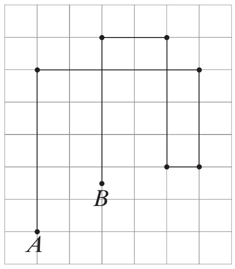
SENJORAS (XI ir XII klasės)

S1. (D) 5 km

? Spėti visiškai neverta.



! Nusibraižius brėžinį languotame popieriuje (1 langelis = 2 km), aišku, kad pagal Pitagoro teoremą $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ (km).
Beje, brėžinio galima netgi nedaryti, o atskirai skaičiuoti kryptis horizontaliai („vakarų-rytų“) ir vertikaliai („pietų-šiaurės“). Tada horizontaliai buvo nuvažiuota $10-2-4 = 4$ (km), o vertikaliai $10-6+8-9 = 3$ (km).
Teisingas atsakymas D.

!! Galima kalbėti ir apie taškų koordinates. Jeigu taškas $A(0, 0)$, tai kitų taškų koordinatės yra (0, 10), (10, 10), (10, 4), (8, 4), (8, 12), (4, 12), $B(4, 3)$. Todėl $AB = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = 5$ (km).

S2. (E) Tokios dienos nėra

? Tikriname atsakymus.
A) Tai negalėjo būti pirmadienį, nes antradienį Baltasis triušis tikrai meluos, ir 2) teiginys būtų teisingas – o pirmadieniais jis meluoja.
B) Tai negalėjo būti antradienį, nes 2) teiginys vėl būtų neteisingas.
C) Tai negalėjo būti ketvirtadienį, nes 2) teiginys būtų teisingas, o penktadieniais jis nemeluoja.
D) Tai negalėjo būti sekmadienį, nes 1) teiginys būtų teisingas, o šeštadieniais jis nemeluoja.
Renkamės atsakymą E.

! Norint įsitikinti, kad tikrai tokios dienos nėra, dar reikia patikrinti trečiadienį, penktadienį ir šeštadienį.
Tai negalėjo būti trečiadienis, nes tada jis antradienį nemeluotų, o tai ne taip.
Tai negalėjo būti penktadienis, nes tada jis nemelavo ketvirtadienį, ir 1) teiginys neteisingas.
Tai negalėjo būti šeštadienį, nes vėl 1) teiginys būtų neteisingas.
Vadinasi, tokios dienos nėra, ir teisingas atsakymas E.

!! Sprendimą galima užrašyti trumpai.
Jei tai būtų įvykę pirmadienį, antradienį, ketvirtadienį, penktadienį, šeštadienį, tai 2) teiginys būtų neteisingas.
Jei tai būtų įvykę trečiadienį ar sekmadienį, tai 1) teiginys būtų neteisingas.
Vadinasi, nėra tokios dienos, ir teisingas atsakymas E.

Pastaba. Tai labai retas atvejis „Kengūros“ konkurse, kai teisingas neigiamas atsakymas.

S3. (A) 5

? Marytės tėvelių amžių suma yra 78 metai, o Marytės ir tėčio amžių suma yra 46 metai.
Kadangi atsakymai išrikiuoti, spėliokime nuo vidurio.
Jei Marytei 11 metų, tai tėčiui 35 metai, tada mamai $35-4 = 31$ metai, ir jų amžių suma 66 metai, – netinka.
Jei Marytei 13 metų, tai tėčiui 33, mamai 27, jų amžių suma 60, – netinka.
Kadangi amžių suma sumažėjo, tai eikime į kitą pusę. Jei Marytei 7 metai, tai tėčiui 39, mamai 35, ir jų amžių suma 74, – netinka.
Jei Marytei 5 metai, tai tėčiui 41, mamai 37, ir jų amžių suma 78, – tinka.
Renkamės atsakymą A.

! „Kengūriškam“ sprendimui dar reikia patikrinti atsakymus A ir E.
Atsakymas A jau patikrintas. Jei Marytei 15 metų, tai tėčiui 31, mamai 17, jų amžių suma 58, – netinka. Vadinasi, vienintelis teisingas yra atsakymas A.

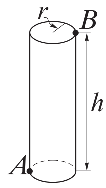
!! Spręskime uždavinį, jei atsakymas neduotas. Kadangi tėčio ir mamos amžių vidurkis 39 metai, o tėtis vyresnis už mamą 4 metais, tai tėčio amžius už vidurkį didesnis 2 metais, o mamos – mažesnis 2 metais, t. y. 41 ir 37. Tada Marytės amžius lygus $2 \cdot 23 - 41 = 5$ metai, ir tai yra vienintelis uždavinio atsakymas.
Galima spręsti ir sudarant lygtis. Jei Marytės amžius x, o tėčio – y, tai mamos amžius yra $y - 4$. Turime dvi lygtis: $(x + y) : 2 = 23$, $(y + y - 4) : 2 = 39$. Iš antros lygties $2y - 4 = 78$, $y = 41$, tada iš pirmos lygties $x + 41 = 46$, $x = 5$.

S4. (E) 13

? Paspėliokime. Jeigu skaičiaus $3^{20} \cdot 5^{30} - 2$ dalybos iš 15 liekana būtų 0, tai $3^{20} \cdot 5^{30}$ dalijant iš 15 duotų liekaną 2. Bet skaičius $3^{20} \cdot 5^{30}$ dalijasi iš $15 = 3 \cdot 5$, taigi iš tikrųjų liekana 0. Iš atsakymų matome, kad tinka liekana 13.
Renkamės atsakymą E.

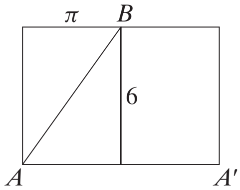
! Faktiškai uždavinį jau išsprendėme: kadangi $3^{20} \cdot 5^{30}$ dalijasi iš 15, tai ieškomoji liekana bus 13, ir teisingas atsakymas E (net jei atsakymai nenurodyti).

S5. (D) $\sqrt{\pi^2 + 36}$



? Jeigu leistumės tiesiai žemyn į pagrindą, tai kelias būtų $h = 6$. Pasiekti tašką A dar reikia $2r = 2$, bendras atstumas būtų lygus 8. Atstumas tiese tarp A ir B pagal Pitagoro teoremą lygus $\sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$. Tarp šių skaičių yra 7 ir $\sqrt{\pi^2 + 36}$ ($2\sqrt{\pi^2 + 9} > 8$, nes $\pi^2 + 9 > 16$). Reikia rinktis iš šių dviejų atsakymų. Kadangi panašu, jog į atsakymą turėtų įeiti π, tai renkamės atsakymą D.

! Pavaizduokime ritinio šonio paviršiaus išklotinę. Matome, kad trumpiausias atstumas tarp A ir B yra $AB = \sqrt{\pi^2 + 36}$.
Teisingas atsakymas D.



!! Išklotinėje išveskime atkarpą AB ir vėl išklotinę susukime į ritinį (taškas A' sutaps su tašku A). Matuoti galima siūlu pagal gautą erdvinę kreivę AB. Beje, įtempus siūlą tarp taškų A ir B, pats siūlas įgis tos kreivės formą.

S6. (D) 13 h

? Spėlioti čia sunku, bet šiaip jau aišku, kad kuo toliau, tuo laikas daugiau didėja. Kadangi antrą dieną palyginti su pirma laikas padidėjo 1 valanda, tai galima spėti, kad jis trečią dieną palyginti su antra jis padidės dar kokiomis 2 h. Vadinasi, panašiausi atsakymai 10 h ir 13 h. Ko gera, verta imti didesnį laiką.
Renkamės atsakymą D.

?? Pabandykime atspėti, kiek laiko kopė Sizifas į kalną pirmą dieną. Tikrinkime 4 h. Tada pirmą dieną jis būtų leidęsis 3 h. Antrą dieną jis būtų kopęs 8 h, bet tai netinka, nes 8 h turi būti bendras laikas.
Imkime 3 h. Tada jis pirmą dieną leidosi 4 h, antrą – kopė 6 h, leidosi 2 h, o tai atitinka sąlygą. Todėl trečią dieną jis kopė 12 h, leidosi 1 h ir sugaišo 13 h.
Renkamės atsakymą D.

! Pažymėkime pirmos dienos kopimo į kalną laiką t, tada leidimosi laikas $7 - t$ (valandų). Kadangi antrą dieną jis kopė $2t$ valandų, o leidosi $(7 - t)/2$ valandų, tai turime:

$$2t + (7 - t)/2 = 8, \quad 4t + 7 - t = 16, \quad 3t = 9, \quad t = 3.$$

Vadinasi, antrą dieną Sizifas kopė 6 h, o leidosi 2 h. Todėl trečią dieną jis kopė 12 h, leidosi 1 h ir iš viso sugaišo 13 h.
Teisingas atsakymas D.

!! Kaip taisyklė, jei uždavinį pavyksta išspręsti sudarius pirmojo laipsnio lygtį, tai jį galima išspręsti ir „be lygčių“.
Pirmos dienos kopimo ir leidimosi laikų suma yra 7. Pagal sąlygą dvigubo kopimo laiko ir pusės leidimosi laiko suma yra 8, o tai reiškia, kad keturgubo kopimo laiko ir leidimosi laiko suma yra 16. Vadinasi, trigubas kopimo laikas yra $16 - 7 = 9$, o pats kopimo laikas yra 3.
Taigi pirmą dieną Sizifas kopė 3 h, antrą – 6 h, trečią – 12 h. Pirmą dieną Sizifas leidosi 4 h, antrą – 2 h, trečią – 1 h. Vadinasi, trečią dieną jis užtruko $12 + 1 = 13$ (h).
Žinoma, tai tos pačios lygtys, tik užrašytos žodžiais.

S7. Ⓓ 2^{18}

? Spėti čia tikrai neverta, nors ir aišku, kad atsakymas mažesnis už 2^{19} (t. y. E netinka).

! Ketvirtadalis atstumo yra $2^{20} : 4 = 2^{20} : 2^2 = 2^{18}$ (km). Vadinasi, be ryšio erdvėlaivis skrido $2^{19} - 2^{18} = 2 \cdot 2^{18} - 2^{18} = 2^{18}$ (km).
Teisingas atsakymas D.

S8. Ⓒ 37

? Paspėliokime. Esame girdėję, kad dviejų daugiklių suma mažiausia, kai jie lygūs. Ieškokime apylygių skaičiaus 300 daliklių. Kadangi $17^2 < 300 < 18^2$, tai vienas iš jų bus didesnis už 18, todėl imame 20. Bet 20 ir 15 turi bendrą daliklį 5. Imame 25. Tada 25 ir 12 bendrų daliklių nebeturi, o jų suma lygi 37.
Renkamės atsakymą C.

! Reikia nustatyti mažiausią galimą sumos $x + y$ reikšmę, kai $xy = 300$, x ir y natūralieji ir neturi bendrų daliklių. Kadangi $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 4 \cdot 25$, tai gali būti:

x	1	3	4	12	75	100	300
y	300	100	75	25	4	3	1
$x + y$	301	103	79	37	79	103	301

Vadinasi, mažiausia galima sumos $x + y$ reikšmė yra 37.
Teisingas atsakymas C.

S9. Ⓑ 495

? Kadangi $\overline{xyz} - \overline{zyx} = \overline{x0z} - \overline{z0x}$ ir $x > z$, tai skirtumo priešpaskutinis skaitmuo 9.
Renkamės atsakymą B.

! Reikia įsitikinti, kad yra toks skaičius $\overline{xyz}$, kad $\overline{xyz} - \overline{zyx} = 495$, t. y. $\overline{x0z} - \overline{z0x} = 495$, $\overline{z0x} + 495 = \overline{x0z}$. Imkime, pavyzdžiui, $x = 7$. Tada $z = 2$. Dabar galime y imti tiesiog nulį. Iš tikrųjų, $702 - 207 = 495$.
Vadinasi, atsakymas B teisingas.

!! Išspręskime uždavinį, kai atsakymai nenurodyti. Turime $\overline{xyz} - \overline{zyx} = 100x + 10y + z - 100z - 10y - x = 99x - 99z = 99(x - z)$. Kadangi šis skaičius turi būti triženklis ir turi prasidėti 4, tai $x - z = 5$. Bet tada $99 \cdot 5 = 495$.
Vadinasi, teisingas tik atsakymas 495. Beje, skaitmenys x, y, z gali būti bet kokie, tik turi tenkinti sąlygą $x - z = 5$, t. y. gali būti $x = 9$, $z = 4$; $x = 8$, $z = 3$; $x = 7$, $z = 2$; $x = 6$, $z = 1$ (atvejis $x = 5$, $z = 0$ kelia šiek tiek abejonių, nes pats užrašas $\overline{zyx}$ paprastai reiškia, kad $z \neq 0$). Kitaip sakant, kaip $\overline{xyz}$ tinka skaičiai $\overline{9y4}$, $\overline{8y3}$, $\overline{7y2}$, $\overline{6y1}$ (o gal ir $\overline{5y0}$), kur y – bet kuris skaitmuo.

Pastaba. Šis uždavinys – geras pavyzdys, kai skaičiuoti (konkurse) neverta: tikimės, kad teisingas atsakymas nebus C, o tada atspėjame B.

S10. Ⓒ 5

? Kadangi suma lygi $45a$, tai suma gali baigtis tik 0 arba 5. Bet visi skaitmenys negali būti lygūs 0, todėl tai 5.
Renkamės atsakymą C.

! Kadangi $a + 2a + \cdots + 9a = 45a$, tai gauname lygybę

$$45 \cdot a = \overline{bb\ldots b}.$$

Kairė pusė dalijasi iš 5, todėl ir dešinė dalijasi iš 5. Kadangi $b = 0$ netinka (tada $a = 0$ ir nėra natūralus), tai skaitmuo $b = 5$. Bet tai dar nereiškia, kad atsakymas C teisingas – o gal tokio a iš viso nėra, ir tada teisingas atsakymas E). Nurodysime tinkamą a. Kadangi $45a = 55\ldots5$, tai $9a = 11\ldots1$, ir užtenka imti 9 vienetukus. Taigi su

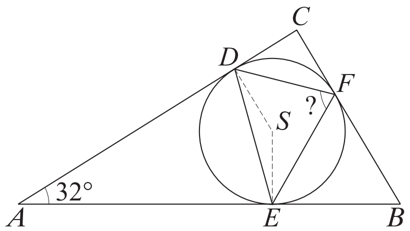
$$a = \underbrace{11\ldots1}_{9} : 9 = 12345679$$

suma tikrai bus iš vienų penketukų.
Teisingas atsakymas C.

!! Raskime visus tokius skaičius a.
Jei $45a = 55\ldots5$, tai $9a = 11\ldots1$. Vadinasi, skaičius $11\ldots1$ turi dalytis iš 9, o tai reiškia, kad jo vienetukų skaičius turi dalytis iš 9. Vadinasi, tinka $a = 111\,111\,111 : 9 = 12345679$ ir visi skaičiai $12345679\,12345679\ldots12345679$.
Skaičių $\underbrace{11\ldots1}_{9k}$ galima užrašyti kaip $\underbrace{99\ldots9}_{9k} : 9 = (1\underbrace{00\ldots0}_{9k}-1) : 9 = (10^{9k} - 1) : 9$, o skaičių a – kaip $(10^{9k} - 1) : 81$.
Vadinasi, kai $a = (10^{9k} - 1)/81\,(k \in \boldsymbol{N})$, tai mūsų suma bus lygi $45a = 5(10^{9k} - 1)/9 = 5 \cdot (\underbrace{99\ldots9}_{9k} : 9) = 5 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{9k} = \underbrace{55\ldots5}_{9k}$ ir tikrai užrašoma vienais penketukais.

S11. Ⓓ 74°

? Iš akies panašu, kad brėžinys gana tikslus (32° kampas ir statieji kampai panašūs į reikiamus). Ieškomasis kampas vizualiai yra tarp 70° ir 80°.
Renkamės atsakymą D.



?? Kadangi atsakymas, matyt, nepriklauso nuo trikampio formos, tai laikykime, kad trikampis ABC lygiašonis, $AC = AB$. Tada $\angle C = \angle B = (180^\circ - 32^\circ) : 2 = 74^\circ$. Bet $CD = CF$, todėl $\triangle DCF$ lygiašonis, ir $\angle CFD = \frac{1}{2}(180^\circ - 74^\circ) = 53^\circ$. Analogiškai $\angle BFE = 53^\circ$, ir $\angle DFE = 180^\circ - 2 \cdot 53^\circ = 74^\circ$.
Renkamės atsakymą D.

! Kadangi S apskritimo centras, tai $\angle SDA = \angle SEA = 90^\circ$ (spindulys statmenas liestinei). Todėl iš keturkampio $ADSE$ $\angle DSE = 180^\circ - 32^\circ = 148^\circ$. Todėl kairysis lankas $\smile DE = 148^\circ$, o į jį besiremiantis $\angle DFE = 148^\circ : 2 = 74^\circ$.
Teisingas atsakymas D.

S12. (D) 3000

? Kadangi atsakymai išrikiuoti, tai pradėkime nuo vidurinio.
Sakykime, kad Marius turi 2400 litų, tada penktadaliu didesnės santaupos būtų 2880 litų. Tada jam trūktų 2320 litų, o dabar trūksta 3000 litų. Ketvirtadalį atmetus iš 3000 litų, gauname 2250 litų.
Panašu, kad reikia bandyti didesnį atsakymą. Sakykime, kad jis turi 3000 litų, tada penktadaliu didesnės santaupos būtų 3600 litų. Tada jam trūktų 1800 litų, o dabar trūksta 2400 litų. Atmetus ketvirtadalį iš 2400 litų, kaip tik gausime 1800 litų.
Renkamės atsakymą D.

! Sakykime, kad Marius turi sutaupęs x litų, tada penktadaliu didesnės santaupos būtų $x+x/5 = 6x/5$ litų. Tada jam trūktų $5400 - 6x/5$, o dabar jam trūksta $5400 - x$. Pagal sąlygą pirmas skaičius sudaro 3/4 pastarojo:

$$5400 - 6x/5 = 3(5400 - x)/4, \quad 5400 \cdot 20 - 24x = 15 \cdot 5400 - 15x,$$
$$9x = 5 \cdot 5400, \quad x = 5 \cdot 600 = 3000.$$

Kaip visada žodiniuose uždaviniuose, atsakymą reikia patikrinti. Bet tai jau atlikta, spėjant atsakymą 3000.
Vadinasi, teisingas atsakymas D.

S13. (B) 15

? Kadangi atsakymai išrikiuoti, pradedame nuo vidurio. Suskaičiuokime, kiek įstrižainių turi 17-kampis.
Viršūnes sunumeruokime skaičiais nuo 1 iki 17 ir surašykime visas įstrižaines, žymėdami jas dviem viršūnių numeriais, rašydami iš pradžių įstrižaines, einančias iš pirmos viršūnės, po to įstrižaines, einančias iš antros viršūnės, po to iš trečios, ir t.t., nebeimdami jau užrašytų įstrižainių:

1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	...	1,15	1,16	
	2,4	2,5	2,6	2,7	...	2,15	2,16	2,17
		3,5	3,6	3,7	...	3,15	3,16	3,17
			4,6	4,7	...	4,15	4,16	4,17
				5,7	...	5,15	5,16	5,17
					...	...	...	...
						13,15	13,16	13,17
							14,16	14,17
								15,17

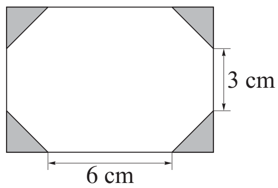
Paskutinėje eilutėje užrašyta 1 įstrižainė, priešpaskutinėje – 2, . . ., trečioje – 13 įstrižainių, antroje – 14 įstrižainių, pirmoje – taip pat 14 įstrižainių. Iš viso turime $(1+2+\cdots+14)+14 = 14\cdot 15/2+14 = 7 \cdot 15 + 7 \cdot 2 = 7 \cdot 17 = 119$ įstrižainių, o tai yra daugiau už $6 \cdot 17 = 102$ įstrižaines.
Bandykime atsakymą 15. Kad būtų įdomiau, suskaičiuokime įstrižainių skaičių kitu būdu. Iš kiekvienos viršūnės išeina $15 - 3 = 12$ įstrižainių (reikia atmesti pačią viršūnę ir dvi gretimas). Kadangi viršūnių yra 15, tai iš viso gautume $15 \cdot 12$ įstrižainių. Bet taip skaičiuodami kiekvieną įstrižainę įskaitome du kartus – iš vieno galo ir iš kito. Vadinasi, iš tikrųjų jų yra 2 kartus mažiau, t. y. $15 \cdot 6 = 90$. Matome, kad tai kaip tik 6 kartus daugiau negu viršūnių skaičius.
Renkamės atsakymą B.

! Žinoma, paprasčiausia sudaryti lygtį. Jeigu viršūnių skaičius n, tai iš kiekvienos viršūnės išeina $n-3$ įstrižainės, ir iš viso gautume $n(n-3)$ įstrižainių. Bet į šį skaičių kiekviena įstrižainė įskaityta 2 kartus, todėl iš tikrųjų įstrižainių yra $n(n-3)/2$. Pagal sąlygą

$$n(n-3)/2 = 6n, \quad n - 3 = 12, \quad n = 15.$$

Vadinasi, vienintelis teisingas atsakymas yra B.

S14. Ⓒ 8



? Sprendžiant pagal brėžinį, trikampio statinis kiek mažesnis kaip 3 cm. Spėjame, kad jis lygus 2 cm, tada keturių trikampių plotas lygus dvigubam kvadrato 2 cm × 2 cm plotui, t. y. 8 cm^2.
Renkamės atsakymą C.

?? Kadangi atsakymai surikiuoti, tikrinkime nuo vidurio. Sakykime, kad nukirpta 8 cm^2, tada vieno trikampio plotas 2 cm^2. Tai pusė kvadrato 2 cm × 2 cm ploto, taigi trikampio statinis lygus 2 cm. Tada stačiakampio plotas $(6+4)(3+4) = 70$ (cm^2), o servetėlės plotas $70-8 = 62$ (cm^2) ir sąlyga išpildyta.
Renkamės atsakymą C.

! Pažymėkime nukirpto trikampio statinio ilgį x. Tada du trikampiai sudaro kvadratėlį su kraštine x, taigi visų keturių trikampių plotas yra $2x^2$. Viso gabalo plotas buvo $(6+2x)(3+2x)$, o nukirpus tapo 62 cm^2. Pagal sąlygą

$$(6+2x)(3+2x) - 2x^2 = 62,$$
$$18 + 9 \cdot 2x + 2x^2 = 62,$$
$$x^2 + 9x - 22 = 0.$$

Šios lygties sprendiniai -11 ir 2, todėl $x = 2$. Vadinasi, nukirpta $2x^2 = 8$ (cm^2).
Teisingas atsakymas C.

S15. Ⓒ 499

? Atsakymai išrikiuoti, ir galima spėti nuo vidurio. Tikriname atsakymą 499, t. y. tikriname lygybę

$$2^{1994} + 4^{997} + 8^{665} = 16^{499},$$
$$2^{1994} + 2^{2\cdot 997} + 2^{3\cdot 665} = 2^{4\cdot 499},$$
$$2^{1994} + 2^{1994} + 2^{1995} = 2^{1996}.$$

Dalijame lygybę iš 2^{1994}:

$$1 + 1 + 2 = 2^2.$$

Ši lygybė teisinga, tai, matyt, teisinga ir pradinė lygybė.
Renkamės atsakymą C.

! Kadangi

$$2^{1994}+4^{997}+8^{665} = 2^{1994}+2^{2\cdot 997}+2^{3\cdot 665} = 2\cdot 2^{1994}+2^{1995} = 2^{1995}+2^{1995} = 2\cdot 2^{1995} = 2^{1996},$$

tai $2^{1996} = 2^{4x}$, $\quad 4x = 1996$, $\quad x = 499$.
Teisingas atsakymas C.

Beje, iš sprendimo matome, kad spėti visiškai neverta.

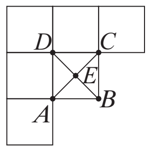
S16. Ⓑ 5^6

? Surašykime atsakymus taip: 5^3, 25^3, 10^3, $10^3 \cdot \frac{10}{3}$, $10^3 \cdot \frac{10^3}{6}$. Vargu ar gali atsakyme atsirasti vardiklyje trejetų, todėl spėsime iš pirmų trijų atsakymų. Pradėkime nuo vidurinio iš jų pagal didumą – tai 10^3. Jei bakterijų liko 100, tai po 40 h jų buvo $2 \cdot 10^3$, po 32 h – $2^2 \cdot 10^3$, po 24 h – $2^3 \cdot 10^3$, po 16 h – $2^4 \cdot 10^3$, po 8 h – $2^5 \cdot 10^3$. Baigiantis 8-tai valandai, dar prieš antrą dozę, jų buvo $2^6 \cdot 10^3$. Kadangi tai mažiau už 10^6, tikriname didesnį atsakymą 5^6. Tada atitinkamai gausime bakterijų kiekius 5^6, $2 \cdot 5^6$, $2^2 \cdot 5^6$, $2^3 \cdot 5^6$, $2^4 \cdot 5^6$, $2^5 \cdot 5^6$, $2^6 \cdot 5^6$. Matome, kad tai ir yra 10^6. Renkamės atsakymą B.

! Pirma dozė sustabdė bakterijų dauginimąsi, vadinasi, kaip galima suprasti iš sąlygos,
po 8 h bakterijų buvo $10^6 : 2$,
po 16 h $10^6 : 2^2$,
po 24 h $10^6 : 2^3$,
po 32 h $10^6 : 2^4$,
po 40 h $10^6 : 2^5$,
po 48 h $10^6 : 2^6$.
Taigi po 48 h bakterijų buvo 5^6. Teisingas atsakymas B.
Matome, kad spėti blogiau negu spręsti: vienur skaičiuojame nuo galo, kitur nuo pradžios, tik spėjant skaičiuoti tenka kelis kartus.

!! Iš sąlygos nelabai aišku, kada pradeda (ar baigia) žūti bakterijos po pirmos dozės. Prisieina laikyti, kad jos žūsta iš karto.
Jeigu laikytume, kad bakterijos žūsta palaipsniui, tai tada po 8 h dar veiktų tik pirma dozė, ir bakterijų būtų 10^6. Atitinkamai po 48 h būtų $10^6 : 2^5 = 10 \cdot 10^5 : 2^5 = 10 \cdot 5^5$. Bet tokio atsakymo nėra, ir tai argumentas pirmykščio sąlygos traktavimo naudai.
Beje, bakterijų skaičių galima rasti ir pagal geometrinės progresijos bendrojo nario formulę, bet tai joks palengvinimas.

S17. D *D*



? Tikriname atsakymus. Netinka taškas A, nes atlikus simetriją prisidės jau bent trys viršutiniai langeliai (panašiai bus su tašku C). Netinka taškas B, nes prisidės visi nauji langeliai, simetriški seniesiems. Netinka taškas E, nes prisidės 3 nauji langeliai, simetriški kampiniam ir gretimiems.
Renkamės atsakymą D.

! Liko įsitikinti, kad atlikus simetriją su centru taške D, prisidės 2 cm^2. Iš tikrųjų, langelis su raide E pereis į langelį su raide D ir atvirkščiai. Vienas langelis be raidės pereis į kitą langelį be raidės, ir atvirkščiai. O štai langelis su raide A pereis į naują langelį virš langelio tarp raidžių C ir D, o langelis C – į langelį kairiau langelio tarp raidžių D ir A.
Vadinasi, prisidės lygiai 2 langeliai, t. y. 2 cm^2.
Teisingas atsakymas D.

S18. A 1

? Čia spėti visai sunku. Žinoma, nesunku sugalvoti 3 dėmenis; jų vidurkis 149, todėl $147+149+151 = 447$. Čia gali ateiti į galvą, kad jei vidurkis 3, o dėmenų – 149, tai irgi viskas bus gerai. Tada jau nebesunku suvokti, kad tiks ir vidurkis 1, o dėmenų skaičius – 447. Sukeisti juos vietomis nebepavyksta – dėmuo negali būti vienas, juo labiau, kad kalbama apie paeiliui einančius dėmenis.
Renkamės atsakymą C.

! Kadangi nelyginių dėmenų suma 447 nelyginė, tai dėmenų skaičius nelyginis. Dėmenų skaičių pažymėkime $2k + 1$, vidurinį iš nelyginių dėmenų – x, tada kiti dėmenys bus $x \pm 2$, $x \pm 4$, …, $x \pm 2k$. Pagal sąlygą jų suma lygi

$$x + (x + 2 + x - 2) + (x + 4 + x - 4) + \ldots + (x + 2k + x - 2k) = 447,$$
$$(2k + 1)x = 3 \cdot 149.$$

Matome, kad dėmenų skaičius $2k+1$ yra dešinės pusės daliklis, o kadangi 149 yra pirminis skaičius, tai $2k + 1$ gali būti 1, 3, 149, 447.

Jeigu būtų galima imti vieną dėmenį (t. y. laikyti, kad vienas dėmuo ir yra paeiliui einančių dėmenų suma) tada būtų $k = 0$, $x = 447$.
Jeigu dėmenys trys, t. y. $2k + 1 = 3$, tai $x = 149$, ir gauname $147 + 149 + 151 = 447$.
Jeigu dėmenų 149, tai gauname $x = 3$, o dėmenys yra $3 - 2 \cdot 74$, $3 - 2 \cdot 73$, …, $3 - 2 \cdot 1$, 3, $3 + 2 \cdot 1$, …, $3 + 2 \cdot 74$.
Pagaliau, jeigu dėmenų 447, tai $x = 1$, ir dėmenys $1 - 2 \cdot 223$, $1 - 2 \cdot 222$, …, $1 - 2 \cdot 1$, 1, $1 + 2 \cdot 1$, …, $1 + 2 \cdot 223$. Gauname 3 būdus.
Teisingas atsakymas B.

!! Šiaip jau vidurinėje mokykloje nebijoma sumų iš vieno nario. Pavyzdžiui, jeigu kalbama apie reiškinį $1 + 2 + 3 + \cdots + x$, tai laikoma, kad x gali būti ir 4, ir 3, ir 2, ir net 1.

S19. D Sekmadienio 7 val. ryto

? Kadangi atsakymai surikiuoti, tai pradėkime nuo vidurio. Taigi sakykime, kad kai valstybėje A yra šeštadienio 4 val. po vidurdienio, tai valstybėje B yra sekmadienio 6 val. ryto. Tai reiškia, kad laikų skirtumas yra $+18$ valstybėje B. Tada skrydis iš A į B truko antradienį nuo 0 iki 14 val. (laikas valstybės B), o skrydis iš B į A – nuo 1 iki 21 val. po ketvirtadienio vidurdienio – 20 val. Bet skrydis turi trukti tiek pat, – prieštara.
Tikrinkime atsakymą D. Taigi sakykime, kad kai valstybėje A yra šeštadienio 4 val. po vidurdienio, tai valstybėje B yra sekmadienio 7 val. ryto. Tai reiškia, kad laikų skirtumas yra $24 + 7 - 16 = +15$ valstybėje B. Tada skrydis iš A į B (B laiku) truko nuo pirmadienio 21 val. iki antradienio 14 val., t. y. 17 valandų. Skrydis iš B į A (B laiku) truko nuo ketvirtadienio 13 val. iki penktadienio 6 val. ryto, t. y. taip pat 17 valandų.
Renkamės atsakymą D.

! Sakykime, kad kai valstybėje A yra t valandų, tai valstybėje B yra $t + x$. Todėl reisas iš A į B valstybės A atžvilgiu vyksta taip:

išvykimas po 6 val. nuo pirmadienio 0 val. ryto;
atvykimas po $(14 + 24 - x)$ val. nuo pirmadienio 0 val. ryto.

Vadinasi, skrydis trunka $38 - x - 6$ (h).
Reisas iš B į A valstybės B atžvilgiu vyksta taip:

išvykimas po 1 val. nuo ketvirtadienio pietų;
atvykimas po $(3 + x)$ val. nuo ketvirtadienio pietų.

Vadinasi, skrydis trunka $3 + x - 1$ (h).
Kadangi skrydžiai trunka vienodai, tai $32 - x = 2 + x$, $2x = 30$, $x = 15$. Vadinasi, kai valstybėje A yra t valandų, tai valstybėje B yra $t + 15$ valandų. Todėl kai valstybėje A yra šeštadienio 4 val. po vidurdienio, tai valstybėje B yra sekmadienio 7 val. ryto. (Kitaip sakant, valstybė B yra 15 valandų ryčiau.)
Teisingas atsakymas D.

!! Labai patogu skrydį iš A į B perstumti atgal 6 valandomis (laikas valstybės A):

jei išvykimas būtų 0 val.,
tai atvykimas būtų $(8 + 24 - x)$ val.

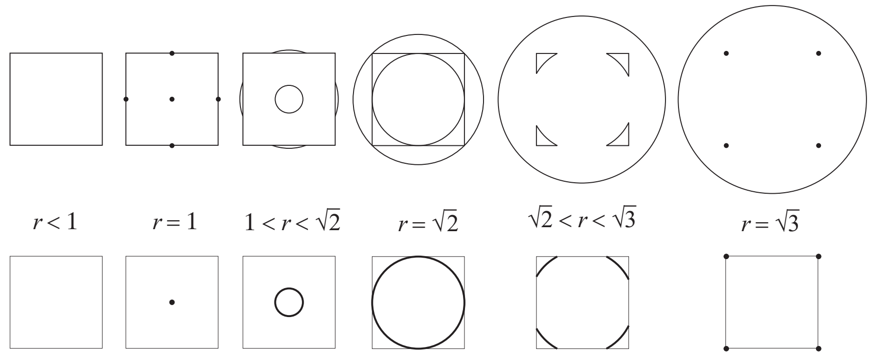
Perstumkime skrydį iš B į A 13 val. atgal:

jei išvykimas iš B būtų 0 val. (valstybės B laiku), tai atvykimas į A būtų $(2 + x)$ val.

Vadinasi, $32 - x = 2 + x$, $2x = 30$, $x = 15$.

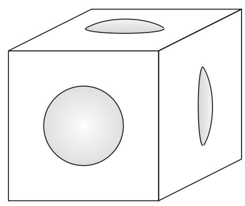
S20. Ⓐ $1 < r \leqslant \sqrt{2}$

Iš simetrijos aišku, kad rutulio paviršius kiekvienoje kubo sienoje turi iškirsti apskritimą. Kai spindulys bus 1 cm, tai rutulys lies sieną tik viename taške. Kai spindulys r bus tarp 1 ir $\sqrt{2}$, tai paviršius iškirs apskritimą. Kai spindulys bus lygus $\sqrt{2}$, taip pat bus iškirstas apskritimas. Pirmoje paveikslėlių eilutėje pateiktas vaizdas iš viršaus.



Renkamės atsakymą A.

Kai $r < 1$, sfera telpa kubo viduje ir bendrų taškų su kubo paviršiumi neturi. Kai $r > \sqrt{3}$, kubas telpa sferos viduje, ir jie bendrų taškų neturi. Atvejus $r = 1$ ir $r = \sqrt{2}$ jau aptarėme. Kai $r = \sqrt{3}$, tai kubo paviršiaus ir sferos bendri taškai bus tik kubo viršūnės. Kai $\sqrt{2} < r < \sqrt{3}$, 6 apskritimų nebus. Kai $1 < r < \sqrt{2}$, gauname 6 apskritimus. Antroje paveikslėlių eilutėje pavaizduota, kaip sfera kerta priekinę sieną. Paveikslėlyje dešinėje matome, kaip kirsdamiesi atrodo kubas ir sfera, kai $1 < r < \sqrt{2}$. Teisingas atsakymas A.



$1<r<\sqrt{2}$

Dar kartą grįžkime prie sąlygos ir įsiskaitykime į žodžius „tada ir tik tada“. Jie reiškia, kad reikia įrodyti du teiginius:
1) Jeigu r tenkina nelygybę $1 < r \leqslant \sqrt{2}$, tai K ir S sankirta yra 6 apskritimai.
2) Jeigu K ir S sankirta yra 6 apskritimai, tai r tenkina nelygybę $1 < r \leqslant \sqrt{2}$.
Pabandykime viską daryti formaliai, neskubėdami, ir pažiūrėkime, ar viskas mūsų buvo įrodyta.
1) Duota, kad $1 < r \leqslant \sqrt{2}$. Nustatykime, kurie kubo pagrindo taškai priklauso sferai. Imkime pagrindo tašką, priklausantį sferai. Spindulio, jungiančio tą tašką su sferos centru, projekciją pažymėkime r'. Kadangi $r^2 = r'^2 + 1$, tai $r' \leqslant 1$, ir taškai, nutolę nuo kubo centro O projekcijos į pagrindą O' atstumu r', yra apskritime su spinduliu r' ir centru O'.
Vadinasi, kubo pagrindo sienoje turime apskritimą, taigi visose 6 sienose turime 6 apskritimus.
2) Atvirkščiai, sakykime, kad K ir S sankirta yra 6 apskritimai. Reikia įrodyti nelygybę $1 < r \leqslant \sqrt{2}$. Tarkime priešingai, kad nelygybė neteisinga – t. y. kad $r \leqslant 1$ arba $r > \sqrt{2}$. Jeigu $r < 1$, tai sferos spindulys mažesnis už atstumą nuo O iki sienos, ir sfera su kubu neturi bendrų taškų, – prieštara. Jeigu $r = 1$, tai tik sienų centrai O' yra bendri sferos ir kubo taškai – viso labo 6 taškai, – prieštara. Pagaliau, jeigu $\sqrt{2} < r < \sqrt{3}$, tai jau matėme, kad kiekvienoje sienoje turime 4 apskritimo lankus, o ne visą apskritimą. Jeigu $r = \sqrt{3}$, tai turime 8 bendrus taškus – kubo viršūnes, o pats kubas yra sferos viduje. Pagaliau, jeigu $r > \sqrt{3}$, tai bendrų taškų K ir S neturi, – prieštara.

Tokį įrodymo būdą paaiškinsime paprastesniu pavyzdžiu. Nagrinėkime teiginį:
Jeigu $c^2 < a^2 + b^2$ (c *– didžiausioji trikampio kraštinė*)*, tai trikampis smailusis,*
jeigu $c^2 = a^2 + b^2$*, tai trikampis statusis,*
jeigu $c^2 > a^2 + b^2$*, tai trikampis bukasis,*
ir atvirkščiai.

Sakykime, kad mes jau įrodėme tiesioginį teiginį (jeigu $c^2 < a^2 + b^2$, tai trikampis smailusis; jeigu $c^2 = a^2 + b^2$, tai trikampis statusis; jeigu $c^2 > a^2 + b^2$ tai trikampis bukasis).
Tada atvirkštiniam teiginiui (jeigu trikampis smailusis, tai $c^2 < a^2 + b^2$; jeigu trikampis statusis, tai $c^2 = a^2 + b^2$; jeigu trikampis bukasis, tai $c^2 > a^2 + b^2$) jokio naujo įrodymo nebereikia.
Iš tikrųjų, įrodykime, pavyzdžiui, teiginį:
jeigu trikampis smailusis, tai $c^2 < a^2 + b^2$.
Tarkime priešingai, kad nelygybė $c^2 < a^2 + b^2$ neteisinga. Tada jeigu $c^2 = a^2 + b^2$, tai pagal tiesioginį teiginį trikampis statusis, – prieštara. O jeigu $c^2 > a^2 + b^2$, tai pagal tiesioginį teiginį trikampis bukasis, – prieštara.
Teiginys (jeigu trikampis smailusis, tai $c^2 < a^2 + b^2$) įrodytas.

S21. Ⓓ 2161

? Kadangi atsakymai išrikiuoti, tai pradėkime nuo vidurio. Jeigu marsiečių būtų 2160, tai jų neužtektų: pavyzdžiui, jeigu kiekvienos rūšies jų būtų po 10, o rūšių yra $3 \cdot 4 \cdot 18 = 216$, tai nei vienos rūšies nebūtų vienuolikės. O štai pridėjus dar vieną marsietį, panašu, kad užtekti turėtų.
Renkamės atsakymą D.

! Pagal spalvą yra 3 marsiečių rūšys, pagal rankų skaičių – 4 rūšys, pagal antenų skaičių – 18 rūšių. Remiantis kombinatorikos daugybos taisykle yra $3 \cdot 4 \cdot 18$ marsiečių rūšių. Jeigu kiekvienos rūšies marsiečių būtų lygiai 10, tai jų iš viso būtų $3 \cdot 4 \cdot 18 \cdot 10$, bet 11 vienos rūšies dar neatsirastų. O štai jeigu marsiečių būtų $3 \cdot 4 \cdot 18 \cdot 10 + 1$, tada 11 vienos rūšies marsiečių tikrai atsiras. (Tarkime priešingai, kad 11 vienos rūšies marsiečių neatsiras, tada jų yra $\leqslant 10$ pirmos rūšies, $\leqslant 10$ antros rūšies, ..., $\leqslant 10$ marsiečių $3 \cdot 4 \cdot 18$-tos rūšies. Iš viso jų būtų $\leqslant 10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 18$, – prieštara.)
Vadinasi, kad iš marsiečių tikrai būtų galima sudaryti futbolo komandą, jų turi būti mažiausiai $3 \cdot 4 \cdot 18 \cdot 10 + 1 = 12 \cdot 18 \cdot 10 + 1 = (15^2 - 3^2) \cdot 10 + 1 = (225 - 9) \cdot 10 + 1 = 2161$.
Teisingas atsakymas D.

S22. Ⓑ $\{4, 5, 6\}$

? Atsakymai išrikiuoti, todėl verta tikrinti nuo vidurio. Aišku, kad kairė pusė didėja, kai n didėja. Imkime $n = 7$. Tada kairė pusė lygi

$$[(2^{2^7} + 1)(2^{2^7} - 1) + 1]^{1/4} = [(2^{2^7})^2 - 1 + 1]^{1/4} = (2^{2^7})^{1/2} = 2^{2^6} = 2^{64},$$

ir gauname per daug (nes $256 = 2^8$). Vadinasi, atsakymai C, D ir E atkrinta.
Imkime $n = 3$. Tada kairė pusė lygi $(2^{2^3})6^{1/2} = 2^{2^2} = 2^4 = 16$, – per mažai. Vadinasi, atkrinta ir atsakymas A. Renkamės atsakymą B.

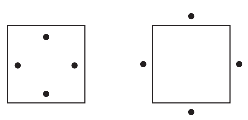
! Išspręskime duotąją lygtį:

$$[(2^{2^n})^2 - 1 + 1]^{1/4} = 256, \quad (2^{2^n})^2 = 256^4, \quad 2^{2^n} = 16^4, \quad 2^{2^n} = 2^{16}, \quad 2^n = 16, \quad n = 4.$$

Teisingas atsakymas B.

Vėl matome, kad spręsti paprasčiau, negu spėti.

S23. Ⓓ 8

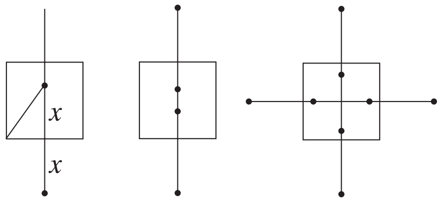


? Nesunku nurodyti 4 taškus kvadrato viduje ir 4 taškus kvadrato išorėje. Panašu, kad daugiau taškų nėra. Renkamės atsakymą D.

! Iš pradžių imkime dvi viršutines kvadrato viršūnes. Taškai, vienodai nutolę nuo jų, yra vidurio statmenyje.
Jeigu taškas per 1 nutolęs nuo kairiosios apatinės kvadrato viršūnės, tai

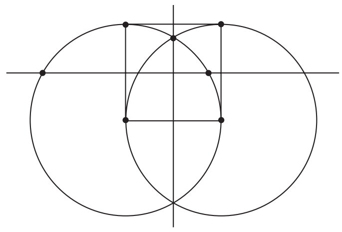
$$x = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ (\approx 0{,}86).$$

Gauname du tokius taškus. Tuos pačius taškus gauname, jeigu taškas nutolęs per 1 nuo dešiniosios apatinės viršūnės. Vadinasi, viršutinių viršūnių pora duoda 2 taškus.
Jeigu imsime apatinę viršūnių porą, tai gausime dar 2 taškus:
Analogiškai imdami kitas dvi taškų poras gausime dar 4 taškus.



Taigi teisingas atsakymas D.

!! Galima pasiimti kurią nors viršūnę (pavyzdžiui, kairiąją apatinę), nubrėžti spindulio 1 apskritimą su centru tame taške ir nustatyti, kurie apskritimo taškai vienodai nutolę nuo dviejų kitų viršūnių, t. y. nustatyti, kuriuose taškuose apskritimas kerta vidurio statmenis.
Gauname 4 taškus. Apėję visas 4 viršūnes, gauname 8 taškus (kiekvienas taškas priklauso dviem apskritimams).



Nesunku visa tai užrašyti lygtimis. Sakykime, kad vienetinio kvadrato viršūnės yra taškuose $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$. Keturių apskritimų lygtys yra $(x \pm \frac{1}{2})^2 + (y \pm \frac{1}{2})^2 = 1$. Jų susikirtimo taškus su y ašimi ($x = 0$) rasti nesunku, tai $(0, \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$, o susikirtimo taškai su x ašimi ($y = 0$) yra $(\pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$.

S24. (D) 30

? Spėti sunku. Užtenka surinkti vieną komandą. kurioje žaidžia Matas ir Karolis. Jei papildomos sąlygos nebūtų, tai būtų galima padaryti $C_8^3 = \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 8 \cdot 7 = 56$ būdais. Galima tikėtis, kad su papildoma sąlyga būdų būtų maždaug dvigubai mažiau, t. y. 28.
Renkamės atsakymą D.

! Tą komandą, kurioje žais Matas ir Karolis, pavadinkime pirmąja. Joje dar žais arba Viktoras, arba Andrius.
Sakykime, kad joje dar žais Viktoras, tada Andrius žais antroje komandoje. Pirmoje komandoje dar liko 2 vietos, ir jas užpildyti galima paėmus iš 6 neminėtų berniukų 2 (tai padarius, likusieji 4 berniukai automatiškai atsidurs antroje komandoje). Pasirinkti 2 berniukus iš 6 galima 15 būdų: jeigu berniukus sunumeruotume nuo 1 iki 6, tai būdai būtų tokie:

12	13	14	15	16
	23	24	25	26
		34	35	36
			45	46
				56

Vadinasi, surinkti pirmą komandą, kai joje žaidžia Viktoras, galima 15 būdų. Dar tiek pat būdų bus, kai pirmoje komandoje žais Andrius. Todėl iš viso yra 30 būdų, teisingas atsakymas D.

!! Trumpai skaičiavimą galima užrašyti taip: yra $2 \cdot C_6^2 = 30$ būdų.

S25. D 4

? Reikiami natūralieji skaičiai yra $91 = 7 \cdot 13$ kartotiniai. Nagrinėkime $1 \cdot 91$, $2 \cdot 91$, $3 \cdot 91$, $4 \cdot 91$, $5 \cdot 91$, $6 \cdot 91$, $7 \cdot 91$, $8 \cdot 91$, $9 \cdot 91$, $10 \cdot 91$, $11 \cdot 91$, $12 \cdot 91$, $13 \cdot 91$, ... Nesunku įsitikinti, kad 2-as, 3-as, 5-tas ir 7-tas skaičiai tinka, o kiti parašyti – netinka. Spėjame, kad daugiau tinkamų skaičių nebus.
Renkamės atsakymą D.

! Jeigu natūraliojo skaičiaus daliklis yra 91, tai tas skaičius yra pavidalo $k \cdot 91 = k \cdot 7 \cdot 13$. Aišku, kad k turi būti pirminis: jei k nėra pirminis, tai $k = d_1 d_2$, kur tiek $d_1 > 1$, tiek $d_2 > 1$. Bet tada dalikliai $d_1 \cdot 91$ ir $d_1 \cdot d_2 \cdot 91$ būtų nelygūs ir abu būtų didesni už 91, o tada 91 nebūtų antras pagal didumą daliklis.
Be to, $k \leqslant 7$. Iš tikrųjų, jei $k \geqslant 11$, tai dalikliai $k \cdot 13$ ir $k \cdot 7 \cdot 13$ nelygūs ir abu būtų didesni už $7 \cdot 13$.
O štai pirminiai 2, 3, 5, 7 tinka. Iš tikrųjų, jei k lygus 2, 3 arba 5, tai skaičius $k \cdot 7 \cdot 13$ turi 8 daliklius 1, k, 7, 13, $7k$, $13k$, $7 \cdot 13$, $k \cdot 7 \cdot 13$ ir 91 yra antras pagal didumą. O jeigu $k = 7$, tai skaičius $7 \cdot 7 \cdot 13$ turi 6 daliklius

$$1,\ 7,\ 13,\ 7 \cdot 7,\ 7 \cdot 13,\ 7 \cdot 7 \cdot 13,$$

ir vėl $7 \cdot 13$ yra antras pagal didumą.
Vadinasi, yra 4 skaičiai, kurių antras pagal didumą daliklis yra 91:

$$2 \cdot 7 \cdot 13 = 182, \quad 3 \cdot 7 \cdot 13 = 273, \quad 5 \cdot 7 \cdot 13 = 455, \quad 7 \cdot 7 \cdot 13 = 637.$$

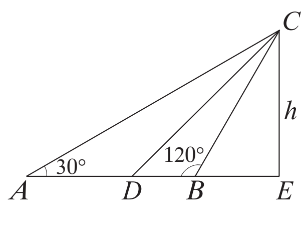
Teisingas atsakymas D.

S26. C $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

? Apytiksliai atsakymai yra 0,7; 0,6; 0,8; 0,9; 0,5. Iš akies matyti, kad reikia rinktis iš atsakymų C ir D. Panašesnis atsakymas C.
Renkamės atsakymą C.

! Kadangi $\angle ACB = 180° - 120° - 30°$, tai $\angle DCB = 15°$, o $\angle CDB = 180° - 120° - 15° = 45°$. Remiantis sinusų teorema, $BC : CD = \sin 45° : \sin 120° = \sin 45° : \sin 60° = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.
Teisingas atsakymas C.

!! Nubrėžiame statmenį $CE = h$ į AB. Iš stačiųjų trikampių $CD^2 = CE^2 + DE^2 = h^2 + h^2 = 2h^2$, $BC^2 = BE^2 + EC^2$, $BC^2 = BC^2/4 + h^2$, $4BC^2 = BC^2 + 4h^2$, $3BC^2 = 4h^2$, $BC^2 = 4h^2/3$. Todėl $BC^2/CD^2 = (4h^2/3) : (2h^2) = 2/3$.



S27. E 1007

? Atsakymai reiškia, kad Jonukas gavo vieną iš rezultatų: 11448, 9540, 8639, 5724, 4823.
Atsakymas A netinka, nes dviejų dviženklių skaičių sandauga mažesnė už $10^2 \cdot 10^2 = 10^4 < 11448$.
Skaičių 9540 išskaidyti lengva: $9540 = 2 \cdot 5 \cdot 954 = 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 106 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 53$. Kadangi 53 pirminis, o jo kartotiniai ne dviženkliai, tai ir šios sandaugos negali būti dviejų dviženklių sandauga: $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$, – netinka ir atsakymas B.

Sunku išskaidyti skaičių 4823 ar 8639. Bet jų skirtumas 3816 taip pat dalijasi iš ieškomo dviženklio, o $3816 = 9 \cdot 424 = 9 \cdot 4 \cdot 106 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 53$. Šį skaičių išskaidyti dviženklio ir ne daugiau kaip dviženklio sandauga galima: $72 \cdot 53$. Tenka grįžti prie 8639, ir kyla įtarimas, kad jis gali turėti daugiklį 53 (juk visi 3 skaičiai turi tą patį dviženklį daugiklį). Iš tikrųjų, $8639 : 53 = 163$, ir skaičiaus 8639 išskaidyti į dviženklių sandaugą nepavyksta. Atsakymas C netinka.
Skaičių 5724 išskaidyti lengva: $5724 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 53$, bet jo išskaidyti 5 dviženklių sandauga nepavyksta. Atsakymas D netinka.
Skaičių 4823 išskaidyti vėl sunkoka, bet ir vėl mus gelbsti 53, nes $4823 : 53 = 91$. Kadangi „apsukus“ 91 gauname 19, o $19 \cdot 53 = 1007$, tai atsakymas E tinka – Jonukas daugino $19 \cdot 53$ ir turėjo gauti 1007, bet apsirikęs jis sudaugino 91 ir 53, ir gavo 4823 – rezultatą, 3816 didesnį negu turėjo gauti.
Renkamės atsakymą E.

?? Kadangi visi trys skaičiai – klaidingas rezultatas, teisingas rezultatas ir jų skirtumas turi bendrą dviženklį daugiklį, tai išskaidyti juos padeda Euklido algoritmas. Raskime DBD(8639, 4823). Jis lygus $\mathrm{DBD}(8639 - 4823, 4823) = \mathrm{DBD}(3816, 4823) = \mathrm{DBD}(1007, 3816) = \mathrm{DBD}(1007, 795) = \mathrm{DBD}(212, 795) + \mathrm{DBD}(212, 159) = \mathrm{DBD}(53, 159) = 53$.
Taigi visi nagrinėjami skaičiai dalijasi iš 53. Toliau sprendžiame kaip anksčiau.

! Sakykime, kad skaičiai buvo $x = \overline{ab}$ ir $\overline{cd}$, o sukeisti buvo antro skaičiaus skaitmenys. Tada

$$(\overline{dc} - \overline{cd})x = 3816,$$
$$(10d + c - 10c - d)x = 9 \cdot 424,$$
$$(d - c)x = 424 = 2^3 \cdot 53.$$

Kadangi 53 pirminis, o $d - c \leqslant 9$, tai x dalijasi iš 53. Bet x dviženklis, todėl $x = 53$, $d - c = 8$. Vadinasi, yra tik 2 galimybės: $d = 9$, $c = 1$ arba $d = 8$, $c = 0$. Bet pagal sąlygą $\overline{cd}$ dviženklis, $c \neq 0$, todėl tinka tik pradiniai skaičiai 53 ir 19.
Vadinasi, teisingas rezultatas turėjo būti $53 \cdot 19 = 1007$. Teisingas atsakymas E.

Ir šiame uždavinyje, ko gero, lengviau spręsti, o ne spėlioti.

S28. D 184 320

? Pirmųjų devynių sandaugų suma lygi $1 + 2 + \cdots + 9 = 45$. Jeigu sudėsime bet kurių 9 iš eilės einančių skaičių

$$\ldots 1 \quad \ldots 2 \quad \ldots 3 \quad \ldots \quad \ldots 9$$

skaitmenų sandaugas, tai visur gausime neparašytų pirmųjų skaitmenų sandaugą, padaugintą atitinkamai iš 1, 2, ..., 9. Jas sudėję, gausime minėtą sandaugą, padaugintą iš 45. Kadangi į skaičius, kurie turi skaitmenį 0, galime nekreipti dėmesio, tai ir visą ieškomąją sumą S_{2000} galime suskaidyti į minėto pavidalo devynetukus. Todėl S_{2000} dalijasi iš 45. Skaičiai A, B, C nesidalija iš 9, todėl jie tikrai netinka.
Skaičius E lyg tai „per apvalus“.
Renkamės atsakymą D.

! Vėl nekreipiame dėmesio į skaičius su nuliais. Pasižiūrėkime, kaip kinta devynetukų sumos:

nuo 1 iki 9 sandaugų suma – 45;
nuo 11 iki 19 tiek pat – 45;
nuo 21 iki 29 dukart tiek – $2 \cdot 45$;
nuo 31 iki 39 3-kart tiek – $3 \cdot 45$;
....
nuo 91 iki 99 9-kart tiek – $45 \cdot 45$.

Vadinasi, nuo 11 iki 99 suma lygi $45 \cdot 45$.

Nuo 111 iki 199 suma ta pati – 45^2;
nuo 211 iki 299 suma dviguba – $2 \cdot 45^2$;
. . . .
nuo 911 iki 999 suma 9-guba – $9 \cdot 45^2$.
Vadinasi, nuo 111 iki 999 suma lygi $45 \cdot 45^2$.
Nuo 1111 iki 1999 suma bus tokia pat.
Iš viso gauname:

$$45+45^2+2\cdot45^3 = 45\cdot46+2\cdot45^3 = 90(23+2025) = 90\cdot2048 = 204800-20480 = 184320.$$

Teisingas atsakymas D.

S29. (B) 3

? Imkime 2 svarstelius ir suvokime, kiek daugiausiai masių galima pasverti. Jeigu imsime svarstelį 1, tai kitą neverta imti 2 (atsvertume tik 3 mases), o 3 imti gerai: sveriame mases 1, $2 = 3 - 1$, 3, $3 + 1$. Tada jau beveik aišku, kad trečią svarstelį verta imti $3 \cdot 3 = 9$. Ir iš tikrųjų, nesunku įsitikinti, kad pasveriame visas mases. Panašu, kad 2 svarstelių neužtenka, taigi atsakymas matyt bus 3.
Renkamės atsakymą B.

! Sakykime, kad turime 2 svarstelius, kurių masės lygios m ir n. Tada mes galime atsverti mases m, n, $m + n$ ir $m - n$. Net jei visi šie skaičiai skirtingi, tai galima pasverti tik 4 skirtingas mases. Vadinasi, pasverti 10 masių reikia bent 3 svarstelių. O štai 3 svarstelių gana: imkime svarstelius 1, 3 ir 9. Tada

$$2 = 3 - 1, \quad 4 = 3 + 1, \quad 5 = 9 - 3 - 1,$$
$$6 = 9 - 3, \quad 7 = 9 - 3 + 1, \quad 8 = 9 - 1, \quad 10 = 9 + 1,$$

ir visas mases nuo 1 iki 10 pasverti galima (žinoma, galima dar pasverti mases $11 = 9 + 3 - 1$, $12 = 9 + 3$ ir $13 = 9 + 3 + 1$, bet jų mums nebereikia).
Vadinasi, teisingas atsakymas B.

S30. (D) 7

? Nusipiešus piramidę, lengva suprasti, kad galima „atskelti“ vieną viršūnę – taip gauname 4 plokštumas. Galima „išskirti“ dvi prasilenkiančias briaunas (jų yra 3 poros – po vieną kiekvienai pagrindo briaunai) – dar 3 plokštumos.
Renkamės atsakymą D.

! Keturi taškai gali pasiskirstyti tik dviem būdais: 1) į vieną pusę nuo plokštumos vienas taškas, į kitą – trys; 2) į kiekvieną pusę po 2 taškus. 1) atveju yra 4 būdai pasirinkti 1 tašką. 2) atveju reikia taškui A pasirinkti „kaimyną“ (tada likusieji du taškai atsidurs kitoje pusėje) – tai galima padaryti 3 būdais. Vadinasi, yra $4 + 3 = 7$ būdai suskirstyti taškus, ir atitinkamai yra 7 plokštumos.
Teisingas atsakymas D.

!! Galima iš karto kalbėti apie tašką A. Jis gali neturėti kaimyno (1 būdas), turėti 1 kaimyną (3 būdai), turėti 2 kaimynus (3 būdai). Iš viso turime 7 būdus.
Nurodysime, kaip išvesti plokštumą, kad taškai A, B, C būtų vienoje pusėje, D – kitoje, o atstumai būtų lygūs. Iš taško D vedame statmenį plokštumai ABC iki susikirtimo su ja. Tą statmenį dalijame pusiau ir vedame per dalijimo tašką plokštumą, statmeną išvestam statmeniui.
Nesunku išvesti ir plokštumą, kurios vienoje pusėje būtų taškai A ir B, o kitoje – C ir D. Jungiame atkarpų AB ir CD vidurio taškus. Gautą atkarpą dalijame pusiau ir per vidurio tašką vedame plokštumą, statmeną jungiančiajai atkarpai.