JUNIORAS (IX ir X klasės)

J1. A Pirmadienį

? Tikrinkime atsakymus.
Jeigu būtų teisingas atsakymas A ir tai buvo pirmadienį, tai triušis melavo. Todėl 1) sekmadienį jis nemelavo, 2) trečiadienį ir ketvirtadienį jis nemeluos. Bet trečiadieniais triušis meluoja, taigi atsakymą A atmetame.
Jeigu būtų teisingas atsakymas B ir tai buvo antradienį, tai triušis melavo. Todėl 1) pirmadienį jis nemelavo. O tai neteisybė. Atsakymą B atmetame.
Jeigu būtų teisingas atsakymas C ir tai buvo trečiadienį, tai triušis melavo. Todėl 1) antradienį jis nemelavo. O tai neteisybė. Atsakymą C atmetame.
Jeigu būtų teisingas atsakymas D ir tai buvo ketvirtadienį, tai triušis nemelavo. Todėl 1) trečiadienį jis melavo (ir tai teisybė), 2) šeštadienį ir sekmadienį jis meluos (o tai neteisybė). Atmetame atsakymą D.
Jeigu būtų teisingas atsakymas E ir tai buvo penktadienį, tai triušis nemelavo. Todėl 1) ketvirtadienį jis melavo. O tai neteisybė. Atmetame atsakymą E.

! Spėliodami atmetėme visus atsakymus. Vis dėlto „Kengūros“ konkurso taisyklės garantuoja, kad iš nurodytų atsakymų vienas (ir tik vienas) teisingas. Žinoma, gyvenime ko neatsitinka – ir uždavinių sąlygose klaidų gali pasitaikyti, bet tuo nesinorėtų tikėti.
Įdėmiai peržiūrėkime atsakymus iš naujo. Dėl kitų atsakymų abejonių kaip ir nekyla, o štai atsakymas A iš tikrųjų reiškia ne tai, kad jis trečiadienį ir ketvirtadienį nemeluos, o tai, kad teiginys, jog jis meluos trečiadienį ir ketvirtadienį, yra neteisingas.
Iš tikrųjų, triušis trečiadieniais meluoja, o ketvirtadieniais nemeluoja. Taigi tarsi pusė teiginio teisinga, o pusė neteisinga.
Bet paklauskime save taip:
Ar teisingas teiginys, jog triušis meluos trečiadienį ir ketvirtadienį?
Mes priversti atsakyti, kad teiginys neteisingas. (Beje, ir kasdieniniame gyvenime melagiu vadiname žmogų, kuris *kartais* meluoja.) Taigi renkamės atsakymą A.

!! Iš esmės jau išsiaiškinome, kas yra sudėtinio teiginio neiginys. Jeigu turime teiginį A, tai jo neiginys yra „ne A“, kuris dažniausiai žymimas $\overline{A}$. Teiginio B neiginys yra „ne B“ (kitaip $\overline{B}$). O štai teiginio „A ir B“ neiginys yra „arba ne A, arba ne B“. Formule tai užrašome taip: $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$.
Beje, dar nepatikrinome nenurodytų atsakymų F „šeštadienį“ ir G „sekmadienį“. Bet nesunku įsitikinti, kad ir jie netinka.
Jeigu tai vyko šeštadienį, tai triušis nemelavo, ir atsakymas G reiškia, kad 1) penktadienį triušis melavo, o tai neteisybė (kad ir koks – teisingas ar neteisingas – būtų 2) teiginys).
Jeigu tai vyko sekmadienį, tai triušis nemelavo, ir atsakymas F reiškia, kad 1) šeštadienį triušis melavo, o tai neteisybė. Taigi net jeigu uždavinyje nebūtų nurodyti atsakymai ir būtų paklausta, kurią savaitės dieną tai įvyko, tai vienintelis teisingas atsakymas būtų A, t. y. pirmadienį.

J2. D 1

? Aišku, kad 0 (atsakymas E) netinka, nes nei vienas dauginamasis nelygus 0.
Kadangi $2 < \sqrt{5} < 3$, tai dauginamasis $(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{2000}$ mažesnis už 1. Pirmas daugiklis mažesnis už $(\frac{3+1}{2})^{200}$, todėl atsakymai A ir B taip pat netinka, nes net mažesnis iš skaičių $\frac{5^{200}-1}{4}$ per didelis:

$$\frac{5^{200}-1}{4} > \frac{5\cdot 5^{199}-1}{4} > \frac{5\cdot 5^{199}-5^{199}}{4} = \frac{4\cdot 5^{199}}{4} = 5^{199} > 4^{199} = 2^{398}.$$

Renkamės atsakymą D.

! Žinoma, geriausia skaičiuoti. Kadangi $\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{(\sqrt{5})^2-1^2}{4} = \frac{5-1}{4} = 1$, tai ir pakelta 200-tuoju laipsniu ta sandauga lygi 1.

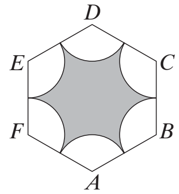
J3. Ⓔ 12

M	B	R
R	M	B
B	R	M

? Spėti čia sunkoka, nors iš karto aišku, kad jau pirmą eilutę galima užpildyti šešiais būdais. Kadangi antrą eilutę galima pildyti irgi keliais būdais, tai panašu, kad būdų ne mažiau kaip 12. Renkamės atsakymą E.

! Pirmą eilutę galima užpildyti šešiais būdais (galima abėcėliškai surašyti visus būdus – BMR, BRM, MBR, MRB, RBM, RMB, o galima remtis ir kombinatorikos daugybos taisykle: į pirmą langelį raidę įrašyti galima 3 būdais, tada nepriklausomai nuo pirmos raidės į antrą langelį raidę galima įrašyti 2 būdais, o į trečią – likusią raidę vieninteliu būdu, taigi visas 3 raides įrašyti galima $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ būdais).
Kad ir kaip raides būtume surašę į pirmą eilutę, antrą eilutę galima užpildyti tik 2 būdais (į pirmą langelį galima rašyti bet kurią raidę, išskyrus tą, kuri yra aukščiau; liks dvi raidės, bet viena iš jų sutampa su parašyta pirmos eilutės antrame ir trečiame langelyje, ir ją teks rašyti kitame stulpelyje; trečia raidė sutampa su pirmos eilutės pirmo langelio raide, taigi parašyta į likusią vietą ji nesutaps su atitinkama pirmos eilutės raide).
Vadinasi, pirmas dvi eilutes remiantis daugybos taisykle galima užpildyti 12 būdų. Pildant trečią eilutę jokio pasirinkimo nebelieka: kiekviename stulpelyje jau parašytos dvi raidės, taigi teks rašyti trečiąją. Teisingas atsakymas E.

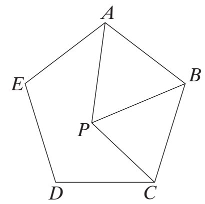
J4. Ⓑ 12π



? Iš akies matyti, kad apskritimo lanko ilgis maždaug lygus dviem pusėms šešiakampio kraštinės. Todėl atsakymas turėtų būti artimas 36. Artimiausias iš jų skaičiui 36 yra 12π.
Renkamės atsakymą B.

! Kadangi apskritimo išpjovos kampas lygus 120°, tai sudėję tris išpjovas gausime visą apskritimą, kurio ilgis $2\pi \cdot 3 = 6\pi$ (apskritimo spindulys lygus pusei šešiakampio kraštinės, t. y. 3). Todėl visų šešių lankų ilgis lygus 12π.
Teisingas atsakymas B.

J5. Ⓓ 66°



? Vizualiai visiškai aišku, kad lygūs kampai BCP ir BPC „truputį“ didesni už PBC (ypač gerai matyti, kad kraštinė BC ilgesnė už PC). Visų minėtų trijų kampų suma lygi 180°. Vadinasi, kampas BCP „truputį“ didesnis už 60°. Renkamės atsakymą D.

! Nesunku kampus ir suskaičiuoti. Penkiakampio kampų suma lygi $3 \cdot 180° = 540°$ (įsivaizduokime, kad tašką P sujungiame su E ir su D; gausime 5 trikampius, kurių kampų suma 900°, o atmetus pilnutinį kampą P, t. y. 360°, turėsime penkiakampio kampų sumą 540°). Todėl $\angle ABC = 540° : 5 = 108°$. Vadinasi, $\angle PBC = 108° - 60° = 48°$, o $\angle BCP = (180° - 48°)/2 = 90° - 24° = 66°$.

J6. Ⓐ 14

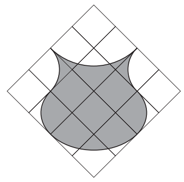
? Spėti čia sunku. Bandykime tikrinti atsakymus.
Kadangi atsakymai surašyti didėjimo tvarka, tai pradėkime nuo vidurio.
Jeigu kambaryje buvo 16 asmenų, tai jų amžių suma buvo $16 \cdot 16 = 256$. Įėjus dar vienam asmeniui, amžių suma tapo lygi $256 + 29 = 285$, bet ji iš 17 nesidalija.
Jeigu iš pradžių buvo 15 asmenų, tai jų amžių suma buvo $15 \cdot 15 = 225$, o padidinta tapo lygi $225 + 29 = 254$, ir iš 16 nesidalija (nesidalija net iš 4).
Jeigu iš pradžių buvo 14 asmenų, tai jų amžių suma buvo $14 \cdot 14 = 196$, o padidėjusi tapo $196 + 29 = 225$. Ir iš tikrųjų, tada jų amžiaus vidurkis $225 : 15 = 15$ tikrai lygus asmenų skaičiui.
Renkamės atsakymą A.

! Sakykime, kad iš pradžių asmenų buvo x, tada jų amžių suma buvo lygi x^2. Kai asmenų vienu padaugėjo ir pasidarė $x+1$, tai jų suma tapo $(x+1)^2$. Sudarome lygtį:

$$(x+1)^2 - x^2 = 29, \quad 2x+1 = 29, \quad x = 14.$$

Teisingas atsakymas A.

J7. Ⓐ $32\,\mathrm{cm}^2$



? Kvadrato plotas lygus $8 \times 8 = 64\,(\mathrm{cm}^2)$. Vizualiai atrodo, kad „ąsočio“ plotas didesnis už pusę kvadrato ploto. Vis dėlto tokio atsakymo nėra, tad tenka rinktis didžiausią iš atsakymų.
Renkamės atsakymą A.

?? „Ąsočio“ plotą apytiksliai galima suskaičiuoti pagal taisyklę: imame pilnų kvadratėlių plotą plius pusę nepilnų kvadratėlių ploto. Taigi plotas apytiksliai lygus $3 \times 4 + 10 \times 2 = 32\,(\mathrm{cm}^2)$.
Renkamės atsakymą A.

! Padalykime kvadratą į keturis lygius mažesnius kvadratus. Tada ąsočio dalį, priklausančią viršutiniam kvadratui, galime perkelti į apatinio kvadrato neužtušuotą dalį, o kairiajam kvadratui priklausančią ąsočio dalį – simetriškai kvadrato centro atžvilgiu (t. y. apvertus) perkelti į dešiniojo kvadrato neužtušuotą dalį. Tada bus visiškai užpildyti 8 kvadratėliai, taigi teisingas atsakymas A.

!! Galima ir apskaičiuoti ąsočio dalių plotus. Pavyzdžiui, viršutiniam iš 4 minėtų kvadratų priklausančios ąsočio dalies plotas lygus kvadrato ir ketvirtadalio skritulio skirtumui, t. y. $4^2 - \pi \cdot 4^2/4 = 16 - 4\pi$. Apatiniam kvadratui priklausančios dalies plotas yra skritulio ketvirtadalis, $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4^2 = 4\pi$. Kairiajam (taip pat ir dešiniajam) kvadratui priklausančio ąsočio dalis sudaryta iš kvadratėlio, kvadratėlio minus skritulio ketvirtis ir skritulio ketvirčio, taigi jos plotas lygus $2 \cdot 4 = 8$. Vadinasi, ąsočio plotas lygus $16 - 4\pi + 4\pi + 2 \cdot 8 = 32\,(\mathrm{cm}^2)$.

J8. Ⓐ 10

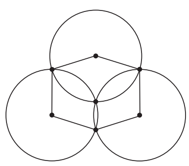
? Spėti čia neverta.

! Užrašykime sąlygą $p(3) = 0$: $3^5 + 3b + c = 0$. Kadangi $c = -3(3^4 + b)$, tai c turi dalytis iš 3. Vadinasi, c negali būti 10.
Renkamės atsakymą A.

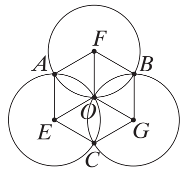
!! Įsitikinkime, kad visos kitos c reikšmės įmanomos. Iš tikrųjų, $c = 12$, jeigu $3^4 + b = -4$, t. y. $b = -85$; $c = 15$, jei $3^4 + b = -3$, $b = -84$; $c = 36$, jei $3^4 + b = -12$, $b = -93$; $c = 9$, jei $3^4 + b = -3$, $b = -84$.
Beje, jeigu nebūtų duoti atsakymai ir būtų klausiama, kokios galimos ir kokios negalimos c reikšmės, tai atsakymas būtų toks: galimos visos c reikšmės, dalios iš 3; negalimos visos c reikšmės, kurios nesidalija iš 3.
Iš tikrųjų, jau matėme, kad c turi dalytis iš 3. O jeigu jau $c = 3k$, tai užtenka imti $k = -3^4 - b$.

J9. Ⓒ 0

? Iš brėžinio spėjame, kad EF ir AB lygios.
Renkamės atsakymą C.



! Aišku, mūsų spėjimas labai jau rizikingas.
Visų pirma pabandykime išsiaiškinti sąlygą. Ką reiškia „apskritimai išsidėstę simetriškai“? Ar simetriškai išsidėstę apskritimai, pavaizduoti dešinėje?



Matyt, ne, – greičiausiai visos trys bendros dviejų apskritimų dalys turi būti vienodos, o kitaip sakant – trikampis EFG (G – trečio apskritimo centras) turi būti lygiakraštis. O ar vienintelė tokia trijų apskritimų padėtis? Atrodytų, vėlgi ne, – bendros dalys tarsi gali būti „storesnės“ ir „plonesnės“.

Ir vis dėlto pradėkime skaičiuoti. Aišku, kad $EOFA$, $BFOG$, $GOEC$ – rombai (jų kraštinės lygios r). Kadangi EF, FG ir GE lygios, tai ir trikampiai EOF, FOG, OGE lygūs. Kampai EOF, FOG, OGE lygūs ir kartu sudaro 360°, todėl kiekvienas jų lygus 120°. Vadinasi, $\angle AFO = 60^\circ$, todėl $\triangle AOF$ (ir visi kiti trikampiai) lygiakraščiai, o šešiakampis $AFBGCE$ taisyklingas. Todėl jo trumposios įstrižainės AB ir EF lygios. (Žinoma, AB ir EF lygumas išplaukia ir iš trikampių EOF ir AOB lygumo, kurie lygūs pagal 120° kampą ir juos sudarančias kraštines.)
Vadinasi, teisingas atsakymas C.

!! Kartu išsiaiškinome, kad uždavinio situaciją atitinka vienintelė konstrukcija. Tai reiškia štai ką. Kai duotas spindulys r, brėžiame apskritimą su centru E, pasirenkame tašką A, nuo jo tiek pat išskėtę skriestuvą atidedame apskritime taškus O ir C. Po to viskas eina vienareikšmiškai. Iš taškų A ir O nubrėžę lankelius randame centrą F, o iš taškų O ir C nubrėžę lankelius – centrą G. Dabar jau galime nubrėžti antrą ir trečią apskritimą.
Beje, nesunku ir apskaičiuoti EF ilgį, pavyzdžiui, kaip dvigubą trikampio AFO aukštinę. Bet paprasčiausia tai padaryti iš lygiagretainio $EAFO$ remiantis įstrižainių savybe: $4r^2 = r^2 + EF^2$, $EF = r\sqrt{3}$.

J10. Ⓑ 0

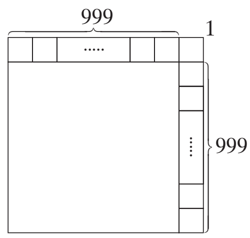
? Matome, kad $S_1 = 1$, $S_2 = -1$, $S_3 = 2$, $S_4 = -2$, taigi $S_1 + S_2 = 0$, $S_3 + S_4 = 0$. Spėjame, kad ir $S_{1999} + S_{2000} = 0$.
Renkamės atsakymą B.

! Labai lengva apskaičiuoti S_{2000}: $S_{2000} = \underbrace{1-2}+\underbrace{3-4}+\cdots+\underbrace{1999-2000} = -1000$. Todėl $S_{1999} = S_{2000} + 2000 = -1000 + 2000 = 1000$, o $S_{1999} + S_{2000} = 1000 + 1000 = 0$.
Teisingas atsakymas B.

!! Lygiai taip pat įsitikiname, kad $S_{2n} = -n$, $S_{2n-1} = n$.
Beje, įdomu užrašyti formulę S_k, kuri tiktų tiek lyginiam, tiek nelyginiam k. Tai nesunku padaryti, naudojantis sveikosios dalies simboliu [ ]: $S_k = (-1)^{k+1}[\frac{k+1}{2}]$. Iš tikrųjų, kai $k = 2n$, gausime $S_{2n} = -[n + \frac{1}{2}] = -n$, o kai $k = 2n - 1$, tai $S_{2n-1} = n$.
Dar įdomiau, kad galima apsieiti ir be sveikosios dalies simbolio:

$$S_k = \frac{(2k+1)(-1)^{k+1} + 1}{4}.$$

J11. Ⓒ 1 000 000



? Iš karto ateina į galvą mintis, kad nuo didžiojo kvadrato viršaus ir dešinės galima nukirpti vienetinio pločio juosteles. Jeigu tos juostelės turi $999 + 1 + 999$ vienetinius kvadratėlius, tai atsakymas atspėtas: mažojo kvadrato plotas lygus 999^2 (ir nelygus vienetui, kaip reikalauja sąlyga), o didžiojo – lygus 1000^2.
Renkamės atsakymą C.

! Įrodysime, kad daugiau sprendinių uždavinys neturi.
Tarkime, kad mums pavyko padalyti kvadratą K reikiamu būdu. Kvadrato K kraštinę pažymėkime y, mažojo kvadrato kraštinę x (brėžinio visai nereikia – tas mažesnysis kvadratas gali būti bet kur).

Didžiojo kvadrato plotas lygus mažojo kvadrato plotui plius 1999, taigi gauname lygtį

$$y^2 = x^2 + 1999, \quad (y - x)(y + x) = 1999.$$

Pagalvokime, kaip skaičių 1999 galima išskaidyti į dviejų daugiklių sandaugą. Tam reikia rasti visus 1999 daliklius.
Skaičius 1999 nesidalija iš 2, iš 3, iš 5, iš 7. Kyla mintis, kad jis pirminis – bet tai reikėtų įrodyti (bent sau – pirminių skaičių lentelės niekas nesinešioja). Vadinasi, reikėtų tikrinti, ar 1999 nesidalija iš jokio pirminio, mažesnio už jį. Bet net išrašyti tuos pirminius sunku (kas žino, ar, pavyzdžiui, 997 pirminis, ar ne). Taigi atrodytų, kad su įrodymu bus daug vargo, bet vis dėlto taip nėra. Tarkime, kad 1999 dalijasi iš a, o padalijęs gauname skaičių b, t. y. $a \cdot b = 1999$. Niekas netrukdo mums laikyti $a \leqslant b$; tada $a < 44$ (iš tikrųjų, jeigu $b \geqslant a \geqslant 45$, tai sandauga ab būtų didesnė už 2025). Vadinasi, užtenka išsiaiškinti, ar skaičius 1999 turi daliklių, mažesnių už 44, t. y. užtenka patikrinti, ar 1999 dalijasi iš pirminių skaičių, mažesnių už 44. Tokius skaičius išrašyti lengva:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43.$$

Pradžia jau padaryta – sekantis skaičius 11. Bet 1999 nesidalija iš 11 (99 galime atmesti, o $1900 = 19 \cdot 100$ iš 11 nesidalija). Nesidalija 1999 ir iš 13 (39 galime atmesti, lieka $196 \cdot 10$; 196 iš 13 nesidalija, nes 26 galime atmesti, o $170 = 17 \cdot 10$ iš 13 nesidalija). Žodžiu, tiesiog dalydami ar pagudraudami įsitikiname, kad skaičius 1999 nesidalija nė iš vieno išrašytų pirminių ir todėl yra pirminis.
Grįžkime prie lygties. Kadangi 1999 natūraliaisiais daugikliais galima išskaidyti tik vienu būdu: $1 \cdot 1999$, o daugiklis $y - x < y + x$, tai $y - x = 1$, $y + x = 1999$; vadinasi, $y = 1000$, $x = 999$.
Dabar negalima pamiršti, kad buvome pasakę „tarkime“. Taigi įrodėme tik tiek: jeigu kvadratą galima padalyti į mažesnius, tai tik taip, kad mažesniojo kraštinė būtų 99, o vienetinių kvadratėlių būtų 1999. Bet tai, kad lygtis turi sprendinių, dar visai neįrodo, kad kvadratą galima padalyti į mažesnius. Todėl reikia sugalvoti konstrukciją, kuri tenkintų uždavinio sąlygą. Bet tokią konstrukciją nurodėme jau anksčiau (uždavinyje visiškai neprašoma įrodyti, kad tokia konstrukcija vienintelė; šį teiginį, jei įdomu, įrodykite patys – tai nėra sunku). Išsamus sprendimas baigtas.
Teisingas atsakymas C.

J12. Ⓓ 13

? Čia tikrai nieko neatspėsi – reikia skaičiuoti.

! Iš trečios sąlygos išplaukia, kad x teigiamas. Taigi x ir y – natūralieji skaičiai, tenkinantys tris sąlygas:
1) x lyginis; 2) y pirminis; 3) $x^2 y < 100$.
Perranką patogiausia pradėti nuo y.
Jei $y = 2$, tai $x^2 < 50$, $x = 2, 4, 6$.
Jei $y = 3$, tai $x^2 < 34$, $x = 2, 4$.
Jei $y = 5$, tai $x^2 < 20$, $x = 2, 4$.
Jei $y = 7$, tai $x^2 < 15$, $x = 2$.
Jei $y = 11, 13, 17, 19, 23$, tai $x^2 < 10$, ir $x = 2$.
Jei $y \geqslant 29$, tai $x^2 < 4$, ir sprendinių nėra.
Radome 13 porų: (2, 2), (4, 2), (6, 2), (2, 3), (4, 3), (2, 5), (4, 5), (2, 7), (2, 11), (2, 13), (2, 17), (2, 19), (2, 23).
Teisingas atsakymas D.

J13. Ⓓ 28

? Kadangi už teisingą atsakymą Jolanta gauna 1/2 lito, tai ji teisingai išsprendė lyginį uždavinių skaičių – atsakymai A, C, E atkrenta. Tikriname atsakymą B – tada Jolanta teisingai išsprendė 26 uždavinius, neteisingai 14, taigi gavo $26 \cdot 1/2 - 14 \cdot 1 = -1$ litą.
Renkamės atsakymą D.

! Atsakymas D tikrai tinka: $28 \cdot 1/2 - 12 \cdot 1 = 2$ litai. Kadangi didėjant išspręstų uždavinių kiekiui užmokestis didėja, tai tas sprendinys vienintelis. Tinka tik atsakymas D.

!! Galima sudaryti lygtį: jei Jolanta teisingai išsprendė x uždavinių, tai neteisingai $40 - x$, todėl $x \cdot 1/2 - (40 - x) \cdot 1 = 2$, $x - 80 + 2x = 4$, $3x = 84$, $x = 28$. Taigi Jolanta teisingai išsprendė 28 uždavinius.

J14. Žr. uždavinio K16 sprendimą.

J15. Ⓔ 72 kg

? Kadangi atsakymai išrikiuoti, tai pradėkime tikrinti nuo vidurio.
Sakykime, kad Liucija sveria 64 kg. Svarstyklės parodė 67 kg, vadinasi, jos rodo 3 kg daugiau. Todėl Roma sveria $59 - 3 = 56$ (kg). Abi jos sveria $64 + 56 = 120$ (kg), taigi svarstyklės turėtų rodyti 123 kg. Vadinasi, atsakymas C netinka.
Tarsi reikia imti didesnį atsakymą – tikrinkime D. Tada svarstyklės rodytų $70 - 67 = 3$ kilogramais mažiau, Roma svertų $59 + 3 = 62$ (kg), abi jos svertų $70 + 62 = 132$ (kg), o svarstyklės rodytų 129 kg. Vadinasi, atsakymas D netinka.
Tikrinkime atsakymą E. Tada svarstyklės rodytų $72 - 67 = 5$ kilogramais mažiau, Roma svertų $59 + 5 = 64$ (kg), abi jos svertų $72 + 64 = 136$ (kg), o svarstyklės rodytų 131 kg. Vadinasi, atsakymas E tinka.
Renkamės atsakymą E.

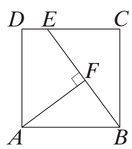
! Ligi pilno sprendimo liko patikrinti atsakymus A ir B ir įsitikinti, kad jie netinka.
Žinoma, geriau sudaryti lygtį. Jeigu Liucija sveria x kg, tai svarstyklės rodo $67 - x$ kilogramų daugiau (nesvarbu, jei tai ir neigiamas skaičius), tada Roma sveria $59 - (67 - x)$, abi jos sveria $x + 59 - 67 + x$, o svarstyklės rodo

$$x + 59 - 67 + x + (67 - x) = 131.$$

Todėl $x = 131 - 59 = 72$ (kg).
Taigi tinka tik atsakymas E.

!! Iš tikrųjų nereikia jokios lygties. Įsivaizduokime, kad Roma stovi ant svarstyklių, tada svarstyklės rodo 59 kg. Jeigu ant svarstyklių užlipa dar ir Liucija, tai svarstyklės rodo 131 kg. Vadinasi, Liucija sveria $131 - 59 = 72$ (kg).

J16. Ⓓ 3,75



? Kadangi AFB – garsusis Pitagoro trikampis, kurio statiniai 3 ir 4, tai kvadrato kraštinė 5. Iš akies nustatome, kad greičiausiai tinka atsakymas 3,75.
Renkamės atsakymą D.

! Remiantis Pitagoro teorema, nesunku sudaryti lygtį: jei $CE = x$, tai $BE = \sqrt{25 + x^2}$, $EF = EB - FB = \sqrt{25 + x^2} - 3$, $AE^2 = AF^2 + FE^2 = 4^2 + (\sqrt{25 + x^2} - 3)^2$, ir kadangi $DE = DC - EC = 5 - x$, tai iš $\triangle ADE$

$$AE^2 = AD^2 + DE^2, \quad 4^2 + \left(\sqrt{25 + x^2} - 3\right)^2 = 5^2 + (5 - x)^2,$$

$$25 + x^2 - 6\sqrt{25 + x^2} + 9 = 9 + 25 - 10x + x^2, \quad 3\sqrt{25 + x^2} = 5x,$$

$$9 \cdot 25 + 9x^2 = 25x^2, \quad 16x^2 = 9 \cdot 25, \quad 4x = 3 \cdot 5, \quad x = 15 : 4 = 7{,}5 : 2 = 3{,}75.$$

Teisingas atsakymas D.

!! Geriau paieškoti panašiųjų trikampių. Kadangi $\angle EBC = 90^\circ - \angle FBA = \angle FAB$, tai statieji trikampiai AFB ir BCE panašūs. Todėl $AF : FB = BC : EC$, $4 : 3 = 5 : EC$, $EC = 3{,}75$.

J17. Ⓒ 4

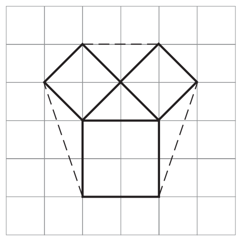
? Čia spėti neverta.

! Kadangi $x > y$, o $xy = 300$, tai $y^2 < 300$, $y < 18$. Nesunku perrinkti visus tokius skaičiaus 300 daliklius: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15$. Atitinkamai x bus $300, 150, 100, 75, 60, 50, 30, 25, 20$.
Vadinasi, yra 9 poros skaičių x ir y, $x > y$, kurių sandauga lygi 300: (1, 300), (2, 150), (3, 100), (4, 75), (5, 60), (6, 50), (10, 30), (12, 25), (15, 20). Iš jų reikia išmesti poras, kuriose x ir y turi bendrų daliklių – tai poros (2, 150), (5, 60), (6, 50), (10, 30), (15, 20). Lieka 4 poros.
Teisingas atsakymas C.

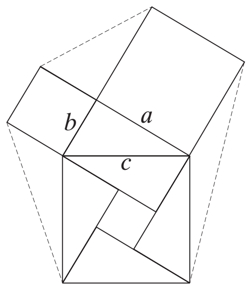
!! Šiaip jau tokie uždaviniai sprendžiami skaidant pirminiais daugikliais: $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Kadangi abu dvejetukai ir abu penketukai gali įeiti tik į vieną iš dauginamųjų, tai daugiklius 3, 4 ir 25 reikia paskirstyti dviem dauginamiesiems. Kadangi iš tų daugiklių į vieną dauginamąjį įeina bent du, tai gauname sandaugas $300 \cdot 1$, $12 \cdot 25$, $75 \cdot 4$, $100 \cdot 3$. Kadangi pirmas dauginamasis turi būti didesnis, tai gauname 4 poras: (300, 1), (25, 12), (75, 4), (100, 3).

J18. Ⓓ $2(ab + a^2 + b^2)$

? Pabandykime paspėlioti: jeigu $b \to 0$, tai $c \to a$, o šešiakampio plotas artėja į $2a^2$. Vadinasi, atkrinta atsakymai A ir B, bet spėti sunku.
Languotame popieriuje nusibraižykime brėžinį, kai $a = b$, $c = 2$. Tada pagrindinio trikampio plotas lygus 1 (dvi kvadratėlio pusės), viršutinio trikampio plotas toks pat.



Kiekvieno iš mažųjų kvadratų plotas lygus 2 (4 pusės kvadratėlio). Šoninio trikampio plotas lygus 1 (pusė stačiakampio 3×1 ploto minus pusė kvadratėlio). Iš viso gauname plotą $4 \cdot 1 + 2^2 + 2 \cdot 2 = 12$. Atsakymai atitinkamai duoda $6a^2$, $5a^2$, $\frac{11}{2}a^2$, $6a^2$, $\frac{13}{2}a^2$, o kadangi $a^2 + a^2 = c^2$, tai atitinkamai $3c^2$, $\frac{5}{2}c^2$, $\frac{11}{4}c^2$, $3c^2$, $\frac{13}{4}c^2$. Mūsų atveju $c = 2$, taigi gauname atsakymus 12, 10, 11, 12, 13. Kadangi atsakymas A jau atmestas, tai renkamės atsakymą D.



! Pratęskime kvadratų a ir b kraštines į kvadrato c vidurį ir papildykime brėžinį. Kadangi centrinio kvadratėlio kraštinė lygi $a - b$, tai apskaičiavę kvadrato plotą c^2 kaip keturių trikampių ir kvadratėlių plotų sumą, gautume Pitagoro teoremos įrodymą:

$$c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + (a - b)^2 = a^2 + b^2.$$

Bet mums rūpi apskaičiuoti pradinių trikampių plotus.

Viršutinis trikampis lygus pagrindiniam trikampiui, todėl jo plotas lygus $ab/2$. Kairiojo trikampio pagrindas b, aukštinė a, taigi jo plotas taip pat $ab/2$. Pagaliau dešiniojo trikampio pagrindas a, o aukštinė b, taigi ir jo plotas lygus $ab/2$. Vadinasi, ieškomasis šešiakampio plotas lygus

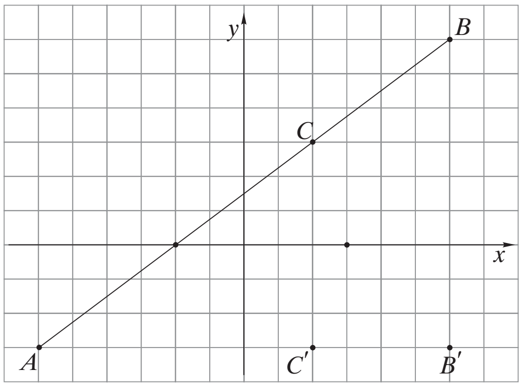
$$a^2 + b^2 + c^2 + 4 \cdot ab/2 = 2(ab + a^2 + b^2).$$

Teisingas atsakymas D.

!! Žinoma, trumpiausias sprendimas gaunamas taikant trikampio ploto formulę. Kadangi kairiojo apatinio trikampio kampas tarp kraštinių b ir c lygus $360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$ (α – pradinio trikampio kampas tarp kraštinių b ir c), tai jo plotas lygus $\frac{1}{2}bc\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, o tai yra pradinio trikampio plotas. Analogiškai ir dešinio (taip pat ir viršutinio) trikampio plotas toks pat.

J19. © $\frac{2}{3}$

? Aišku, kad geriausia tašką imti atkarpoje AB. Iš brėžinio languotame popieriuje matyti, kad taško C abscisė šiek tiek mažesnė už 1. Vadinasi, tiks vienas iš atsakymų B ir C.
Norint atspėti atsakymą, užtenka pasidaryti didesnį brėžinį. Matome, kad taško C abscisė maždaug lygi 2 langeliams, t. y. $\frac{2}{3}$.
Renkamės atsakymą C.



?? Jeigu taškas C yra atkarpoje AB, tai $AB = AC + CB$. Pagal Pitagoro teoremą (arba pagal atstumo tarp dviejų taškų formulę) gauname

$$\sqrt{(x+2)^2+2^2}+\sqrt{(2-x)^2+1^2}=\sqrt{4^2+3^2}.$$

Dabar galime tikrinti atsakymus B ir C.
B) $\sqrt{(\frac{3}{4}+2)^2+4}+\sqrt{(2-\frac{3}{4})^2+1} = 5$, $\sqrt{\frac{121}{4}+4}+\sqrt{\frac{25}{16}+1} = 5$, $\sqrt{137}+\sqrt{41} = 20$. Bet $\sqrt{137} < 12$, $\sqrt{41} < 7$, taigi lygybė neteisinga.
C) $\sqrt{(\frac{2}{3}+2)^2+4}+\sqrt{(2-\frac{2}{3})^2+1} = 5$, $\sqrt{\frac{64}{9}+4}+\sqrt{\frac{19}{9}+1} = 5$, $\sqrt{100}+\sqrt{25} = 15$. Lygybė teisinga, vadinasi, atsakymas C tinka.

! Galima spręsti lygtį:

$$\sqrt{x^2+4x+8}+\sqrt{x^2-4x+5}=5,$$
$$x^2+4x+8=25+x^2-4x+5-10\sqrt{x^2-4x+5},$$
$$22-8x=10\sqrt{x^2-4x+5}, \quad 11-4x=5\sqrt{x^2-4x+5},$$
$$121-88x+16x^2=25x^2-100x+125,$$
$$9x^2-12x+4=0, \quad (3x-2)^2=0, \quad x=2/3.$$

!! Kaip ir J16 uždavinyje, trumpesnis sprendimas remiasi trikampių panašumu. Iš $\triangle ABB'$ ir $\triangle ACC'$ gauname:

$$\frac{BB'}{CC'}=\frac{AB'}{AC'}, \quad \frac{3}{2}=\frac{4}{2+x}, \quad 6+3x=8, \quad x=\frac{2}{3}.$$

J20. Ⓑ 4

? Tikrinkime atsakymus.
A) Jei $p = 2$, tai turime skaičių $\overline{62q2q2q}$ ir naująjį skaičių $\overline{2q2q2}$. Kadangi skaitmenų suma $6+2q$ dalijasi iš 3, tai $2q$ (taigi ir q) dalijasi iš 3, todėl $3q$ dalijasi iš 9, o $12 + 3q$ nesidalija iš 9.
B) Jei $p = 4$, tai turime skaičius $\overline{64q4q4q}$ ir $\overline{4q4q4}$. Vėl q dalijasi iš 3, $3q + 18$ dalijasi iš 9, o kadangi q lyginis, tai užtenka imti $q = 0$.
Renkamės atsakymą B.

! Kadangi pradinis skaičius dalijasi iš 18, tai jis dalijasi iš 9 ir iš 2. Vadinasi, q lyginis, o skaitmenų suma $6 + 3p + 3q$ dalijasi iš 9, t. y. $2 + p + q$ dalijasi iš 3.
Kadangi naujasis skaičius $\overline{pqpqp}$ dalijasi iš 6, tai p lyginis, o skaitmenų suma $3p + 2q$ dalijasi iš 3. Tai reiškia, kad $2q$ dalijasi iš 3, t. y. q dalijasi iš 3.
Bet $2 + p + q$ dalijasi iš 3, todėl $2 + p$ dalijasi iš 3. Vadinasi, iš skaitmenų 0, 2, 4, 6, 8 (beje, tai ir yra visi lyginiai skaitmenys) tinka tik 4.
Jau įrodėme, kad q lyginis ir dalijasi iš 3, todėl q yra 0 arba 6. Gauname skaičius 6404040 ir 6464646, tenkinančius uždavinio sąlygą (pasitikrinti visada verta, net jeigu mūsų teiginiai buvo ekvivalentūs). Taigi vienintelis teisingas atsakymas yra 4.

!! Pasvarstykime, ką galėtų reikšti keistas sąlygos žodis „tikrai“.
Jis gal galėtų reikšti, kad antrasis skaičius dalijasi iš 6, bet gal jis dalijasi net iš 18 (ar kito 6 kartotinio).
Matėme, kad skaičius 6404040 dalijasi iš 18, bet skaičius 40404 – ne. Skaičius 6464676 taip pat dalijasi iš 18, bet skaičius 46464 – ne.

J21. Ⓒ 32

? Spėlioti čia vėl sunku.

! Pradėkime spalvinti skaičius. Pirmą skaičių galima spalvinti bet kuria spalva – sąlyga tam netrukdo. Antrą – taip pat, trečią, ketvirtą, penktą – taip pat. O štai kai nuspalviname penkis pirmuosius skaičius – rinktis jau nebegalima: šeštą skaičių reikia spalvinti ta spalva, kuria nuspalvintas pirmas, septintą – ta, kuria nuspalvintas antras ir t. t. Vadinasi, viską apsprendžia pirmi penki skaičiai.
Kadangi pirmą skaičių galima nuspalvinti dviem būdais, antrą – dviem būdais, ..., penktą – dviem būdais, tai pagal daugybos taisyklę visus penkis skaičius galima nuspalvinti $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ būdais.
Vadinasi, teisingas atsakymas yra C.

J22. Ⓒ Taškai niekada nebesusitiks

? Vėl visai neverta spėlioti.

! Įrodysime, kad taškai niekada nebesusitiks. Sakykime, kad kraštinei įveikti pirmam taškui reikia laiko t. Tada po sutikimo jis atsidurs taške C praėjus laikui $2t$, vėl taške A po $4t$, vėl taške C po $6t$ ir t.t. Antras taškas viršūnėje C atsidurs po $t\sqrt{2}$, vėl bus taške A po $2t\sqrt{2}$ ir t.t. Vienintelė galimybė taškams susitikti yra taškai A ir C. Tarkime, kad taškai susitiko praėjus laikui T. Tada

$$T = 2nt = mt\sqrt{2}, \quad n \in \boldsymbol{N},\ m \in \boldsymbol{N}.$$

Kadangi $t > 0$, tai $2n/m = \sqrt{2}$. Bet kairėje – racionalusis skaičius, o dešinėje – iracionalusis. Prieštara, taigi taškai niekada nebesusitiks.
Teisingas atsakymas C.

J23. Ⓑ 1

? Tikrinkime atsakymą A. Sakykime, kad Beta pagavo 0 pelių. Tada Tina ir Liza pagavo tiek pat pelių, kiek Dona (kiekvienos katės pagautų pelių skaičių pažymėkime jos vardo pirmąja raide),

$D = 3 + L$. Dona ir Liza pagavo mažiau negu 3 peles, $D + L < 3$. Taigi Dona pagavo $\geqslant 3$ peles ir pagavo < 3 peles. Prieštara.
Tikrinkime atsakymą B. Sakykime, kad Beta pagavo 1 pelę. Tada Tina ir Liza pagavo tiek pat pelių, kiek Beta ir Dona, $3 + L = 1 + D$, t. y. Dona pagavo 2 pelėmis daugiau negu Liza, $D = L + 2$. Dona ir Liza kartu pagavo mažiau negu 4 peles, $D + L < 4$. Vadinasi, Liza pagavo 0 pelių (kitaip Liza pagavo $\geqslant 1$ pelę, Dona pagavo $\geqslant 3$ peles, – prieštara). Taigi Dona pagavo 2 peles. Visos uždavinio sąlygos išpildytos. Renkamės atsakymą B.

! Iki pilno sprendimo liko įsitikinti, kad kiti atsakymai netinka. Tai padaryti nėra sunku, bet nuobodu. Geriau pasitelkime į pagalbą algebrą. Tada $T + L = B + D$, $D > B$, $D + L < T + B$, $T = 3$. Pakeitę T trejetu, gauname sistemą

$$3 + L = B + D, \quad D > B, \quad D + L < 3 + B.$$

Išreiškę iš pirmo sąryšio $B = 3 + L - D$, gauname nelygybių sistemą

$$D > 3 + L - D, \quad D + L < 3 + 3 + L - D, \quad \text{t. y.} \quad D < 3, \quad 2D > 3 + L.$$

Kadangi iš antros nelygybės $2D > 3$, t. y. $D \geqslant 2$, tai iš pirmos nelygybės $D = 2$. Tada iš antros nelygybės $L < 1$, t. y. $L = 0$. Todėl iš lygybės $3 + L = B + D$ gauname $3 + 0 = B + 2$, $B = 1$.
Kaip visuose žodiniuose uždaviniuose, gautą atsakymą $T = 3$, $D = 2$, $L = 0$, $B = 1$ reikia tikrinti – ar jis tenkina sąlygą. Nesunku įsitikinti, kad visi sąlygos reikalavimai įvykdyti.
Vadinasi, teisingas tik atsakymas B.

!! Pastebėkime, kad nelygybė $x > y$ su sveikaisiais skaičiais x ir y yra ekvivalenti nelygybei $x \geqslant y+1$. Iš tikrųjų, kadangi $x - y > 0$ ir $x - y$ sveikas skaičius, tai $x - y \geqslant 1$, $x \geqslant y + 1$. Remdamiesi šia savybe, sąlygą galime užrašyti taip:

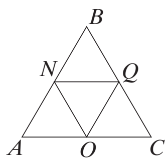
$$3 + L = B + D, \quad D \geqslant B + 1, \quad 2 + B \geqslant D + L, \quad T = 3.$$

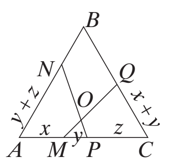
Sudėję pirmą ir trečią sąryšius, gauname $5 \geqslant 2D$, t. y. $D \leqslant 2$. Dabar iš antro sąryšio $B \leqslant 1$. Bet tada iš pirmo sąryšio $B = 1$, $D = 2$, $L = 0$, ir radome jau turėtą sprendinį.

J24. (B) 60°

? Pateiktas brėžinys neatitinka sąlygos, todėl remiantis juo spėti pavojinga. Galima pasidaryti tikslesnį brėžinį ir tada spėti (žr. žemiau dešinį paveikslėlį).
Renkamės atsakymą 60°, t. y. B.

?? Laikykime, kad taškai M, P ir O susiliejo kraštinės viduryje (žr. kairį paveikslėlį). Tada kampas neabejotinai 60° – tuo įsitikiname sujungę N ir Q.





! Pažymėkime pagrindo atkarpas $AM = x$, $MP = y$ ir $PC = z$. Tada pagal sąlygą $AN = y + z$, $CQ = x + y$. Bet trikampiai NAP ir MCQ lygūs pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. Todėl $\angle OMP + \angle OPM = \angle QMC + \angle NPA = \angle QMC + \angle MQC = 180^\circ - \angle QCM = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, taigi $\angle MOP = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Vadinasi, $\angle NOQ = \angle MOP = 60^\circ$.
Teisingas atsakymas B.

J25. (D) 89

? Visiškai aišku, kad spėlioti neverta.

! Išverskime sąlygą į matematikos kalbą. Sakykime, kad tarpas tarp medelių lygus 1. Tada kengūros šuolis gali būti lygus 1 arba 2. Jai reikia įveikti atstumą 10. Vadinasi, uždavinio klausimas virsta tokiu:

Keliais skirtingais būdais galima sudaryti sumą 10 iš dėmenų 1 ir 2? (*Būdai laikomi skirtingais, jeigu jie skiriasi dėmenų skaičiumi*; *jei dėmenų skaičius sutampa*, *tai turi skirtis vienetų ir dvejetų išsidėstymas.*)

Mažiausias dėmenų skaičius gali būti 5. Tada visi dėmenys yra 2, ir todėl sudaryti sumą 10 galima tik vienu būdu.

Jei sumoje yra 4 dvejetai, tai yra 2 vienetai. Yra 6 dėmenys, ir reikia suskaičiuoti, kiek yra būdų pasirinkti 2 vietas iš 6, kuriose bus vienetai. Tai padaryti nesunku išrašius visas vietų kombinacijas:

12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56.

Jų yra 15.

Jei sumoje yra 3 dvejetai, tai vienetų yra 4. Dėmenų yra 7, ir reikia suskaičiuoti, kiek yra būdų pasirinkti 3 vietas iš 7, kuriose bus dvejetai. Išrašyti visus būdus taip pat nesunku (nors ir nuobodoka):

123 124 125 126 127	234 235 236 237	345 366 347	456 457
134 135 136 137	245 246 247	356 357	467
145 146 147	256 257	367	567
156 157	267		

Matome, kad yra 35 būdai.

Jeigu sumoje yra 2 dvejetai, tai vienetų yra 6. Dėmenų yra 8, ir reikia suskaičiuoti, kiek yra būdų pasirinkti 2 vietas iš 8 dvejetams. Išrašome visus būdus:

12 13 14 15 16 17 18
23 24 25 26 27 28
34 35 36 37 38
45 46 47 48
56 57 58
67 68
78

Matome, kad yra $7+6+5+4+3+2+1=28$ būdai.

Jeigu sumoje yra 1 dvejetas, tai vienetų yra 8, ir reikia suskaičiuoti, kiek yra būdų dvejetui pasirinkti vieną vietą iš 9. Aišku, kad yra 9 būdai.

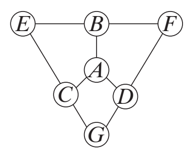
Pagaliau jeigu sumoje yra tik vienetai, tai yra vienintelis būdas.

Vadinasi, iš viso yra $1+15+35+28+9+1=89$ būdai sudaryti sumą 10.

Teisingas atsakymas D.

!! Remiantis derinių skaičiaus formule suskaičiuoti būdų skaičių papraščiau:
$C_5^5+C_6^4+C_7^3+C_8^2+C_9^1+C_{10}^0=1+15+35+28+9+1=89$.

J26. Ⓐ 1



? Tikrinkime atsakymus. Kadangi jie išrikiuoti, pradėkime nuo vidurinio.

Atmetę iš keturkampio skritulį A, gausime tris trejetus su vienodomis sumomis, į kiekvienus du iš kurių įeina lygiai vienas bendras elementas.

Jei $A=4$, tai reikia iš likusių skaičių sudaryti trejetus, kurių trijų dėmenų sumos būtų lygios $15-4=11$. Tokie trejetai yra tik du – 731 ir 632. Vadinasi, atsakymas C netinka.

Jei $A = 5$, tai sumos turi būti lygios $15 - 5 = 10$. Tokių trejetų yra vėl tik du – 721 ir 631.

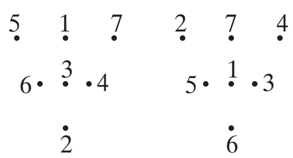
Jei $A = 6$, tai sumos turi būti lygios 9. Toks trejetas yra tik vienas – 531.

Jei $A = 2$, tai sumos turi būti lygios 13. Tokie trejetai yra tik du – 751 ir 643.

Renkamės atsakymą A.

! Iki pilno sprendimo (jeigu nebūtų nurodyti 5 atsakymai) lieka patikrinti reikšmes $A = 1$, $A = 3$, $A = 7$.

Kai $A = 7$, tai sumos turi būti 8. Yra tik vienas toks trejetas: 521. Kai $A = 3$, tai sumos lygios 12. Tokių sumų yra trys – 741, 651 ir 642. Nesunku nurodyti atitinkamą konstrukciją (sutampantys elementai rašomi kraštinės viduryje, o viršūnė tada nustatoma vienareikšmiškai; žr. konstrukciją kairėje).
Kai $A = 1$, tai sumos lygios 14. Tinka trejetai 752, 743, 653 (žr. konstrukciją dešinėje).



!! Kadangi visų skaičių suma lygi 28, o keturkampių skaičių suma lygi 15, tai kiekvienoje kraštinėje skaičių suma lygi 13. Bet sudaryti sumą 13 iš 3 skirtingų dėmenų, ne didesnių už 7, galima tik taip: $7+5+1 = 7+4+2 = 6+5+2 = 6+4+3$. Kadangi bet kurios kraštinės turi bendrą viršūnę, tai kartu negali įeiti pirma ir ketvirta sumos. Vadinasi, yra dvi galimybės: $1+5+7 = 2+4+7 = 2+5+6$ ir $2+4+7 = 2+5+6 = 3+4+6$. Skaičiai, kurie kartojasi 2 kartus, turi būti viršūnėse, o kurie tik 1 kartą – kraštinės viduryje. Pirmu atveju gauname, pavyzdžiui, $5+1+7 = 7+4+2 = 2+6+5$, ir konstrukcija įmanoma, o po skrituliu A bus skaičius 3.
Antru atveju

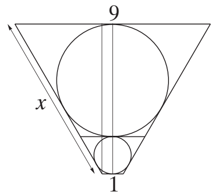
$$2 + 7 + 4 = 4 + 3 + 6 = 6 + 5 + 2,$$

o po skrituliu A yra skaičius 1.
Vadinasi, jeigu nebūtų nurodyti 5 atsakymai, tai atsakymas į uždavinio klausimą būtų toks: 3 arba 1. Kadangi reikia rinktis iš 5 duotų atsakymų, o atsakymo 3 tarp jų nėra, tai renkamės atsakymą A.
Taigi žymiai geriau būtų formuluoti uždavinio klausimą taip:
Koks skaičius iš žemiau nurodytų gali būti po skrituliu A?
Beje, iš sprendimo aišku, kad nurodytos konstrukcijos yra vienintelės (jei nelaikysime skirtingomis konstrukcijų, sutapdinamų posūkiais ar simetrijomis).

!!! Labai gražus ir toks sprendimas. Pagalvokime, kur gali stovėti didžiausias skaičius – 7. Centre stovėti jis negali, nes tada ketrukampio, kuriame yra skaičius 6, skaičių suma bus ne mažesnė kaip $7 + 6 + 2 + 1 = 16$, – prieštara.
Sakykime, jis stovi viršūnėje, pavyzdžiui, F. Tada skaičius 6 negali stovėti nei centre (tada ketrukampio skaičių suma būtų ne mažesnė kaip 16), nei kraštinėse FE ir FG (tada kraštinės skaičių suma būtų ne mažesnė kaip $7 + 6 + 1 = 14$). Vadinasi, tai skaičius C. Kadangi $D + G = 13 - F = 13 - 7 = 6$, tai iš keturkampio $ADGC$ turime $A = 3$. Iš keturkampio $FBAD$ turime $B + D = 5$. Kadangi skaičius 3 jau užimtas, tėra viena pora, kuri duoda sumą 5, – tai $4 + 1$. Dėl simetrijos galima laikyti, kad $B = 1$, $D = 4$. Tada jau vienareikšmiškai $G = 2$, $E = 5$.
Jeigu skaičius 7 stovi kraštinės viduryje, tai galima laikyti, kad tai B. Vėl lygiai taip pat skaičius 6 gali būti tik G. Tada $D + F = 7$, ir iš keturkampio $BFAD$ randame, kad $A = 1$. Kadangi $C + D = 8$, ir skaičiai 1 ir 6 užimti, tai lieka tik pora 3 ir 5. Galime laikyti, kad $C = 5$, tada $D = 3$, $F = 4$, $E = 2$.

J27. Ⓑ 8

? Spėti sunku – per daug artimi atsakymai.



! Išveskime didžiosios trapecijos aukštinę per apskritimų centrus, tada aukštinės atkarpos sutinka kaip 3:1. Atkarpą x sudaro atkarpos 4,5 (didžiojo apskritimo liestinė), 0,5 (mažojo apskritimo liestinė) ir dvi lygios atkarpos (kiekviena jų lygi bendrai apskritimų liestinei). Todėl tos atkarpos lygios $(x - 4{,}5 - 0{,}5)/2 = 0{,}5x - 2{,}5$.

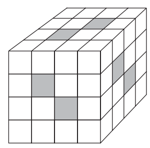
Pagal Talio teoremą

$$3 : 1 = (4{,}5 + 0{,}5x - 2{,}5) : (0{,}5 + 0{,}5x - 2{,}5), \quad 2 + 0{,}5x = 1{,}5x - 6, \quad x = 8.$$

Teisingas atsakymas B.

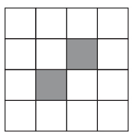
!! Žinoma, uždavinį galima spręsti ir remiantis panašiaisiais trikampiais (žr. brėžinį). Kadangi didžiojo ir mažojo stačiųjų trikampių statinių santykis yra 4:1, o didžiojo trikampio pagrindas lygus $4{,}5 - 0{,}5 = 4$, tai mažojo trikampio pagrindas lygus 1. Tada bendroji išorinė apskritimų liestinė lygi $2(1 + 0{,}5) = 3$, o $x = 3 + 4{,}5 + 0{,}5 = 8$.

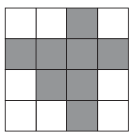
J28. Ⓒ 44

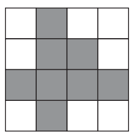


? Viena skylė išduria 4 kubelius, taigi 6 skylės išdurtų 24 kubelius, jei nesikirstų. Tada liktų $64 - 24 = 40$ kubelių. Bet kai kurie kubeliai sutampa, ir spėti sunku.

! Turint gerą erdvinę vaizduotę, galima skaičiuoti įvairiai. Šiaip jau neblogai skaičiuoti sluoksniais vaizduojant juos:


I, IV


II


III

I (apatiniame) ir IV sluoksnyje bus išdurta po 2 kubelius, II ir III sluoksniuose – po 8 kubelius. Taigi liks $64 - 20 = 44$ kubeliai.
Teisingas atsakymas C.

!! Galima įsivesti koordinačių sistemą ir sužymėti kubelius pagal viršutinį dešinįjį užpakalinį kampą (pavyzdžiui, kairysis apatinis priekinis kubelis bus (1, 1, 1), arba trumpiau 111. Tada gręždami per priekinius užtušuotus kvadratėlius išdursime kubelius

213, 223, 233, 243 ir 312, 322, 332, 342,

gręžiant per šoninius – kubelius

423, 323, 223, 123 ir 432, 332, 232, 132,

per viršutinius –

224, 223, 222, 221 ir 334, 333, 332, 331.

Du kubeliai čia įrašyti po 3 kartus, taigi sąraše yra $24 - 6 + 2 = 20$ kubelių.

J29. E 35

? Spėti čia visai neįmanoma.

! Aišku, kad visai nesvarbu, ar jie mėto pakaitomis, ar ne – abiejų galimybės kiekviename metime vienodos. Jeigu žaidimas būtų tęsiamas, tai kad laimėtų Petriukas, jam turi pasisekti tris kartus iš eilės, t. y. žaidimo rezultatai turi būti PPP. Visais kitais atvejais laimės Marytė. Kadangi Petriuko galimybės laimėti vieną partiją yra 1 iš 2, tai laimėti dvi partijas – 1 iš 4, o laimėti 3 partijas – 1 iš 8 (sakome, kad tikimybė yra 1/8). Vadinasi, Marytė turi galimybių laimėti 7 iš 8 (tikimybė yra 7/8). Kadangi galimybės (ir tikimybės) sutinka kaip 1:7, tai ir saldainius reikia dalyti tokiu santykiu. Todėl Petriukui teks $40 : 8 = 5$ saldainiai, o Marytei – 35 saldainiai.
Teisingas atsakymas E.

!! Skaičiuokime šiek tiek kitaip. Mes negalime pasakyti, kiek dar būtų prireikę partijų, jeigu žaidimas būtų tęsiamas (pavyzdžiui, jei pirmą partiją laimėtų Marytė, tai žaidimas baigtųsi, o jei Petriukas, tai dar tęstųsi). Bet kuriuo atveju žaidimas bus pasibaigęs po 3 partijų – iš viso jie kartu turės ne mažiau kaip $7 + 9 + 3 = 19$ taškų, ir bent vienas turės ne mažiau kaip 10 taškų.
Įsivaizduokime, kad jie žais visas 3 partijas, nors laimėtojas būtų ir paaiškėjęs anksčiau. Tada remiantis kombinatorikos daugybos taisykle iš viso yra $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ būdai vykti toms 3 partijoms; beje, galima ir taip visus būdus išrašyti abėcėliškai:

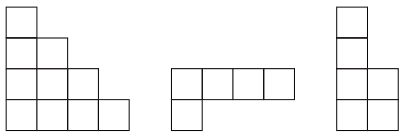
$$MMM,\ MMP,\ MPM,\ MPP,\ PMM,\ PMP,\ PPM,\ PPP.$$

Aišku, kad visi tie būdai vienodai galimi. Bet iš jų tik vienas – PPP lemia pergalę Petriukui, o visi kiti 7 – Marytei. Taigi Marytės galimybės 7 kartus didesnės, taigi ir saldainių ji turi gauti 7 kartus daugiau.

J30. C 12

? Spėti čia sunku.

! Vaizdas iš kairės (ir iš viršaus) rodo, kad yra tik du vienetinio storio sluoksniai žiūrint iš priekio – priekinis ir užpakalinis. Kadangi pirmame sluoksnyje, kaip rodo vaizdas iš viršaus, kubelių yra tik kairiajame stulpelyje, tai abu kubeliai yra jame.



Iš priekio Iš viršaus Iš kairės

Vaizdas iš priekio rodo, kad užpakalinės eilės kairiajame stulpelyje stovi keturi kubeliai, antrame – 3, trečiame – 2 ir ketvirtame – 1.
Vadinasi, iš viso yra 12 kubelių, ir teisingas atsakymas C.
Kaip sustatyti kubeliai, pavaizduota paveikslėlyje.