evaldas turi draugų berniukų $x + 8$, todėl klasėje berniukų yra $x + 9$. Bet berniukų klasėje dvigubai daugiau, todėl $x + 9 = 2(x + 1)$, $x = 7$.
Teisingas atsakymas **B**.

K5. Ⓑ 215 m ilgesnis

Kelias iš P į Q per C yra lygus keliui iš P į Q per A: kelio gabalų į dešinę suma yra lygi AQ, o kelio gabalų aukštyn suma yra lygi PA. Todėl kelias iš P į Q per C (kaip ir per A) yra ilgesnis 215 m už kelią per B.
Teisingas atsakymas **B**.



K6. Ⓑ -54

Atspėti mažiausią rezultatą paprasta: -63 neišeina, o $-54 = -9 \cdot 6$.
Renkamės atsakymą **B**.

Pasižiūrėkime, kokios sandaugos moduliu didžiausios. Išrikiuokime skaičių modulius: 9, 7, 6, 5, 4, 2. Surašykime jų didžiausias galimas sandaugas: $9 \cdot 7, 9 \cdot 6, 9 \cdot 5, 7 \cdot 6$ ir t. t. Sandaugos $9 \cdot 7$ padaryti neigiama neišeina. O štai antrą pagal didumą — išeina: $-9 \cdot 6 = -54$. Ji ir duoda mažiausią galimą rezultatą.
Teisingas atsakymas **B**.

K7. Ⓑ 15°

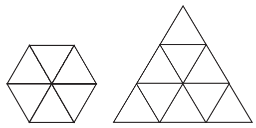
Kadangi $\angle OND = 60^\circ$, tai gretutinis $\angle ONA = 120^\circ$. Žinome ir antrą $\triangle ONA$ kampą: $\angle OAN =$ $= 45^\circ$, nes tai lygiašonio stačiojo $\triangle ADC$ kampas. Todėl trečiasis $\triangle NOA$ kampas NOA lygus $= 15^\circ$, ir tokio pat didumo yra jam kryžminis $\angle COM$.
Teisingas atsakymas **B**.

K8. Ⓐ Per 2 h

Per 10 h tėtė (taip pat mama) nuėda lapus nuo 2 eukaliptų. Trijulė per 10 h nuėda lapus nuo 5 eukaliptų, todėl vieną eukaliptą ji apės per 2 h.
Teisingas atsakymas **A**.

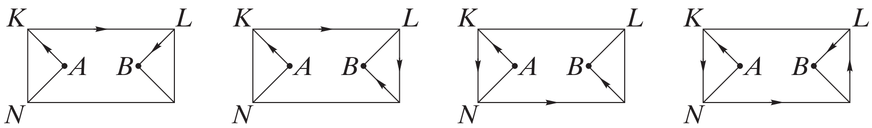
K9. Ⓐ $\frac{2}{3}$

Padalykime ir taisyklingąjį šešiakampį su kraštine 1, ir taisyklingąjį trikampį su kraštine 3 į taisyklinguosius trikampius su kraštine 1 (žr. pav.).
Kadangi šešiakampį sudaro 6 trikampiukai, o trikampį — 9 trikampiukai, tai jų plotų santykis yra $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.
Teisingas atsakymas **A**.



K10. Ⓓ 8

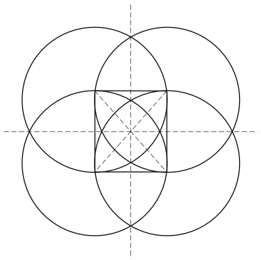
Iš taško A galima pradėti eiti per tašką K arba per tašką N. Dėl simetrijos vienokių ir kitokių kelių bus tiek pat.
Suskaičiuokime kelius, kurie prasideda atkarpa AK. Iš K galima eiti per L (2 keliai) arba per N (2 keliai).



Turime 4 kelius, kurie prasideda AK. Tiek pat yra kelių, kurie prasideda AN. Vadinasi, iš viso yra 8 keliai.
Teisingas atsakymas **D**.

K11. Ⓓ 12

? Galima tiesiog paimti skriestuvą ir, nubrėžus apskritimus, suskaičiuoti taškus — gauname 12 taškų. Renkamės atsakymą **D**.



! Vis dėlto įdomiau nebraižyti tų apskritimų. Kiekvieni du apskritimai kertasi dviejuose taškuose (nes atstumas tarp jų centrų yra 1 arba $\sqrt{2}$, taigi mažesnis už spindulių sumą 2). Kadangi keturių apskritimų yra 6 poros, tai iš viso gautume 12 susikirtimo taškų, tik reikia pasitikrinti, ar nė viename taške nesikerta 3 apskritimai.
Tarkime, kad radome tašką, kuris priklauso trims apskritimams. Vadinasi, tas taškas nutolęs nuo trijų kvadrato viršūnių atstumu 1. Kadangi jis vienodai nutolęs nuo viršūnių, tai jis yra kvadrato vidurinių linijų susikirtimo taškas — kitaip sakant — kvadrato centras. Bet kvadrato centras nuo viršūnių nutolęs mažesniu už 1 atstumu (kvadrato įstrižainė trumpesnė už 2, nes ji yra stačiojo trikampio su statiniais 1 ir 1 įstrižainė; todėl įstrižainės pusė mažesnė už 1). Prieštara.
Teisingas atsakymas **D**.

K12. Ⓔ Nikas ir Mikas paėmė po tiek pat riešutų

! Iš pradžių Nikas ima nuo pirmojo stalo kas trečią riešutą — iš viso $2001 : 3 = 667$ riešutus. Kai ant stalo lieka $2001 - 667 = 1334$ riešutai, jis ima kas penktą, ir paima $1330 : 5 = 266$ riešutus. Vadinasi, iš viso jis paėmė 933 riešutus.
Mikas iš pradžių ima kas penktą riešutą ir paima $2000 : 5 = 400$ riešutų. Tada ant antrojo stalo lieka $2001 - 400 = 1601$ riešutas, ir, imdamas kas trečią, Mikas paima dar $1599 : 3 = 533$ riešutus. Taigi ir Mikas paėmė 933 riešutus.
Teisingas atsakymas **E**.

K13. Ⓒ 2

! Iš karto nustatome P reikšmę: sandauga $4 \times \overline{KLMNP4}$ baigiasi skaitmeniu 6. Vadinasi, $P = 6$. Turime lygybę

$$4 \times \overline{KLMN64} = \overline{4KLMN6}.$$

Sandauga kairėje baigiasi 56, todėl ir skaičius dešinėje baigiasi 56, vadinasi, $N = 5$. Gauname lygybę

$$4 \times \overline{KLM564} = \overline{4KLM56}.$$

Sandauga kairėje baigiasi 256, todėl $M = 2$.
„Kengūrinis“ atsakymas gautas. Bet iš tikrųjų dar nežinome, ar iš viso įmanoma duotoji lygybė. Todėl tęskime. Turime lygybę

$$4 \times \overline{KL2564} = \overline{4KL256}.$$

Kairės pusės sandauga baigiasi skaitmenimis 0256, todėl $L = 0$. Turime lygybę

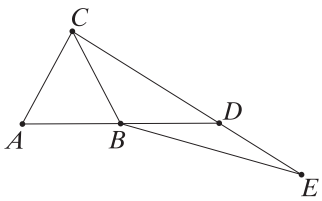
$$4 \times \overline{K02564} = \overline{4K0256}.$$

Sandauga kairėje baigiasi skaitmenimis 10256, todėl $K = 1$. Gauname lygybę

$$4 \times 102564 = 410256.$$

Ši lygybė teisinga, taigi dabar jau galima būti tikriems, kad duotoji lygybė įmanoma, o M gali būti tik lygus 2.
Teisingas atsakymas **C**.

K14. D 15°



! Kadangi $DE = AB$ atidėta nuo taško D taip, kad atstumas CE būtų didžiausias galimas, tai taškai C ir E yra vienoje tiesėje su tašku D ir yra į skirtingas puses nuo jo.
Kampas CBA kaip lygiakraščio trikampio kampas lygus 60°, todėl $\angle CBD = 120°$. Trikampis CBD lygiašonis, nes $CB = AB = BD$, todėl $\angle BDC = 30°$. Trikampis BDE taip pat lygiašonis, nes $BD = AB = DE$. Todėl $\angle BED = 15°$.
Teisingas atsakymas **D**.

K15. C 15

! Laikrodžio rodomo laiko pirmas valandų skaitmuo x gali įgyti reikšmes 0, 1 ir 2, o pirmas minučių skaitmuo y — reikšmes $0, 1, 2, 3, 4$ ir 5. Todėl kombinacijų xy, taigi ir kombinacijų $xy{:}yx$ būtų $3 \times 6 = 18$. Bet iš jų reikia išmesti variantus 00:00, 24:42, 25:52. Lieka 15 kombinacijų.
Teisingas atsakymas **C**.

K16. E 750 kg

! Kai Noras atsigeria, nevanduo sudaro 15% jo masės, lygios 800 kg. Tai yra $800 \cdot 0{,}15 = 120$ (kg). Kai Noras ištroškęs, nevanduo sudaro 16% ir atitinka tuos pačius 120 kg. Vadinasi, 1% atitinka $\frac{120}{16} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$ (kg), o 100% atitinka $100 \cdot \frac{15}{2} = 750$ (kg). Tokia ir yra ištroškusio Noro masė.
Teisingas atsakymas **E**.

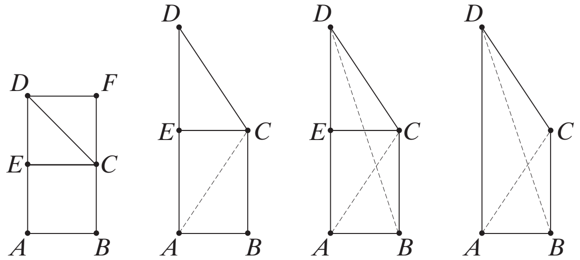
K17. B 43

! Romas 5 ratus nubėgdavo per $12 \cdot 60$ sekundžių, todėl vieną ratą — per $12 \cdot 12 = 144$ sekundes. Tomas 3 ratus nubėgdavo per $10 \cdot 60$ sekundžių. Starto liniją Romas kirs kas 144 sekundes, o Tomas — kas 200 sekundžių. Abu kartu starto liniją jie kirs tada, kai praėjęs laikas bus ir 144, ir 200 kartotinis. Randame tų skaičių mažiausiąjį bendrąjį kartotinį: $144 = 12^2 = 2^4 \cdot 3^2$, $200 = 2^3 \cdot 5^2$, todėl mažiausias bendrasis kartotinis yra $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Per tą laiką Romas nubėgs $5^2 = 25$ ratus, o Tomas — $2 \cdot 3^2 = 18$ ratų. Iš viso kartu jie nubėgs $25 + 18 = 43$ ratus.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Romas įveikia ratą per 144 sekundes, Tomas — per 200 sekundžių. Kai Romas baigia pirmą ratą, Tomas įveikia tik $\frac{144}{200} = \frac{36}{50} = \frac{18}{25}$ rato ir atsilieka $\frac{7}{25}$ rato. Kai Romas įveiks 2 ratus, tai Tomas atsiliks $2 \cdot \frac{7}{25}$ rato, kai 3 — tai $3 \cdot \frac{7}{25}$ ir t. t., ir pirmą kartą sveikuoju ratų skaičiumi Tomas atsiliks, kai Romas įveiks 25 ratus. Tada Tomas bus atsilikęs $25 \cdot \frac{7}{25} = 7$ ratais ir bus nubėgęs $25 - 7 = 18$ ratų.
Galima sudaryti ir lygtį. Sakykime, kad kalbamu momentu Romas bus nubėgęs x ratų, o Tomas y ratų. Romas vieną ratą nubėga per $\frac{12}{5}$ min, Tomas — per $\frac{10}{3}$ min. Jie bėgo vienodai laiko, todėl $\frac{12}{5}x = \frac{10}{3}y$, $18x = 25y$. Kairė pusė turi dalytis iš 25, todėl mažiausias $x = 25$, tada $y = 18$.
Visiškai aišku, kad toliau viskas kartosis, ir jeigu jie bėgtų toliau, jie kartu kirstų starto liniją kas $\frac{12}{5} \cdot 25 = 60$ (min), t. y. kas valandą.

K18. (A) 2

? Kadangi AB ir BC matmenys nenurodyti, tai imkime du vienetinius kvadratus $ABCE$ ir $ECFD$ (žr. pirmą paveikslėlį). Tada sąlygos išpildytos, nes S_{ABCD} yra $\frac{3}{2}$ kvadrato ploto, o S_{ACB} yra $\frac{1}{2}$ kvadrato ploto. Tada S_{ADB} yra pusė stačiakampio $ABFD$ ploto, t. y. 1, o $S_{ACB} = \frac{1}{2}$. Vadinasi, ieškomasis atsakymas $1 : \frac{1}{2} = 2$.
Renkamės atsakymą **A**.



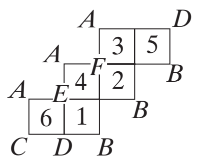
! Laikykime $\triangle ACB$ plotą vienetu (žr. antrą paveikslėlį). Tada $S_{ABCD} = 3$, todėl $S_{ACD} = 2$. Bet $S_{ADB} = S_{ADC}$, nes tai plotai trikampių su bendru pagrindu AD ir lygiomis aukštinėmis (nes iš sąlygos $BC \parallel AD$). Vadinasi, $S_{ADB} : S_{ABC} = S_{ADC} : S_{ABC} = 2 : 1$.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Brėžkime $CE \parallel BA$ (žr. trečią paveikslėlį). Pagal sąlygą $S_{ABCD} = 3S_{ACB}$, $S_{ABCE} = 2S_{ACB}$, todėl $S_{EDC} = S_{ACB}$. Kadangi aukštinės $EC = AB$, tai pagrindai $DE = CB$, taigi $DE = EA$, $DA = 2CB$. Kadangi trikampių ADB ir ACB pagrindas bendras, tai $S_{ADB} = 2S_{ACB}$, ir ieškomasis santykis lygus 2. Iš tikrųjų čia įrodėme, kad mūsų konstrukcija yra stačiakampis ant stačiakampio.

!!! Pažymėkime $S_{ACB} = x$ (žr. ketvirtą paveikslėlį). Iš sąlygos $S_{ABCD} = 3x$. Bet $S_{DCB} = x$, nes $\triangle DCB$ turi bendrą pagrindą su $\triangle ABC$ ir tokią pat aukštinę. Todėl $S_{ADB} = 3x - x = 2x$, ir $S_{ADB} : S_{ACB} = 2x : x = 2$.

K19. (D) 90

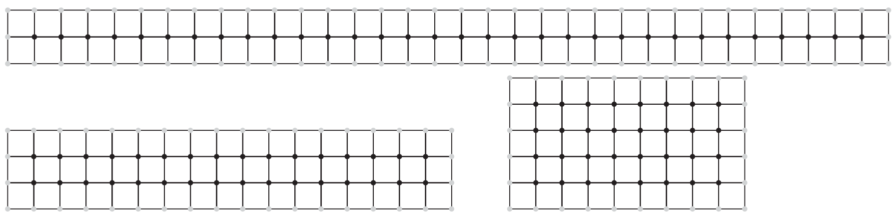
! Kai kubas sulankstytas, sienos susieis viršūnėse taip, kaip tai parodyta paveikslėlyje. Didžiausią sandaugą atitinka viršūnė C: $6 \cdot 5 \cdot 3 = 90$.
Teisingas atsakymas **D**.



!! Didžiausia trijų iš parašytų skaičių sandauga yra $6 \cdot 5 \cdot 4$, bet jos negalima gauti, kadangi 4 ir 5 yra priešingose kubelio sienose. Kita didžiausia sandauga yra $6 \cdot 5 \cdot 3$, ir šitos sienos susieina į vieną viršūnę.

K20. (B) 45

? Patogiau kalbėti apie mazgus — jie sudaro stačiakampį. Kadangi $32 = 1 \cdot 32 = 2 \cdot 16 = 4 \cdot 8$, nusipieškime tokius tinklus. Pirmas tinklas turi $2 \cdot (32 + 2) + 2 = 70$ plūdžių, antras tinklas — $2 \cdot (16 + 2) + 2 \cdot 2 = 40$ plūdžių, trečias tinklas — $2 \cdot (8 + 2) + 4 \cdot 2 = 28$ plūdes. Matome, kad akučių jame yra 45.
Renkamės atsakymą **B**.

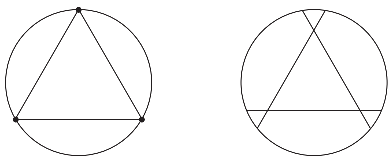


! Pasirodo, kad akutes suskaičiuoti labai lengva pagal plūdę ar mazgą jos kairiame viršutiniame kampe. Kiekvienas mazgas atitinka akutę, o plūdės — ne kiekviena: viršutinės (išskyrus vieną dešiniąją) atitinka akutę, apatinės (jų yra tiek pat kiek ir viršutinių) — ne; kitos kairiosios atitinka po akutę, dešiniosios (jų yra tiek pat) — ne. Taigi skaičiuojant akutes suskaičiuojamos visos plūdės ir pusė mazgų be vieneto. Vadinasi, akučių yra $32 + \frac{1}{2} \cdot 28 - 1 = 45$.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Spręsdami faktiškai rėmėmės garsiąja Piko formule:
Daugiakampio (*nebūtinai iškilojo*) *viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškuose. Daugiakampio viduje yra n gardelės mazgų, o kraštinėse — m mazgų. Tada daugiakampio plotas lygus* $n + \frac{m}{2} - 1$.
Įrodymą žr. 161–162 psl. V. Prasolovo knygoje „Zadači po planimetrii“, 2 d., „Nauka“, Maskva, 1991. Sprendime **!** šią formulę įrodėme paprasčiausiu stačiakampio atveju — to mums užteko uždaviniui išspręsti.

K21. Ⓔ 12

? Labai paprasta padalyti tortą į 5 ar 7 dalis.



Pavyzdžiui, kairiajame paveikslėlyje jau padaryti 3 pjūviai ir yra 4 dalys. Darykime dar vieną vertikalų pjūvį. Jei pjūvis bus artimas vertikaliajai apskritimo liestinei, tai gausime 5 dalis, o jei kirs 2 trikampio kraštines, tai gausime 7 dalis (beje, jei vertikalusis pjūvis eis per trikampio viršūnę — turėsime 6 dalis). Dešiniajame paveikslėlyje po 3 pjūvių turime 7 dalis. Vėl darykime vertikalų pjūvį. Jei judėsime iš kairės į dešinę nuo liestinės padėties iki vertikaliojo skersmens padėties, tai pjūvis eis atitinkamai per $1, 2, 3, 4, 3$ sritis ir dalys kiekvieną jų į 2 dalis — atitinkamai gausime $8, 9, 10, 11, 10$ dalių. Mokame padalyti į $3, 5, 7, 9, 11$ dalių — renkamės atsakymą **E**.

! Jau įsitikinome, kad tortą galima padalyti į bet kurį dalių skaičių nuo 5 iki 11. Ar tai jau viskas? Pasirodo — taip.
Visiškai aišku, kad mažiau kaip 5 dalys būti negali. Iš tikrųjų — pirmasis pjūvis duoda 2 dalis; antras bent vieną dalį dalija į 2 dalis — mažiausiai 3 dalys; trečias pjūvis vėl bent vieną dalį dalija į 2 dalis — 4 dalys; taigi po ketvirto pjūvio turėsime mažiausiai 5 dalis.
Sunkiau įrodyti, kad negalima gauti 12 ar daugiau dalių. Mums paprasčiau bus įrodyti, kad plokštumos 4 tiesėmis negalima padalyti į 12 dalių. O jeigu plokštumą jau padalijome į kelias dalis, tai ir tortą galima padalyti į tiek dalių. Iš tikrųjų, imkime didelį skritulį ir uždėkime jį taip, kad visi plokštumą dalijančių tiesių taškai atsidurtų jo viduje. Tada aišku, kad skritulys bus padalytas į tiek pat dalių, kaip ir plokštuma.
Taigi dalijame plokštumą tiesėmis į kuo daugiau dalių. Po pirmo dalijimo turime lygiai 2 dalis. Antra tiesė, jei kerta pirmąją, eina per abi dalis, taigi dalija kiekvieną dalį į 2, o plokštumą — į 4 dalis (o jei nekerta pirmos tiesės — gauname 3 dalis).
Veskime trečią tiesę. Susikirsdama su pirma ir antra tiesėmis, ji bus padalyta jomis daugiausiai į 3 dalis. Kiekviena tokia trečiosios tiesės dalis dalija vieną iš 4 dalių į dvi. Todėl sričių skaičius padidės trimis, ir gausime daugiausia 7 sritis.
Veskime ketvirtą tiesę. Ankstesnės 3 tiesės ją padalys daugiausia į 4 dalis, ir kiekviena dalis dalys sritį į dvi — sričių skaičius padidės daugiausia keturiomis, ir jų pasidarys 11.
Įrodėme, kad skaičius dalių, į kurias galima padalyti tortą, gali būti nuo 5 iki 11.
Vadinasi, atsakymas **E** yra teisingas.

!! Mes jau išmokome spręsti tokį uždavinį.
Į kiek dalių dalija plokštumą n tiesių, jeigu jokios 2 nėra lygiagrečios ir jokios 3 neina per vieną tašką?
Sričių, į kurias plokštumą dalija n tiesių, pažymėkime $F(n)$. Tada $(n+1)$-oji tiesė, susikirsdama su n ankstesniųjų, turi n sankirtos taškų, kurie dalija ją į $n+1$ intervalą ($n-1$ atkarpą ir 2 spindulius). Kiekvienas šių intervalų vieną iš $F(n)$ sričių dalija į dvi dalis ir dalių skaičių padidina vienetu. Vadinasi, išvedus $(n+1)$-ąją tiesę, dalių skaičius padidėja $n+1$. Gauname rekurentinę („grįžtamąją“) formulę:

$$F(n+1) = F(n) + n + 1.$$

Taikydami ją, parašome lygybes:

$$F(n) = F(n-1) + n,$$
$$F(n-1) = F(n-2) + n - 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F(2) = F(1) + 2,$$
$$F(1) = F(0) + 1,$$
$$F(0) = 1.$$

Sudėję šias lygybes, gauname:

$$F(n) = n(n+1)/2 + 1.$$

(Rėmėmės formule $S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = n(n+1)/2$, kurią įrodyti lengva. Sudėkime lygybes

$$S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n,$$
$$S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1.$$

Gauname $2S = (n+1)n$, t. y. $S = n(n+1)/2$.)

K22. D 58

? Kad nubrauktume kuo daugiau taškų, reikia, kad įvertinimai būtų kuo lygesni. Kadangi $72 : 5 = 14, \ldots$, tai imame $14 + 14 + 14 + 15 + 15 = 72$. Nubraukus 14, liks $72 - 14 = 58$.
Renkamės atsakymą **D**.

! Kadangi įvertinimų vidurkis yra $72 : 15 = 14, \ldots$, tai mažiausias įvertinimas negali būti didesnis už 14. Bet mažiausias įvertinimas 14 būti gali: $3 \cdot 14 + 2 \cdot 15 = 72$. Jį atmetę, gausime didžiausią galimą galutinę taškų sumą 58.
Teisingas atsakymas **D**.

K23. C 105

! Vidurinio (nematomojo) kauliuko akučių skaičius lygus $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Kiekvienas iš matomų kauliukų turi po 21 akutę, bet iš jų paslėpta tiek pat, kiek jų turi centrinis kauliukas — 21. Vadinasi, iš pradžių talismano paviršiuje buvo $6 \cdot 21 - 21 = 5 \cdot 21 = 105$ akutės.
Teisingas atsakymas **C**.

K24. Ⓒ 3

Kad skaičius būtų mažiausias, jis bent jau turi turėti kuo mažiau skaitmenų. Kadangi kiekvienas skaitmuo ne didesnis už 9, tai skaitmenų skaičius turi būti ne mažesnis kaip $2001 : 9 = 222\frac{1}{3}$, t. y. ne mažesnis kaip 223. Vadinasi, mažiausio skaičiaus ieškome tarp 223-ženklių. Mažiausias tų skaičių skaitmuo gali būti tik 3: jeigu tai skaitmuo $\leqslant 2$, tai net devynetai neduoda reikiamos sumos, kadangi $222 \cdot 9 + 2 = 2 \cdot (999 + 1) = 2000$. O štai mažiausias skaitmuo 3 būti gali: užtenka likusius skaitmenis imti devynetus. Iš tokių skaičių mažiausias yra, kai pirmas skaitmuo mažiausias, t. y. pirmas skaitmuo 3.
Vadinasi, teisingas atsakymas **C**.

K25. Ⓔ 8 ir 16

Braižykime vaizdą iš viršaus ir sužymėkime, kiek daugiausiai kubelių gali būti eilutėse ir stulpeliuose. Nustatykime didžiausius galimus kubelių skaičius kiekviename laukelyje. Iš karto aišku, kad laukelyje *ad* (žr. kairįjį paveikslėlį) gali stovėti ne daugiau kaip 2 kubeliai. Laukelyje *bd* gali stovėti ne daugiau kaip 3 kubeliai ir t. t. Gauname kairiajame paveikslėlyje pavaizduotą padėtį. Joje 16 kubelių, ir ji įmanoma.

2 *f*	2	2	2
1 *e*	1	1	1
3 *d*	2	3	2
	a	*b*	*c*
	2	3	2

2 *f*			
1 *e*			
3 *d*		3	
	a	*b*	*c*
	2	3	2

Dabar pagalvokime, kiek mažiausiai kubelių gali stovėti statinyje.
Eilutėje *d* turi stovėti 3 kubelių bokštelis, bet jis negali stovėti nei stulpelyje *a*, nei *c*. Vadinasi, 3 kubelių bokštelis stovi laukelyje *bd* (žr. dešinįjį paveikslėlį).
Stulpeliuose *a* ir *c* turi stovėti po 2 kubelių bokštelį. Jie negali stovėti eilutėje *e* — ten aukščiausias gali būti vienetinis kubelis.
Vadinasi, eilutėse *d* ir *f* jau turi stovėti bent 7 kubeliai, o pridėjus eilutę *e* — bent 8 kubeliai. 8 kubelius sudėti galima:

2 *f*	2		
1 *e*			
3 *d*		3	2
	a	*b*	*c*
	2	3	2

2 *f*	2		2
1 *e*			
3 *d*		3	
	a	*b*	*c*
	2	3	2

2 *f*			2
1 *e*			
3 *d*	2	3	
	a	*b*	*c*
	2	3	2

2 *f*	2	1	2
1 *e*		1	
3 *d*		3	
	a	*b*	*c*
	2	3	2

(Antroje eilutėje vieną kubelį galima statyti bet kur.)
Teisingas atsakymas **E**.

Įdomu, kad iš statinių su mažiausiu kubelių skaičiumi nė vienas nėra jungus, bet sąlygoje apie jungumą nėra užsiminta. Bet štai jeigu sąlygoje būtų, pavyzdžiui, pasakyta, kad iš kubelių suklijuotas kūnas, tai mažiausias kubelių skaičius būtų 9 (pavyzdžiui, tai galėtų būti kūnas, apibūdintas dešiniajame paveikslėlyje).

K26. Ⓓ 115

Pabandykime užpildyti kaip nors dėžes, kad gautume 102 tuščias. Pirmas žingsnis natūralus — į kiekvieną iš 11 didžiųjų dėžių dėkime po 8 vidutines. Turime 88 tuščias dėžes. Užpildyti 1 vidutinę mažosiomis dėžėmis per mažai. Imkime 2 vidutines ir užpildykime kiekvieną jų 8 mažosiomis. Turime tuščias 86 vidutines ir 16 mažų ir kaip tik 102 tuščias dėžes. Iš viso dėžių yra $11 + 88 + 16 = 115$.
Renkamės atsakymą **D**.

! Iš tikrųjų sprendimas **?** negarantuoja net teisingo „kengūrinio“ atsakymo — o gal kitaip užpildžius dėžes, gausime kitokį atsakymą. Vadinasi, norint būti tikram, reikia tikrinti ir kitus dėjimo būdus.
Užpildykime vidutinėmis dėžėmis 10 didžiųjų — turime $1 + 10 \times 8 = 81$ tuščią dėžę. Užpildžius dvi vidutines — tuščių per mažai, užpildžius keturias — tuščių per daug. Užpildžius tris — viskas gerai: tuščių $1 + 77 + 24 = 102$ dėžės. Iš viso turime $11 + 80 + 24 = 115$ dėžių.
Užpildę 9 didžiąsias, turime $2 + 9 \cdot 8 = 74$ tuščias dėžes, ir užpildę 4 vidutines, tuščių gauname $2 + 68 + 32 = 102$ dėžes, iš viso — $11 + 72 + 32 = 115$ dėžių.
Užpildę 8 didžiąsias, turime $3 + 8 \cdot 8 = 67$ tuščias dėžes, ir užpildę 5 vidutines, tuščių gauname $3 + 59 + 40 = 102$ dėžes, iš viso — $11 + 64 + 40 = 115$ dėžių.
Užpildę 7 didžiąsias, turime $4+7 \cdot 8 = 60$ tuščių dėžių, ir užpildę 6 vidutines, gauname $4+50+48 = 102$ tuščias dėžes, o iš viso $11 + 56 + 48 = 115$ dėžių.
Užpildę 6 didžiąsias, turime $5 + 6 \cdot 8 = 53$ tuščias dėžes. Užpildę dabar 7 vidutines, gauname $5 + 41 + 56 = 102$ tuščias dėžes, iš viso — $11 + 48 + 56 = 115$ dėžių.
Užpildę 5 didžiąsias, turime $6+5 \cdot 8 = 46$ tuščias dėžes. Užpildę vidutines, gauname $6+32+64 = 102$ tuščias dėžes, iš viso $11 + 40 + 64 = 115$ dėžių.
Užpildę 4 didžiąsias dėžes, turime $7 + 4 \cdot 8 = 39$ tuščias dėžes. Užpildę 9 vidutines, gauname $7 + 23 + 72 = 102$ tuščias dėžes, iš viso $11 + 32 + 72 = 115$ dėžių.
Užpildę 3 didžiąsias, turime $8 + 3 \cdot 8 = 32$ tuščias dėžes, iš viso $11 + 24 + 80 = 115$ dėžių.
Užpildę 2 didžiąsias, turime $9+2 \cdot 8 = 25$ tuščias dėžes. Užpildę 11 vidutinių, turime $9+5+88 = 102$ tuščias dėžes, iš viso $11 + 16 + 88 = 115$ dėžių.
Užpildę 1 didžiąją, turime $10 + 1 \cdot 8 = 18$ tuščių dėžių. Bet net užpildę visas 8 vidutines, gausime tik $10 + 64 = 74$ tuščias dėžes, ir sąlyga nėra išpildyta.
Vadinasi, visais atvejais, kai uždavinio sąlygos išpildytos, atsakymas nekinta ir yra 115.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Žinoma, geriau pasitelkti algebrą. Užpildytų didžiųjų dėžių skaičių pažymėkime x, užpildytų vidutinių — y. Tada tuščių dėžių yra $102 = (11 - x) + (8x - y) + 8y$, todėl $7(x + y) = 91$, $x + y = 13$. Vadinasi, užpildytų dėžių yra 13, o iš viso dėžių 115.

K27. Ⓒ 20

! Kadangi kiekvieną iš 12 penkiakampių supa 5 šešiakampiai, tai gautume $12 \cdot 5 = 60$ šešiakampių. Bet kiekvieną šešiakampį supa 3 penkiakampiai, todėl šešiakampių yra trigubai mažiau — $60 : 3 = 20$.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Sakykime, šešiakampių yra x. Kiekvienas iš jų turi tris kraštines, bendras su penkiakampių kraštinėmis (o penkiakampiai pagal sąlygą bendrų kraštinių neturi). Vadinasi, penkiakampių kraštinių yra $3x$. Kadangi penkiakampių yra 12, tai $3x = 12 \cdot 5$, $x = 20$.

K28. Ⓑ 3

? $1664 = 2^7 \cdot 13$. Iš karto matome variantą $2^3, 13, 2^4$.
Renkamės atsakymą **B**.

! Jauniausiojo metų skaičius nesidalija iš 13 — kitaip sandauga dalytųsi iš 13^2. Vadinasi, tiek jauniausiojo, tiek vyriausiojo amžius yra dvejeto laipsniai. Kadangi vieno iš vaikų amžius ne mažesnis už 13, tai vyriausiojo amžius ne mažesnis už 2^4. Tada jauniausiasis ne jaunesnis už 2^3. Kadangi 2 įeina į sandaugą tik 7 laipsniu, tai vyriausiojo amžius yra 2^4, jauniausiojo — 2^3. Lieka dar vienas vaikas, kurio amžius 13. Vadinasi, yra 3 vaikai.
Teisingas atsakymas **B**.

K29. Ⓓ 758

! Natūralu suskaičiuoti, kiek yra būdų, kai a) Lukas eina žiūrėti rungtynių, ir kiek yra būdų, kai b) Lukas neina.
a) Jei Lukas eina, jis būtinai pasiima Matą. Lieka 8 berniukai. Kiekvienas jų gali eiti arba neiti.

Vadinasi, pirmą berniuką galima imti arba neimti; antrą berniuką galima imti arba neimti; ...; aštuntą berniuką galima imti arba neimti. Reikia padaryti 8 darbus (berniuką imti arba neimti), ir kiekvieną darbą padaryti yra dvi galimybės. Pagal sandaugos taisyklę yra $2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^8 = 256$ galimybės.
b) Jei Lukas neina, lieka 9 berniukai. Sudarinėjant grupes, kiekvieną jų galima imti arba neimti, taigi pagal sandaugos taisyklę galime sudaryti $2^9 = 512$ būdų.
Iš tų grupių netinka ta, kurioje yra 0 berniukų (t. y. kai visi berniukai nepaimti) ir grupės, kuriose yra 1 berniukas (tokių grupių yra 9 — pagal berniukų skaičių). Vadinasi, iš viso iš 9 berniukų galime sudaryti $512 - 1 - 9 = 502$ grupes.
Iš viso gauname $256 + 502 = 758$ grupes.
Teisingas atsakymas **D**.

!! a) Jei Lukas eina, jis būtinai pasiima Matą. Lieka nuo 0 iki 8 vietų — jas galima užpildyti $1 + C_8^1 + C_8^2 + C_8^3 + \cdots + C_8^8 = 256$ būdais.
b) Jei Lukas neina, lieka nuo 2 iki 10 vietų — jas galima užpildyti $C_9^2 + C_9^3 + \cdots + C_9^9 = 502$ būdais. Iš viso gauname $256 + 502 = 758$ būdus.
Teisingas atsakymas **D**.

K30. C 3

? Nesunku atspėti, kad jeigu A sugeba palikti 9 akmenukus, tai jis laimi. Iš tikrųjų, jei B iš 9 akmenukų dabar ima $2, 3, 4, 5, 6, 7$, tai A atitinkamai ima $7, 6, 5, 4, 3, 2$ akmenukus (kitaip sakant — visus). Jei B ima 1 akmenuką (liko 8), tai A ima 4 (lieka 4), B priverstas imti 2 (kitaip A paims visus; lieka 2), A ima 1 ir laimi (B neturi ėjimo).
Dabar jau nesunku atspėti, kad A verta imti 3 akmenukus (ir palikti 17). Jeigu dabar B ima $1, 2, 5, 6, 7$, tai A ima $7, 6, 3, 2, 1$ ir palieka 9 akmenukus (taigi laimi).
Jeigu B iš 17 ima 4 akmenukus (ir palieka 13), tai A ima 2 (ir palieka 11). Jei iš 11 dabar B ima $4, 5, 6, 7$, tai A ima likusius $7, 6, 5, 4$. Jei iš 11 dabar B ima 3 akmenukus, tai lieka 8, ir matėme, kad A laimi imdamas 4. Pagaliau, jei B iš 11 ima 1 akmenuką ir palieka 10, tai A ima 5 (B imti 5 negali) ir sekančiu ėjimu užbaigia partiją.
Renkamės atsakymą **C**.

! Įrodėme, kad imdamas pirmu ėjimu 3 akmenukus, A laimi. Vadinasi, „kengūriškas“ atsakymas gautas. Bet ne pro šalį įrodyti, kad kiti A ėjimai pralaimi.
Iš tikrųjų, jei A ima $4, 5, 6, 7$ akmenukus, tai B atitinkamai ima $7, 6, 5, 4$, palieka 9 ir todėl laimi.
Jei A ima 2 akmenukus, tai B ima 1 akmenuką ir palieka 17 akmenukų. Matėme, kad tokioje padėtyje A pralošia, jei A ima $2, 4, 5, 6, 7$ akmenukus. Bet jis taip pat pralošia, jeigu ima 3 akmenukus: lieka 14 akmenukų, B ima 7 ir sekančiu ėjimu užbaigia partiją.
Jei A ima 1 akmenuką, tai B ima 2 akmenukus, palieka 17 akmenukų ir todėl laimi.
Vienintelis teisingas atsakymas **C**.